Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Н.Ю. ГОЛОДНАЯ
Н.Н. ОДИЯКО

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Теория корреляции в экономических расчетах

Часть II

Учебное пособие

Рекомендовано Дальневосточным региональным учебно-методическим центром (ДВ РУМЦ) в качестве учебного пособия для студентов специальностей 080102 «Мировая экономика», 080105 «Финансы и кредит», 080109 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 080111 «Маркетинг», 080116 «Математические методы в экономике», 080502 «Экономика и управление на предприятии (по отраслям), 080504 «Государственное и муниципальное управление», 080505 «Управление персоналом», 080507 «Менеджмент организации» вузов региона

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2006

ББК 22.1я73
Г 61

Рецензенты: А.А. Степанова, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры и логики ИМКН ДВГУ;
Г.К. Пак, канд. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедры алгебры и логики ИМКН ДВГУ;
А.Ю. Чеботарев, д-р физ.-мат. наук, доцент ИМКН ДВГУ

Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н.
Г 61 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА: Теория корреляции в экономических расчетах. Ч. 2.: Учебное пособие. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2006. – 80 с.

ISBN 5-9736-0059-9

Учебное пособие разработано в соответствии с программой курса, а также требованиями государственного образовательного стандарта к учебной дисциплине «Математическая статистика» для специальности «Математические методы в экономике». Содержит теоретический материал из общего курса математической статистики, а также включает в себя решения типовых задач и индивидуальные задания для самостоятельной работы.

Ориентировано в основном на студентов специальностей «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет и аудит», «Мировая экономика», «Экономика и управление на предприятии», «Государственное и муниципальное управление», «Менеджмент организации», «Маркетинг», «Управление персоналом».

ББК 22.1я73

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ISBN 5-9736-0059-9

ВВЕДЕНИЕ

Цель науки – описания, объяснение и предсказание явлений действительности на основе установленных законов, что позволяет находить решения в типичных ситуациях.

В основе научных знаний лежит наблюдение. Для обнаружения общей закономерности, которой подчиняется явление, необходимо многократно его наблюдать в одинаковых условиях.

Многие явления окружающего мира взаимосвязаны и влияют одно на другое. Проследить все связи и определить влияние каждого из них на явление не всегда возможно. Поэтому ограничиваются изучением влияния лишь основных факторов, определяющих течение явления. Под одинаковыми условиями наблюдений и понимается соблюдение во всех наблюдениях практически одинаковых значений основных факторов.

В результате наблюдений и регистрации массовых случайных явлений получаются статистические данные или статистический материал.

Если наблюдаемая величина есть случайная величина, то она изучается методами теории вероятностей. Для понимания характера этой случайной величины нужно знать ее закон распределения. Определение законов распределения рассматриваемых величин и оценка значений параметров распределения на основании наблюденных значений – задача математической статистики.

Еще одной задачей математической статистики является создание методов обработки и анализа статистического материала с целью получения определенных выводов необходимых для организации оптимального процесса, который описывает рассматриваемые величины.

Современная экономика существенно повышает требования к качеству подготовки выпускников экономических вузов. Для этого необходимо владеть современным инструментарием математико-статистического анализа данных. Предлагаемое учебное пособие знакомит студентов с одним важным разделом математической статистики – теорией корреляции и ее применением.

Для всех основных типов задач, которые можно решить на базе изложенного теоретического материала, приведены методики их решения, позволяющие не только дать «рецепты» для получения ответов, но, прежде всего, помогают студентам делать выводы при решении различных задач из области практической деятельности. Они увидят, что полученный результат не просто число, а сконцентрированное выражение того, что исходные данные несут в себе об изучаемом явлении.

Для того чтобы процесс обучения носил активный характер, тексты задач приближены к реальным ситуациям из области экономики. Решение их поможет понять универсальность статистического анализа, как инструмента решения проблем, связанных с риском и неопределенностью.

В пособии приведена таблица математической статистики, необходимая для решения задач (Приложение), а также список рекомендуемой литературы.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Большой практический интерес представляет изучение статистических совокупностей объектов одновременно по двум каким-нибудь признакам X и Y.

Взаимосвязь между величинами X и Y бывает двух видов:

1. Точная функциональная зависимость, когда каждому значению x величины X соответствует вполне определенное значение y величины Y.

2. Расплывчатая статистическая, или корреляционная, зависимость, когда одному и тому же значению величины X может соответствовать целая статистическая совокупность значений величины Y со своим законом распределения, изменяющимся с изменением X. При статистической зависимости расплывчатая связь, или корреляция, между X и Y может быть более тесной, т.е. более близкой к функциональной, и менее тесной, вплоть до полного ее отсутствия.

Раздел математической статистики, изучающий статистические (корреляционные) зависимости, называется теорией корреляции.

Различают два вида корреляции – неполную и полную, в зависимости от того, как ставится эксперимент.

Неполной называется корреляция, когда одному из признаков, например X даются те или иные фиксированные значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и для каждого из них путем эксперимента находят совокупность значений y признака Y.

Полной называется корреляция, когда каждый из отобранных элементов статистической совокупности объектов испытывается сразу по двум признакам X и Y.

В теории корреляции разрешаются две основные задачи:

1. О форме корреляционной связи между X и Y в виде некоторой функциональной зависимости, которая хотя бы приближенно изображала расплывчатую корреляционную зависимость.

2. Об оценке тесноты корреляционной связи между X и Y, т.е. о степени близости корреляционной зависимости к функциональной.

2. РЕГРЕССИИ. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Задача о форме корреляционной связи решается с помощью регрессий.

Регрессией Y от X называется функциональная зависимость между значениями x и соответствующими условными средними значениями $\overline{y}(x)$.

В случае полной корреляции существует также регрессия X от Y как функциональная зависимость между y и $\overline{x}(y)$.

Регрессии можно представить геометрически в виде ломанных линий, соединяющих или точки A(x; $\overline{y}(x)$), или точки B($\overline{x}(y)$;y). Эти линии называются эмпирическими (полученными из опыта) ломаными линиями регрессии.

Регрессии, полученные в виде таблиц или ломаных линий, характеризуют форму корреляционной зависимости между X и Y лишь для выборочных совокупностей. Для генеральной же совокупности они дают приближенную картину этой зависимости. Очевидно, приближение будет тем точнее, чем больше объем выборки n и чем меньше брать частные интервалы Δx и Δy. При этом ломаная линия регрессии будет приближаться к некоторой плавной кривой. Правда, такую плавную кривую можно получить и иначе, – если ломаную линию регрессии «сгладить» посредством какой-либо известной линии (прямой, параболы, гиперболы и т.п.).

Уравнение сглаживающей линии даст хотя и приближенно, но аналитическое – в виде формулы – выражение регрессии. Подобные формулы называют эмпирическими.

Из сказанного следует, что задача отыскания эмпирической формулы распадается на две:

1. Выбор типа линии, выравнивающей ломанную регрессии, т.е. типа линии, около которой группируются экспериментальные точки A(x; $\overline{y}(x)$) или B($\overline{x}(y)$;y).

2. Определение параметров, входящих в уравнение линии выбранного типа, таким образом, чтобы из множества линий этого типа взять ту, которая наиболее близко проходит около точек ломаной регрессии.

3. ВЫБОР ТИПА ЛИНИИ, ВЫРАВНИВАЮЩЕЙ ЛОМАНУЮ ЛИНИЮ РЕГРЕССИИ

Для выбора типа линии, выравнивающей ломаную линию регрессии, необходимо хорошо знать простейшие виды линий и их уравнения.

Прямая, проходящая через начало координат. Уравнение этой прямой

$$y = ax \tag{3.1}$$

Имеем зависимость прямой пропорциональности между y и x.

Линии такого типа выбирают в тех случаях, когда при x = 0 значение y также равно 0 и экспериментальные точки располагаются приблизительно вдоль прямой.

Формула (3.1) содержит лишь один параметр a.

Прямая, не проходящая через начало координат. Уравнение этой прямой

$$Y = ax + b, b \neq 0. \tag{3.2}$$

Имеем линейную зависимость y от x.

Формула (3.2) содержит два параметра – a и b.

Параболы с вершиной в начале координат, симметричные одной из осей координат. Их уравнения

$$y = a\sqrt{x}\ , a \neq 0 \tag{3.3}$$

и

$$y = ax^2, a \neq 0. \tag{3.4}$$

Здесь одна из величин x или y пропорциональна квадрату другой.

Формулы (3.3) и (3.4) содержат один параметр a.

Парабола, симметричная прямой, параллельной оси OY. Ее уравнение

$$Y = ax_2 + bx + c, a \neq 0. \tag{3.5}$$

или, что то же самое,

$$(x – m)^2 = 2p(y – n), p \neq 0, \tag{3.6}$$

где m и n – координаты вершины параболы. Имеем квадратичную функцию. Направление выпуклости зависит от знака коэффициента a (при a < 0 выпуклость направлена вверх, при a > 0 – вниз).

Линии этого типа выбирают в тех случаях, когда имеется один максимум или один минимум и кривые симметричны относительно прямой, параллельной оси OY.

Формулы содержат три параметра – a, b и c или m, n и p.

Гипербола, асимптотически приближающаяся к осям координат. Уравнение

$$y = \frac{a}{x},\ a \neq 0. \tag{3.7}$$

Имеем зависимость обратной пропорциональности между x и y.

Формула (3.7) содержит один параметр a.

Гипербола, асимптотически приближающаяся к прямым, параллельным осям координат. Уравнение

$$y = \frac{c}{x - a} + b,\ a \neq 0. \tag{3.8}$$

Формула содержит три параметра a, b и c, причем параметры a и b – это координаты точки пересечения асимптот. Знак параметра c зависит от расположения гиперболы относительно асимптот.

Общие степенные кривые. Такими кривыми называются кривые, имеющие уравнения вида

$$y = bx^a,\ b \neq 0, \tag{3.9}$$

где a может быть положительным или отрицательным, целым или дробным, правильной или неправильной дробью. В частности, степенными кривыми являются параболы (формулы (3.3) и (3.4)) при a = 2 и a = 1/2, и гиперболы (формула (3.7)) при a = –1.

Формула (3.9) содержит два параметра a и b; поэтому ее можно использовать более широко, чем формулы (3.3), (3.4) и (3.7).

Экспоненциальные (показательные) кривые. Уравнения этих кривых

$$y = be^{-ax},\ b \neq 0 \tag{3.10}$$

$$y = b(1 - e^{-ax}),\ b \neq 0 \tag{3.11}$$

Кривая (3.10) асимптотически приближается к оси X, пересекает ось Y и при b > 0 выпукла вниз. Кривая, выраженная уравнением (3.11), асимптотически приближается к прямой, параллельной оси X, и при b > 0 выпукла вверх. Экспоненциальными функциями типа (3.10) и (3.11) хорошо изображаются различные процессы, затухающие во времени.

Кривые Гаусса. Уравнения этих кривых, которые играют особо важную роль в математической статистике, имеет вид

$$y = e^{-x^2}, \tag{3.12}$$

$$y = ce^{-h^2(x-a)^2},\ c \neq 0. \tag{3.13}$$

Кривая, уравнение которой (3.12), симметрична относительно оси OY и имеет максимум y(max) = 1 при x = 0. Кривая, уравнение которой (3.13), является вытянутой (или сжатой) в вертикальном и горизонтальном направлениях и смещенной на величину, а от оси OY.

Отметим, что выбор типа линии на основе результатов испытаний является в большей мере произвольным.

На практике при нанесении точек, соответствующих экспериментальным данным, отдельные точки или группы точек иногда выходят из общего «строя». Особенность их положения заставляет предполагать ошибку в наблюдениях. Поэтому при отыскании эмпирической формулы подобные точки выбрасывают.

4. МЕТОД СРЕДНИХ, МЕТОД ПРОБ, МЕТОД ВЫРОВНЕННЫХ ТОЧЕК, МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Для определения параметров в уравнении выравнивающей линии выбранного типа существует несколько методов: **метод средних, метод проб, метод выровненных точек и метод наименьших квадратов**.

Метод средних применяют в тех случаях, когда выбранный тип уравнения выравнивающей линии содержит лишь один параметр. Метод состоит в том, что параметр находят как среднюю взвешенную из различных значений, вычисленных по выбранной формуле после подстановок в нее вместо x и y числовых значений x и $\overline{y}_x$ из соответствующей таблицы регрессии.

Метод проб используют, когда выбранная формула содержит несколько параметров, например два – a и b. Он заключается в том, что всем параметрам, кроме какого-нибудь одного (наиболее неясного), дают ориентировочные числовые значения, а значение оставшегося неопределенного параметра находят методом средних. Затем можно внести коррективы, фиксировав этот последний параметр, и определить методом средних новое значение другого параметра, которому ранее давалось ориентировочное значение.

Метод выровненных (или выбранных) точек состоит в выборе по чертежу нескольких точек (не обязательно совпадающих с точками линии регрессии), через которые проводят выравнивающую линию и определяют ее уравнение по координатам этих выбранных точек.

Так, если ломаная линия регрессии располагается вблизи некоторой прямой, не проходящей через начало координат, то эмпирическую формулу можно найти как уравнение прямой, проходящей через какие-то две точки $M_1(m; n)$ и $M_2(k; l)$, близкие к точкам ломаной.

Искомая формула будет иметь вид

$$\frac{y-n}{l-n}=\frac{x-m}{k-m}\,. \qquad (4.1)$$

Разрешив это уравнение относительно y, можно получить эмпирическую формулу в явном виде

$$y = ax + b$$

Если ломаная линия регрессии располагается вблизи параболы, симметричной прямой, которая параллельна оси ординат, то эмпирическая формула ищется в виде (3.5) или (3.6). В этом случае метод выровненных точек заключается в выборе трех точек $M_1(m; n)$, $M_2(k; l)$ и $M_3(r, s)$, в трехкратной подстановке координат указанных точек в формулу (3.5) (или (3.6)) и в отыскании трех неизвестных параметров a, b и c (или m, n и p) из полученных трех уравнений.

Метод наименьших квадратов служит для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные погрешности.

Процесс выражения опытных данных функциональной зависимостью с помощью метода наименьших квадратов состоит из двух этапов: на первом выбирают вид искомой формулы, а на втором для данной формулы подбирают параметры.

В соответствии с идеей метода наименьших квадратов необходимо минимизировать сумму

$$S=\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}(x_i)-y_i)^2, \tag{4.2}$$

где x_i, y_i – значения опытных данных;

$\overline{y}(x_i)$ – значение функции, взятое из эмпирической зависимости в точке x_i ;

n – число опытов.

В случае линейной эмпирической формулы сумма (4.2) принимает вид

$$S(a;b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2\ , \tag{4.3}$$

а в случае квадратической зависимости – следующий вид:

$$S(a;b;c)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\ . \tag{4.4}$$

Минимум функции (4.3) и (4.4) имеют в тех точках, в которых частные производные от S по параметрам a, b, c обращаются в нуль. В результате дифференцирования и элементарных преобразований для определения параметров получают нормальную систему линейных уравнений. В случае линейной эмпирической зависимости (y = ax + b) составляют нормальную систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases} \tag{4.5}$$

В случае квадратической зависимости ($y = ax^2 + bx + c$) нормальная система состоит из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{i,} \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \tag{4.6}$$

В случае гиперболической зависимости ($y = a + b/x$) система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{n=1}^{n} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} \end{cases} \tag{4.7}$$

В случае логарифмической зависимости ($y = a \cdot \lg x + b$) система для определения a и b имеет вид

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} (\lg x_i)^2 + b\sum_{i=1}^{n} \lg x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \lg x_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} \lg x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{4.8}$$

Если обозначить $\lg x = X$, то получим линейную функцию относительно y: $y = ax + b$. Тогда система для определения a и b будет иметь вид (4.5), при условии, что $X_i = \lg x_i$.

В случае показательной зависимости $y = ba^x$ удобнее сначала функцию записать в виде $\lg = x \cdot \lg a + \lg b$. Если обозначить $\lg y = Y$, $\lg a = A$ и $\lg b = B$, то получим линейную функцию относительно x: $Y = Ax + B$. Тогда система для определения A и B, а затем a и b будет иметь вид (4.5) при условии, что $Y_i = \lg y_i$.

5. ОЦЕНКА ТЕСНОТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Замечание. Для удобства записи здесь и далее примем следующее обозначение для условной средней $\overline{y}x_i$, вычисленной при X = x_i: $\overline{y}_{xi} = \overline{y}_i$.

Для оценки тесноты корреляционной зависимости служит корреляционное отношение:

$$\eta = \sqrt{\frac{\sigma^2(\overline{y}_x)}{\sigma^2(y)}},$$

где $\sigma^2(y)$ – выборочная дисперсия случайной величины Y, вычисленная по всей таблице;

$\sigma^2(\overline{y}_x)$ – дисперсия условных средних относительно общей средней, так называемая внешняя дисперсия:

$$\sigma^2(\overline{y}_x) = \sigma^2_{\text{âíåø}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{y_i^2} - (\overline{y})^2, \text{ где } \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i .$$

Выборочная дисперсия $\sigma^2(y)$ случайной величины Y может быть представлена как сумма двух дисперсий: уже упомянутой внешней дисперсии $\sigma^2_{\text{âíåø}}$ и внутренней дисперсии $\sigma^2_{\text{âíóòð}}$, которая вычисляется путем усреднения внутригрупповых дисперсий величины Y, вычисленных для каждого значения величины x_i:

$$\sigma^2_{\text{âíóòð}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(y),$$

где $\sigma_i^2(y) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2$ или $\sigma_i^2(y) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}y_{ij}^2 - \overline{y}_i^{\,2}$.

Учитывая, что $\sigma^2(y) = \sigma^2_{\text{âíåø}} + \sigma^2_{\text{âíóòð}}$, корреляционное отношение можно записать в следующем виде:

$$\eta = \sqrt{\frac{\sigma^2_{\text{âíåø}}}{\sigma^2_{\text{âíåø}} + \sigma^2_{\text{âíóòð}}}}.$$

Отсюда следует, что $0 \le \eta \le 1$.

Если $\eta = 1$, то $\sigma^2_{\text{âíóòð}} = 0$, внутренние дисперсии равны нулю, рассеяние внутри группы отсутствует, при каждом значении X значение Y определяется однозначно, зависимость Y от X функциональная.

При η ≈ 1 разброс внутри группы относительно мал, зависимость близка к функциональной (тесная).

Если $\eta = 0$, $\sigma^2_{\text{âíåø}} = 0$, разброс условных средних отсутствует, то есть все условные средние равны между собой и равны общему среднему $\overline{y}_x = \overline{y}$. В этом случае с изменением X среднее значение Y не меняется, то есть величина Y корреляционно не зависит от X.

При η ≈ 0 внешняя дисперсия мала по сравнению с внутренней дисперсией, изменение X практически не вызывает изменения среднего значения Y, корреляционная зависимость практически отсутствует.

Вообще, чем ближе η к 1, тем теснее корреляционная зависимость; чем ближе η к 0, тем корреляционная зависимость слабее.

В случае линейной корреляции корреляционное отношение η и выборочный коэффициент корреляции $r_в$ совпадают.

6. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ УРАВНЕНИЯ

Корреляционное отношение служит только оценкой тесноты корреляционной зависимости и никак не связано с ее формой. Проверка того, хорошо ли согласуется подобранная теоретическая линия регрессии с экспериментальными данными, называется проверкой адекватности уравнения регрессии.

Уравнение регрессии считается адекватным, если расхождение между эмпирической и теоретической линиями регрессии можно объяснить ошибками в определении условных средних, вызванных разбросом (дисперсией) случайных результатов эксперимента.

Для проверки адекватности условия используется критерий Фишера:

$$F_{\text{Ýìï}} = \frac{\sigma^2_{\text{îñò}}}{\sigma^2_{\text{âîñïð .ñð.}}},$$

где $\sigma^2_{\text{îñò}} = \dfrac{1}{n-l}\sum\limits_{i=1}^{n}(\overline{y}_i - \hat{y}_i)^2$ – остаточная дисперсия;

l –число коэффициентов в уравнении регрессии;

$\hat{y}_i$ – ордината линии регрессии в точке x_i;

$\sigma^2_{\text{âîñïð .ñð}}$ – дисперсия воспроизводимости средних, равная исправленной внутренней дисперсии, деленной на число экспериментов m, по которым вычислялись условные средние $\overline{y}_i$:

$$\sigma^2_{\text{âîñïð .ñð.}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{m}{m-1}\cdot\sigma^2_{\text{âíóòð.}} = \frac{1}{m-1}\cdot\sigma^2_{\text{âíóòð.}}$$

Величина $F_{эмп}$ имеет распределение Фишера с $k_1 = n - l$ b $k_2 = n(m - 1)$ числами степеней свободы (n – число задаваемых экспериментатором значений величины X, m – число проводимых опытов, l – число коэффициентов в уравнении регрессии).

По заданному уровню значимости $\alpha = 0.05$ и числам степеней свободы $k_1 = n - l$ b $k_2 = n(m - 1)$ из таблицы критических точек распределения Фишера находим $F_{крит}$.

Если $F_{эмп} < F_{крит}$, уравнение регрессии адекватно.

Если $F_{эмп} > F_{крит}$ расхождение между теоретической и эмпирической линиями регрессии значимо, уравнение не адекватно, следует взять многочлен более высокого порядка.

7. ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Из всех корреляционных зависимостей надо особо выделить линейную корреляцию, т.е. такую, когда точки регрессии располагаются вблизи некоторой прямой линии.

В случае полной линейной корреляции приходится иметь дело с двумя видами регрессии:

1) регрессия Y на X в виде функциональной зависимости $\overline{y}_x = \rho_{yx} x + b$;

2) регрессия X на Y в виде функциональной зависимости $\overline{x}_y = \rho_{xy} y + d$.

Угловой коэффициент ρ_{yx} (ρ_{xy}) прямой линии регрессии Y на X (X на Y) называют выборочным коэффициентом регрессии Y на X (X на Y), он является оценкой коэффициента регрессии.

Для определения параметров уравнения прямой линии регрессии Y на X с помощью метода наименьших квадратов получается система:

$$\begin{cases} \rho_{yx} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \rho_{yx} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_t \end{cases} \tag{7.1}$$

в предположении, что значения X и соответствующие им значения Y наблюдались по одному разу. Запишем систему (7.1) так, чтобы она отражала данные корреляционной таблицы. Воспользуемся тождествами:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x} \text{ (следствие из } \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\text{)},$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\overline{y} \text{ (следствие из } \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\text{)},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\overline{x^2} \text{ (следствие из } \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\text{)},$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum n_{xy} xy$ (учтено, что пара чисел (x, y) наблюдалась n_{xy} раз).

Подставив правые части тождеств в систему (7.1) и сократив обе части второго уравнения на n, получим:

$$\begin{cases} \rho_{yx} n\overline{x^2} + bn\overline{x} = \sum n_{xy} xy \\ \rho_{yx}\overline{x} + b = \overline{y} \end{cases} \tag{7.2}$$

Решив эту систему, найдем параметры ρ_{yx} и b и, следовательно, искомое уравнение $\overline{y}_x = \rho_{yx} x + b$. Целесообразно, введя новую величину – выборочный коэффициент корреляции, написать уравнение регрессии в ином виде. Найдем из второго уравнения системы (7.2) $b = \overline{y} - \rho_{yx}\overline{x}$. Подставив правую часть этого равенства в уравнение $\overline{y}_x = \rho_{yx}\overline{x} + b$, получим

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{yx}(x - \overline{x}). \tag{7.3}$$

Найдем из системы (7.1) коэффициент регрессии, учитывая, что $\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \sigma_x^2$:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{n\left[\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right]} = \frac{\sum n_{xe} xy - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{n\sigma_x^2}.$$

Умножим обе части равенства на $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum n_{xy} xy - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}. \tag{7.4}$$

Обозначим правую часть равенства (7.4) через $r_в$ и назовем ее выборочным коэффициентом корреляции, который является оценкой коэффициента корреляции:

$$r_{\hat{a}} = \frac{\sum n_{xy} xy - n \cdot \overline{x} - \overline{y}}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Подставим $r_в$ в (7.4): $\rho_{yx} \cdot \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_{\hat{a}}$, отсюда $\rho_{\text{í÷}} = r_{\hat{a}} \cdot \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Подставим в (7.3), окончательно получим выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{\hat{a}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}). \tag{7.5}$$

Замечание.

1. Аналогично находим выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y вида:

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_в \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}), \qquad (7.6)$$

где $r_в \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \rho_{xy}$.

2. Коэффициент корреляции заключен между –1 и 1: $-1 \le r_в \le 1$.

Если данные наблюдений над признаками X и Y заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то целесообразно перейти к условным вариантам:

$$U_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad V_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

где C_1 – «ложный нуль» вариант X (новое начало отсчета): в качестве ложного нуля удобно принять варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда, имеющую наибольшую частоту; h_1 – шаг, то есть разность между двумя соседними вариантами X; C_2 – «ложный нуль» вариант Y, h_2 – шаг вариант Y. В этом случае выборочный коэффициент корреляции:

$$r_в = \frac{\sum n_{uv} uv - n \cdot \overline{u} \cdot \overline{v}}{n \cdot \sigma_u \cdot \sigma_v}.$$

Величины $\overline{u}, \overline{v}, \sigma_u, \sigma_v$ могут быть найдены либо методом произведений (при большом числе данных), либо по формулам:

$$\overline{u} = \frac{\sum n_u u}{n}, \quad \overline{v} = \frac{\sum n_v v}{n},$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}, \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}.$$

Зная эти величины, можно определить входящие в уравнения регрессии (7.5) и (7.6) величины по формулам:

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h_1 + C_1, \quad \overline{y} = \overline{v} \cdot h_2 + C_2.$$

$$\sigma_x = \sigma_u \cdot h_1, \quad \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2$$

8. ЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Применим линейный регрессионный анализ для нахождения параметров A и α производственной функции Кобба-Дугласа:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \qquad (8.1)$$

где K – затраты капитала, L – объем трудовых затрат. Обозначив $y = \frac{Y}{L}$ – индекс производительности труда, $k = \frac{K}{L}$ – индекс фондовооруженности и поделив равенство (8.1) на L, получим:

$\frac{Y}{L} = A \cdot \frac{K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}}{L}$ или $y = A \cdot k^{\alpha}$. Прологарифмируем обе части последнего равенства: $\ln y = \ln A + \alpha \cdot \ln k$. Используя метод наименьших квадратов, получим систему уравнений для нахождения lnA и α:

$$\begin{cases} \ln A + \overline{\ln k} \cdot \alpha = \overline{\ln y} \\ \overline{\ln k} \cdot \ln A + \overline{(\ln k)^2} \cdot \alpha = \overline{\ln k \cdot \ln y} \end{cases},$$

где $\overline{\ln k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln k_i$, $\overline{(\ln k)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\ln k_i)^2$, $\overline{\ln k \cdot \ln y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln k_i \cdot \ln y_i$.

9. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Числовые данные, описывающие изменение показателя во времени, образуют временной ряд. Значение x_i отображаемого показателя для каждого выбранного значения t_i момента времени называется i-м уровнем ряда.

Для практического использования часто достаточно знать лишь некоторые основные числовые характеристики ряда. Характер изменения уровней ряда со временем описывают следующие основные показатели.

Абсолютные приросты: базисный $\Delta x_{iб} = x_i - x_1$, цепной $\Delta x_{iщ\,=}\, x_i - x_{i-1}$.

Темпы роста: базисный $T_{iá} = \frac{x_i}{x_1} \cdot 100\%$, цепной $T_{iö} = \frac{x_i}{x_{i-1}} \cdot 100\%$.

Темпы прироста:

базисный $\Delta T_{iá} = \frac{\Delta x_{iá}}{x_1} \cdot 100\% = (T_{iá} - 100)\%$,

цепной $\Delta T_{iö} = \frac{\Delta x_{iö}}{x_{1-ö}} \cdot 100\% = (T_{iö} - 100)\%$.

Средний абсолютный прирост $\overline{\Delta} = \frac{x_n - x_1}{n-1} = \frac{\Delta x_{ná}}{n-1}$.

Средний темп роста $T_{ср} = \frac{\sum_{i=2}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \cdot 100\%$.

Средний темп прироста $\Delta T_{ср} = (T_{ср} - 100)\%$.

10. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Для установления корреляционной зависимости между величинами X и Y (где Y – случайная величина, X – неслучайная величина) проведены эксперименты, результаты которых записаны в табл. 1.

Требуется:

I. Найти условные средние $\overline{y}_i$ и построить эмпирическую линию регрессии Y по X (ломаную).

II. Найти уравнение регрессии Y по X методом наименьших квадратов, принимая в качестве сглаживающей линии параболу

$$\hat{y}_x = ax^2 + bx + c \tag{10.1}$$

и затем построить ее на одном чертеже с эмпирической линией регрессии.

III. Оценить тесноту корреляционной зависимости Y по X.

Проверить адекватность уравнения регрессии Y по X.

Таблица 1

Исходные данные

x_i	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$	$x_6 = 6$
y_{ij}	10 9 11 12 10	10 16 15 13 14	19 21 18 20 18	30 28 31 28 33	45 44 42 48 43	79 75 80 73 82

Решение:

I. Условные средние вычислим по формуле

$$\overline{y}_i = \frac{1}{5}\sum_{j-1}^{5} y_{ij} \tag{10.2}$$

Например, $\overline{y}_1 = \frac{1}{5}(10+9+11+12+10) = 10{,}4$

Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Таблица 2

Условные средние $\overline{y}_i$

xi	1	2	3	4	5	6
$\overline{y}_i$	10.4	13.6	19.2	30.0	44.4	77.8

По точкам (x_i; $\overline{y}_i$)строим эмпирическую (ломаную) линию регрессии (рис. 10.1).

II. Теоретическое уравнение регрессии Y по X будем искать в виде (10.1). Неизвестные параметры a, b, c будем находить из системы линейных уравнений (4.6), в которой n = 6. Для определения коэффициентов этой системы составим расчетную табл. 3, где в последней строке записаны суммы элементов соответствующих столбцов.

Используя последнюю строку табл. 3, имеем:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^4 = 2275\,;\ \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \overline{y}_i = 4628{,}4 \text{ и т.д.}$$

Таблица 3

Расчетная таблица

i	x_i	$\overline{y}_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i \overline{y}_i$	$x_i^2 \overline{y}_i$
1	1	10.4	1	1	1	10.4	10.4
2	2	13.6	4	8	16	27.2	54.4
3	3	19.2	9	27	81	57.6	172.8
4	4	30.0	16	64	256	120.0	480.0
5	5	44.4	25	125	625	222.0	1110.0
6	6	77.8	36	216	1296	466.8	2800.8
$\sum$	21	195.4	91	441	2275	904	4628.4

В результате получим систему:

$$\begin{cases} 2275a + 441b + 91c = 4628.4, \\ 441a + 91b + 21c = 904, \\ 91a + 21b + 6c = 195.4. \end{cases} \tag{10.3}$$

Систему решаем методом Гаусса. Первое уравнение системы (10.3) делим на 2275. Получим уравнение (*). Второе уравнение системы (10.3) разделим на 441, и из полученного результата вычтем уравнение (*). Получим уравнение (**). Третье уравнение системы (10.3) разделим на 91, и из полученного результата вычтем уравнение (*). Имеем линейную систему:

$$\begin{cases} a + 0.193846b \quad + \quad 0.04c = 2.034461, & (*) \\ \quad 0.0125032b + 0.007619047c = 0.0154256, & (**) \\ \quad 0.03692323b + 0.02593406c = 0.1127917. & (***) \end{cases}$$

Теперь уравнение (**) разделим на 0.0125032. Получим уравнение (α). Уравнение (***) разделим на 0.03692323, и из полученного результата вычтем уравнение (α). Получим уравнение (β). Имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + 0.193846b \quad + \quad 0.04c = 2.034461, & (*) \\ \qquad b + 0.609364c = 1.233732, & (\alpha) \\ \qquad 0.09301282c = 1.821033. & (\beta) \end{cases}$$

Из уравнения (β) находим c. Подставляя его в (α), из уравнения (α) находим b. Подставляя найденные b и c в (*), находим a:

$$c = 19.57830 \approx 19.578;$$

$$b = -10.69659 \approx -10,697;$$

$$a = 3.32482 \approx 3.325.$$

Найденные a, b, c подставляем в (10.1), получим теоретическое уравнение регрессии:

$$\hat{y}_x = 3.325x^2 - 10.697x + 19.578. \qquad (10.4)$$

Вычислив ординаты теоретической линии регрессии по формуле (10.4) для значений X, заданных в таблице исходных данных (эти ординаты записаны в табл. 4), строим теоретическую линию регрессии на одном чертеже с эмпирической линией регрессии (рис. 10.1).

Таблица 4

Ординаты теоретической линии регрессии

x_i	1	2	3	4	5	6
$\hat{y}_i$	12.207	11.484	17.411	30.000	49.216	75.093

Наглядно убеждаемся, что теоретическая линия регрессии хорошо сглаживает эмпирическую линию регрессии, чем подтверждается, что система (10.3) составлена и решена верно.

III. Оценим тесноту корреляционной зависимости.

а) находим общее среднее по формуле:

$$\bar{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\bar{y}_i = \frac{1}{6}(10.4 \ + \ \ldots \ + \ 77.8) = 32.57.$$

Здесь значения $\bar{y}_i$ взяты из табл. 2.

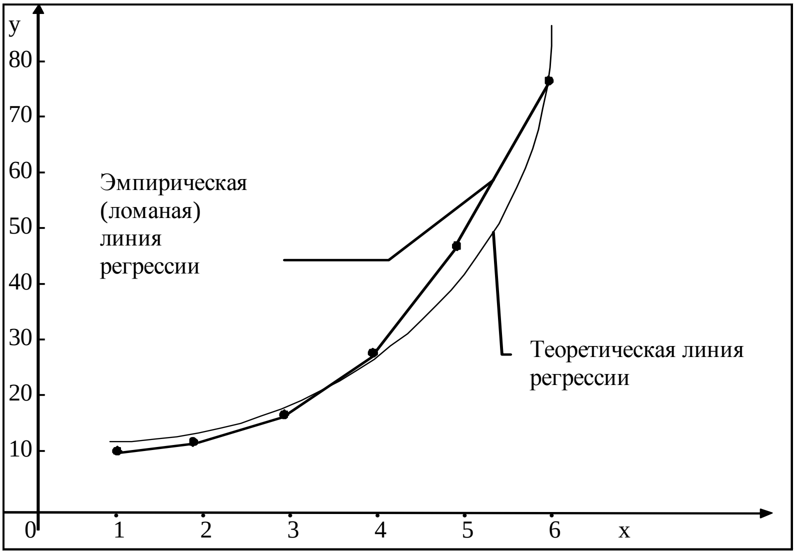

Рис. 10.1. Эмпирическая ломаная и теоретическая линии регрессии

б) находим внешнюю дисперсию $\sigma^2_{\text{âíåø .}}$:

$$\sigma^2_{\text{âíåø .}} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\overline{y_i^2} - \bar{y}^2 = \frac{1}{6}(10,4^2 + ...77,8^2) - 32,57^2 = 537$$

в) для нахождения усредненной внутренней дисперсии $\sigma^2_{\text{âíóòð .}}$ сначала вычисляем внутренние дисперсии σ_i^2 для каждого x_i, где m = 5:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} y_{ij}^2 - \bar{y}_i^2 , \tag{10.5}$$

i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Для примера вычислим σ_i^2, составив предварительно расчетную таблицу (табл. 5).

Таблица 5

Расчетная таблица σ_i^2

y_{1j}	10	9	11	12	10	
y_{1j}^2	100	81	121	144	100	$\sum y_{1j}^2 = 546$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} y_{1j}^2 - \overline{y}_1^2 = \frac{1}{5}\cdot 546 - 10{,}4^2 = 1{,}04$$

Значения всех внутренних дисперсий σ_i^2 для каждого x_i представлены в табл. 6.

Таблица 6

Значения дисперсий σ_i^2

x_i	1	2	3	4	5	6
σ_i^2	1,04	4,24	1,36	3,60	4,24	10,26

Усредненная внутренняя дисперсия

$$\sigma^2_{\text{âíóòð.}} = \frac{1}{6}\sum_{\text{ø}=1}^{6} \sigma_i^2 = \frac{1}{6}\cdot(1{,}04 + 4{,}24 + \ldots + 10{,}26) = 4{,}24$$

г) вычисляем корреляционное отношение:

$$\eta = \sqrt{\frac{\sigma^2_{\text{âíåø}}}{\sigma^2_{\text{âíåø}} + \sigma^2_{\text{âíóòð.}}}} = \sqrt{\frac{537}{537 + 4{,}24}} = 0{,}996$$

Вывод: корреляционная зависимость – тесная.

IV. Проверяем адекватность уравнения регрессии.

а) вычисляем «остаточную дисперсию»:

$$\sigma^2_{\text{îñò}} = \frac{1}{n-l}\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_i - \hat{y}_i)^2 =$$

$$= \frac{(10{,}4 - 12{,}207)^2 + (13{,}6 - 11{,}484)^2 + \ldots + (77{,}8 - 75{,}093)^2}{6-3} =$$

$$= \frac{31{,}21}{3} = 10{,}40$$

Здесь n (число значений X) равно 6, l – количество параметров уравнения регрессии (10.4) – равно 3, значения $\overline{y}_i$ взяты из табл. 2, значения $\hat{y}_i$ взяты из табл. 4;

б) вычисляем «дисперсию воспроизводимости средних»:

$$\sigma^2_{\text{âîñïð .ñð}} = \frac{1}{m-1} \quad \sigma^2_{\text{âíóòð}} = \frac{1}{5-1}\cdot 4{,}24 = 1{,}06;$$

в) вычисляем величину $F_{эмп}$ по формуле:

$$F_{\text{ýìï}} = \frac{\sigma^2_{\text{îñò}}}{\sigma^2_{\text{âîñïð .ñð}}} = \frac{10{,}40}{1{,}06} 9{,}8\ ;$$

г) находим $F_{\text{êðèò.}}$ при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

В нашем случае n (число значений X) равно 6, m (число значений Y) в каждом столбце табл. 1) равно 5, l (число параметров уравнения регрессии (10.4)) равно 3. Следовательно, числа степеней свободы соответственно равны $K_1 = n - l = 6 - 3 = 3$, $K_2 = n(m-1) = 6 \cdot 4 = 24$. По таблице критических точек распределения Фишера для $\alpha = 0.05$, $K_1 = 3$, $K_2 = 24$ находим $F_{крит} = 3{,}01$.

Так как 9.8 > 3.01, то $F_{эмп} > F_{крит.}$

Вывод: теоретическое уравнение регрессии неадекватно. В качестве уравнения регрессии необходимо принять многочлен 3-й степени

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

и все расчеты сделать заново.

(В лабораторной работе пересчета делать не надо).

Задача 2. В прилагаемой таблице приведены данные замеров обхвата груди X (в см) и роста Y (в см) у 20 мужчин некоторого города.

X	90	95	97	99	92	96	100	100	97	101
Y	155	169	162	168	164	164	165	169	159	170

X	97	95	102	98	101	99	103	104	106	103
Y	171	165	171	166	172	175	170	181	185	175

Найти приближенную зависимость Y от X.

Это – первоначальная таблица выборочных значений двумерной случайной величины (X; Y). Для нее прежде всего составляют таблицу распределения частот, которая называется корреляционной таблицей частот (табл. 7). Для того, чтобы составить корреляционную таблицу, необходимо:

1. Выявить по первоначальной таблице наибольшее и наименьшее значения признака X и признака Y и определить общий интервал изменения признака в данной выборке:

признак X: 106 – 90 = 16 (см), признак Y: 185 – 155 = 30 (см).

2. Разделить общий интервал на K частных интервалов Δx – признака X, Δy – признака Y (число K зависит от объема n выборки):

n	40–60	60–100	100–200	200–500
K	5–7	7–10	10–14	14–17

полученные частные интервалы и их середины внести в составляемую таблицу: признак X: $h_1 = \frac{16}{4} = 4\,(\text{ñì})$, признак Y: $h_2 = \frac{30}{5} = 6\,(\text{ñì})$.

3. Просмотреть все случайные величины (X; Y) таблицы в порядке их записи и определить принадлежность каждого из них к тому или иному частному интервалу.

4. Найти частоты n_x, n_y случайных величин, приходящихся на каждый интервал.

Таблица 7

Y \ X	Δx	[90; 94]	(94; 98]	(98; 102]	(102; 106]	
Δy	y \ x	$x_1 = 92$	$x_2 = 96$	$x_3 = 100$	$x_4 = 104$	n_y
[155; 161]	$y_1 = 158$	1	1			2
(161; 167]	$y_2 = 164$	1	4	1		6
(167; 173]	$y_3 = 170$		2	5	1	8
(173; 179]	$y_4 = 176$			1	1	2
(179; 185]	$y_5 = 182$				2	2
	n_x	2	7	7	4	n = 20

Составим корреляционную таблицу в условных вариантах, выбрав в качестве ложных нулей $C_1 = 100$ и $C_2 = 170$ (каждая из этих вариант расположена в середине соответствующего вариационного ряда).

Указания к составлению таблицы 8.

Произведение частоты n_{uv} на варианту u, т.е. $n_{uv} \cdot u$ записывают в правом верхнем углу клетки, содержащей частоту; например, в правых верхних углах клеток первой строки записаны произведения $1 \cdot (-2) = -2;\ 1 \cdot (-1) = -1;$

– складывают все числа, помещенные в правых верхних углах одной строки, и их сумму помещают в клетку этой строки «столбца U»;

– умножают варианту v на U и полученное произведение записывают в соответствующую клетку «столба vU»; например, в первой строке таблицы v = -2, U = -3, следовательно, vU = (-2). (-3) = 6;

– сложив все числа «столбца vU», получают сумму: $\sum vU = \sum n_{uv} u \cdot v = 17.$

Для контроля расчета аналогичные вычисления производят по столбцам.

Таблица 8

v \ u	-2	-1	0	1	n_v	$U=\sum n_{uv} \cdot u$	vU
-2	1 $\boxed{-2}$ $\boxed{-2}$	1 $\boxed{-1}$ $\boxed{-2}$			2	-3	6
-1	1 $\boxed{-2}$ $\boxed{-1}$	4 $\boxed{-4}$ $\boxed{-4}$	1 $\boxed{0}$ $\boxed{-1}$		6	-6	6
0		2 $\boxed{-2}$ $\boxed{0}$	5 $\boxed{0}$ $\boxed{0}$	1 $\boxed{1}$ $\boxed{0}$	8	-1	0
1			1 $\boxed{0}$ $\boxed{1}$	1 $\boxed{1}$ $\boxed{1}$	2	1	1
2				2 $\boxed{2}$ $\boxed{4}$	2	2	4
n_u	2	7	7	4	n=20		
$V=\sum n_{uv} \cdot v$	-3	-6	0	5			$\sum v \cdot U=17$
$u \cdot V$	6	6	0	5		$\sum u \cdot V=17$	

Найдем $\bar{u}$ и $\bar{v}$:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u \cdot u}{n} = \frac{2\cdot(-2)+7\cdot(-1)+7\cdot 0+4\cdot 1}{20} = -0{,}35,$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_v \cdot v}{n} = \frac{2\cdot(-2)+6\cdot(-1)+8\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 2}{20} = -0{,}2\,.$$

Найдем вспомогательные величины $\overline{u^2}$ и $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2} = \frac{\sum n_u \cdot u^2}{n} = \frac{2\cdot 4+7\cdot 1+7\cdot 0+4\cdot 1}{20} = 0{,}95,$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum n_v \cdot v^2}{2} = \frac{2\cdot 4 + 6\cdot 1 + 8\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 4}{20} = 1{,}2$$

Найдем $\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = \sqrt{0{,}95 - (-0{,}35)^2} \approx 0{,}91,$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2} = \sqrt{1{,}2 - (-0{,}2)^2} \approx 1{,}08.$$

Найдем искомый выборочный коэффициент корреляции:

$$r_b = \frac{\sum n_{uv} uv - n \cdot \overline{u} \cdot \overline{v}}{n \cdot \sigma_u \cdot \sigma_v} = \frac{17 - 20\cdot(-0{,}35)\cdot(-0{,}2)}{20\cdot 0{,}91\cdot 1{,}08} \approx 0{,}79\ .$$

Найдем $\overline{x}$ и $\overline{y}$, учитывая, что $C_1 = 100$, $C_2 = 170$, $h_1 = 4$, $h_2 = 6$:

$$\overline{x} = \overline{u}h_1 + C_1 = -0{,}35\cdot 4 + 100 = 98{,}6,$$
$$\overline{y} = \overline{v}h_2 + C_2 = -0{,}2\cdot 6 + 170 = 168{,}8.$$

Найдем σ_x и σ_y:

$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u = 4\cdot 0{,}91 = 3{,}64,$$
$$\sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v = 6\cdot 1{,}08 = 6{,}48.$$

Подставим найденные величины в уравнение (7.5), получим искомое уравнение прямой линии регрессии Y на X:

$$\overline{y}_x - 168{,}8 = 0{,}79\cdot\frac{6{,}48}{3{,}64}\cdot(x - 98{,}6),$$
$$\overline{y}_x - 168{,}8 = 1{,}41(x - 98{,}6).$$

Или окончательно:

$$y = 1{,}41x - 29{,}77.$$

Задача 3. На основании следующих данных построить производственную функцию Кобба-Дугласа (n = 10):

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**
Yi	349	366	375	397	417
Ki	661	721	784	847	911
Li	90,6	92	93,4	94,5	95,6
Год	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	438	450	474	498	535
Ki	979	1051	1124	1201	1281
Li	96,8	97,6	98,1	99	99,7

Здесь **Yi** – производственный национальный доход (млрд руб.), **Ki** – среднегодовые основные производственные фонды (млрд руб.), **Li –** среднегодовая численность занятых в материальном производстве (млн чел.). Имеется прогноз на 1997 год: основных производственных фондов 1361 млн руб. и трудовых ресурсов 100,4 млн чел.

На основании полученной производственной функции сделать точечный прогноз национального дохода на 1997 год.

Решение. Вычислим нужные значения, для чего составим расчетную таблицу.

y_i	$\ln y_i$	k_i	$\ln k_i$	$\ln^2 k_i$	$\ln k_i \cdot \ln y_i$
3,8521	1,3486	7,2958	1,9873	3,9494	2,6801
3,9783	1,3808	7,8370	2,0589	4,2389	2,8430
4,0150	1,3900	8,3940	2,1275	4,5263	2,9573
4,2011	1,4353	8,9630	2,1931	4,8097	3,1478
4,3619	1,4729	9,5293	2,2544	5,0822	3,3205
4,5248	1,5096	10,1136	2,3139	5,3541	3,4930
4,6107	1,5284	10,7684	2,3766	5,6483	3,6324
4,8318	1,5752	11,4577	2,4387	5,9471	3,8414
5,0303	1,6155	12,1313	2,4958	6,2290	4,0319
5,3661	1,6801	12,8485	2,5532	6,5190	4,2897
Сумма:	14,9364	---	22,7994	52,3038	34,2371

$$\overline{\ln y} = \frac{14{,}9365}{10} = 1{,}4937, \quad \overline{\ln k} = \frac{22{,}7993}{10} = 2{,}2799,$$

$$\overline{\ln^2 k} = \frac{52{,}3038}{10} = 5{,}2304, \quad \overline{\ln k \cdot \ln y} = \frac{34{,}2371}{10} = 3{,}4237.$$

Составляется система:

$$\begin{cases} \ln A + 2{,}2799 \cdot \alpha = 1{,}4937 \\ 2{,}2799 \cdot \ln A + 5{,}2304 \cdot \alpha = 3{,}4237 \end{cases}$$

из системы $\alpha = \dfrac{\overline{\ln y} \cdot \overline{\ln k} - \overline{\ln y \cdot \ln k}}{(\overline{\ln k})^2 - \overline{\ln^2 k}} = 0{,}5663,$

$$\ln A = \overline{\ln y} - \overline{\ln k} \cdot \alpha = t = 0{,}2025,$$

$$A = e^t = 1{,}2245.$$

Запишем функцию в виде $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$ и сделаем прогноз, подставив в формулу $K = K_{1997}$ и $L = L_{1997}$.

Для K = 1361 и L = 100,4 получим Y = 538,034

Задача 4. Имеются данные, характеризующие прибыль промышленного предприятия за девять кварталов:

Год	**1995**				**1996**				**1997**
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1
Прибыль, тыс. руб.	243	251	265	270	282	299	327	343	355

Требуется: 1. Рассчитать характеристики скорости и интенсивности изменения ряда: базисные и цепные абсолютные приросты, базисные и цепные темпы роста и прироста.

2. Вычислить средние характеристики изменения прибыли: средний абсолютный прирост, средний темп роста, средний темп прироста.

3. Выдвинуть гипотезу о наличии тренда в исходном ряду. При построении трендовой модели необходимо выбрать два регрессионных уравнения из представленного ниже набора функциональных зависимостей и найти методом наименьших квадратов оценки их параметров:

$$X(t) = a_0 + a_1 \cdot t\,;\ X(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2\,;\ X(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}\,;$$

$$X(t) = a_0 \cdot e^{a_1 \cdot t}\,;\ X(t) = a_0 \cdot t^{a_1}\,.$$

4. По полученным трендовым моделям вычислить значения анализируемого показателя за рассматриваемый период времени. Найти остатки $l_i = X(t_i) - x_i$, дисперсию остатков σ^2. Выбрать трендовую модель, наилучшим образом отражающую тенденции показателей.

5. С помощью трендовой модели получить прогнозные значения прибыли на 2 и 3 кварталы 1999 года.

Характеристики ряда представлены в табличном виде: x_i – прибыль; $\Delta x_{iб}$ – базисные, $\Delta x_{iц}$ – цепные абсолютные приросты; $T_{iб}$ – базисные, $T_{iц}$ – цепные темпы роста; $\Delta T_{iб}$ – базисные, $\Delta T_{iц}$ – цепные темпы прироста.

x_i	$\Delta x_{iб}$	$\Delta x_{iц}$	$T_{iб}$	$\Delta T_{iб}$	$T_{iц}$	$\Delta T_{iц}$
243	---	---	---	---	---	---
251	8	8	103,29%	3,29%	103,29%	3,29%
265	22	14	109,05%	9,05%	103,29%	3,29%
270	27	5	111,11%	11,11%	101,89%	1,89%

282	39	12	116,05%	16,05%	104,44%	4,44%
299	56	17	123,05%	23,05%	106,03%	6,03%
327	84	28	134,57%	34,57%	109,36%	9,36%
343	100	16	141,15%	41,15%	104,89%	4,89%
355	112	12	146,09%	46,09%	103,50%	3,50%

Средний абсолютный прирост составляет $\overline{\Delta} = 13,25$, средний темп роста $T_{ср}$ = 104,49%, средний темп прироста $\Delta T_{ср}$ = 4,49%.

Выберем за единицу времени квартал, а за начало отсчета первый квартал 1995 года. Из вычисленных характеристик ряда видно, что с течением времени прибыль предприятия быстро увеличивается, поэтому в качестве трендовой модели выберем квадратическое и экспоненциальное уравнения регрессии.

По методу наименьших квадратов параметры квадратичной регрессии $X(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + \bar{t} \cdot a_1 + \overline{t^2} \cdot a_2 = \overline{X} \\ \bar{t} \cdot a_0 + \overline{t^2} \cdot a_1 + \overline{t^3} \cdot a_2 = \overline{tX} \\ \overline{t^2} \cdot a_0 + \overline{t^3} \cdot a_1 + \overline{t^4} \cdot a_2 = \overline{t^2X} \end{cases}$$

где $\overline{t^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^k$, (k = 1, 2, 3, 4);

$\overline{t^kX} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^k \cdot X_i$, (k = 0, 1, 2); t_i = i, (i=1,...,n,).

В задаче n = 9,тогда t=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Вычислив коэффициенты, запишем систему:

$$\begin{cases} a_0 + 5 \cdot a_1 + 31{,}667 \cdot a_2 = 292{,}777 \\ 5 \cdot a_0 + 31{,}667 \cdot a_1 + 225 \cdot a_2 = 1561{,}333 \\ 31{,}667 \cdot a_0 + 225 \cdot a_1 + 1703{,}667 \cdot a_2 = 10277{,}333 \end{cases}$$

Решив систему, получим уравнение регрессии:

$$X(t)=236{,}574+5{,}408t+0{,}9209t^2$$

Далее находим значения прибыли по уравнению регрессии:

X(1) = 242,9029, X(2) = 251,0736, X(3) = 261,0861,

X(4) = 272,9404, X(5)=286,6365, X(6) = 302,1744,

X(7) = 319,5541, X(8) = 338,7756, X(9)=359,8389.

Вычислим отклонения прибыли от значений, полученных по уравнению регрессии: $l_i = X(t_i) - x_i$,

l_1= -0,0971, l_2= 0,0736, l_3= -3,9139, l_4= 2,9404,
l_5= 4,6365, l_6= 3,1744, l_7= -7,4459, l_8= 4,2244,
l_9= 4,8389.

t	$X\cdot t$	$X\cdot t^2$	X(t)	l
1	243	243	242,9029	-0,0971
2	502	1004	251,0736	0,0736
3	795	2385	261,0861	-3,9139
4	1080	4320	272,9404	2,9404
5	1410	7050	286,6365	4,6365
6	1794	10764	302,1744	3,1744
7	2289	16023	319,5541	-7,4459
8	2744	21952	338,7756	-4,2244
9	3195	28755	359,8389	4,8389
45	14052	92496	2634,983	-0,0175

Дисперсия остатков вычисляется по формуле:

$$S_l^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i\right)^2 .$$

В данном случае дисперсия составляет S_l^2 =19,0319.

Коэффициенты экспоненциального уравнения регрессии $X(t) = a_0 \cdot e^{a_1 \cdot t}$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \ln a_0 + \bar{t} \cdot a_1 = \overline{\ln X} \\ \bar{t} \cdot \ln a_0 + \overline{t^2} \cdot a_1 = \overline{t \cdot \ln X} \end{cases}$$

где $\overline{\ln X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$, $\overline{t \cdot \ln X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \ln X_i$.

Подставив соответствующие значения, имеем:

$$\begin{cases} \ln a_0 + 5 \cdot a_1 = 5{,}67098 \\ 5 \cdot \ln a_0 + 31{,}667 \cdot a_1 = 28{,}6855 \end{cases}$$

Решив систему, получим уравнение регрессии: $X(t) = 236{,}5 \cdot e^{0.0476 \cdot t}$.

Аналогично находим значения прибыли по уравнению регрессии $X(t_i)$, остатки l_i:

X(t)	238,1228	250,231448	262,956	276,32735	290,379	304,3367	320,6615	336,9674	353,9608
l	-4,87725	-0,7685519	-2,0441234	6,32735	8,37877	5,336744	-6,33848	-6,03264	-1,03924

и их дисперсию: $S_l^2 = 32{,}4562$.

Дисперсия остатков квадратичного уравнения регрессии меньше дисперсии остатков экспоненциального уравнения регрессии, поэтому выбираем первое уравнение, как наиболее адекватно отражающее зависимость прибыли предприятия от времени.

Поскольку 2 и 3-й кварталы 1998 года соответствуют значению времени t = 14 и 15, то прогнозируемая прибыль, вычисленная по квадратичному уравнению регрессии, равна 492,7 и 524,9 млн руб. соответственно.

Задача 5:Множественная корреляция.

Предполагается, что основными показателями, влияющими на величину прибыли предприятия, являются вложенные средства и число рабочих. Приводятся данные за 7 кварталов:

Год	1995				1996		
Квартал	1	2	3	4	1	2	3
Вложенные средства	128,15	140,25	135,85	142,45	154,55	157,85	155,65
Число рабочих	66	72	72	78	84	96	102
Среднегодовая норма прибыли предприятия, %	29,7	43,6	37,8	47,3	64,2	73	66,4

Требуется:

1. Найти все коэффициенты парной корреляции $\mathbf{r}_{XY}$, $\mathbf{r}_{YZ}$, $\mathbf{r}_{XZ}$ и проанализировать тесноту линейной зависимости между всеми парами переменных.

2. Выдвинуть гипотезы о виде статистической зависимости нормы прибыли Z от количества рабочих Y и вложенных средств X. Предлагается выбрать следующие функциональные зависимости: $Z = a + b \cdot X + c \cdot Y$ – линейную, $Z = e^{a+b \cdot X}$ – экспоненциальную, $Z = a \cdot X^b$ – степенную. Методом наименьших квадратов найти оценки неизвестных параметров уравнений регрессий.

3. Сравнивая среднеквадратические отклонения случайных возмущений и коэффициенты детерминации $\mathbf{R}_{XY}$, $\mathbf{R}_{YZ}$, $\mathbf{R}_{XZ}$, выбрать регрессионную модель, наиболее адекватно отображающую зависимость нормы прибыли от рассматриваемых факторов.

4. Методом наименьших квадратов найти оценки неизвестных параметров трендовых моделей: $X = a + b \cdot t$ – линейная, $X = a \cdot t^b$ – степенная, $Y = a + \dfrac{b}{t}$ – гиперболическая, $Y = a \cdot e^{b*t}$ – экспоненциальная. Сравнивая дисперсии случайной ошибки, выбрать те трендовые модели, которые наиболее адекватно отражают зависимости **X** от **t** и **Y** от **t**. Найти прогнозные значения для **X** и **Y** на первый квартал 1997 года.

5. На основе выбранной в пункте 3 регрессионной модели найти прогнозное значение нормы прибыли **Z** при возможных значениях **X** и **Y** в первом квартале 1997 года.

Коэффициенты парной корреляции вычисляются по формуле: $r_{XY} = \dfrac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{S_X \cdot S_Y} \cdot \dfrac{n}{n-1}$, где $\mathbf{S}_X$, $\mathbf{S}_Y$ – корень квадратный из исправленных выборочных дисперсий $\mathbf{S}^2_X$, $\mathbf{S}^2_Y$, которые вычисляются по формуле:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}.$$

$\overline{XY}$ =11922,9, $\overline{X}$ =144,9643, $\overline{Y}$ =81,42857, S_x =11,3, S_y =13,4. Подставим эти значения в формулу и вычислим $\mathbf{r}_{xy}$. Аналогично вычисляются $\mathbf{r}_{YZ}$, $\mathbf{r}_{XZ}$. Коэффициенты детерминации $\mathbf{R}_{XY} = \mathbf{r}^2_{XY}$, $\mathbf{R}_{YZ} = \mathbf{r}^2_{YZ}$, $\mathbf{R}_{XZ} = \mathbf{r}^2_{XZ}$.

Используя данные из условия задачи, получим значения $\mathbf{r}_{XY}$ = 0,9174, $\mathbf{r}_{YZ}$=0,9258, $\mathbf{r}_{XZ}$= 0,9945. Поскольку все значения коэффициентов парной корреляции являются близкими к единице, то можно предположить, что между переменными существует линейная зависимость.

По методу наименьших квадратов коэффициенты множественной линейной регрессии определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a + \overline{X} \cdot b + \overline{Y} \cdot c = \overline{Z} \\ \overline{X} \cdot a + \overline{X^2} \cdot b + \overline{XY} \cdot c = \overline{XZ} \\ \overline{Y} \cdot a + \overline{XY} \cdot b + \overline{Y^2} \cdot c = \overline{YZ} \end{cases}$$

Подставив соответствующие значения, получим:

$$\begin{cases} a + 144{,}96428 \cdot b + 81{,}42857 \cdot c = 51{,}71423, \\ 144{,}96428 \cdot a + 2112{,}13679 \cdot b + 11922{,}9 \cdot c = 7653{,}47, \\ 81{,}4285 \cdot a + 11922{,}9 \cdot b + 6783{,}42857 \cdot c = 4383{,}42857. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим a и подставим его в два других:

$$\begin{cases} a = 51{,}71486 - 144{,}96429 \cdot b - 81{,}42857 \cdot c, \\ 144{,}9642 \cdot (51{,}71486 - 144{,}96429 \cdot b - 81{,}4287 \cdot c) + \\ + 21124{,}13679 \cdot b + 1192{,}9 \cdot c = 7653{,}47, \\ 81{,}42857(51{,}71486 - 144{,}96429 \cdot b - 81{,}42857 \cdot c) + \\ + 11922{,}9 \cdot b + 6783{,}42857 \cdot c = 4383{,}42587; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 51{,}71486 - 144{,}96429 \cdot b - 81{,}42857 \cdot c, \\ 109{,}492656 \cdot b + 118{,}66531 \cdot c = 156{,}74551, \\ 118{,}66531 \cdot b + 152{,}1816 \cdot c = 172{,}408 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 118,6653, а третье на 109,9265 и вычтем третье из второго. Получим:

-2650,81•c = -277,733, отсюда c = 0,0456. Подставим это значение во второе уравнение, получим b = 1,31824,а из первого найдем a = -147,8978.

Полученные значения подставим в линейное уравнение:

Z = -147,8978 + 1,31824•X +0,10456•Y.

Вычислим значения нормы прибыли по уравнению регрессии, определим ошибки:

$Z_{iâ}$	27,935616	44,51368	38,71342	48,04117	64,61923	70,22414	67,95138
$Z_i - Z_{iâ}$	1,764384	-0,91368	-0,91342	-0,74117	-0,41923	2,775856	-1,55138
$(Z_i - Z_{iâ})^2$	3,1130509	0,834811	0,834343	0,54933	0,175755	7,705377	2,406767

Найдем среднеквадратическое отклонение ошибок по формуле $S=\sqrt{\dfrac{(Z_i-Z_{iâ})^2}{n-1}}$

S_1= 1,61346.

Коэффициенты экспоненциального уравнения регрессии $Z = e^{a+b\cdot X}$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a+\overline{X}\cdot b=\overline{\ln Z} \\ \overline{X}\cdot a+\overline{X^2}\cdot b=\overline{X\ln Z} \end{cases},$$

где $\overline{\ln Z}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln Z_i$, $\overline{X\ln Z}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\ln Z_i$.

X_i	128,15	140,25	135,85	142,45	154,55	157,85	155,65
Z_i	29,7	43,6	37,8	47,3	64,2	73	66,4
$\ln Z_i$	3,391147	3,775057	3,632309	3,85651	4,162003	4,290459	4,195697056
$X_i\cdot\ln Z_i$	434,5755	529,4518	49,4492	549,3599	643,2376	677,249	653,0602468

Используя данные из таблицы, вычисляем $\overline{X\ln Z}$ =568,59143, $\overline{\ln Z}$ =3,90023, $\overline{X}=144{,}96425$, $\overline{X^2}=21124{,}13679$.

Подставив значения в систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} a+144{,}96428\cdot b=3{,}90023, \\ 144{,}96428\cdot a+\ 21124{,}13679\cdot b\ =\ 568{,}626178; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3{,}90023-144{,}96428\cdot b, \\ 144{,}96428(3{,}90023-144{,}96428\cdot b,)+21124{,}13679\cdot b=568{,}626178; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3{,}90023-144{,}96428\cdot b, \\ 565{,}3940338-21014{,}64248\cdot b+21124{,}13679\cdot b=568{,}626178; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0{,}0295188, \\ a=-0{,}378946. \end{cases}$$

Вычислив коэффициенты, получим уравнение регрессии:

$$Z = å^{-0,378946\ +0,0295188\ \cdot õ}.$$

$Z_{iв}$	30,0808	42,9942	37,7574	45,87898	65,57435	72,28355	67,7389
$Z_i - Z_{iв}$	-0,3808	0,60578	0,042543	1,42102	-1,374345	0,7164499	-1,33853
$(Z_i - Z_{iв})^2$	0,145034	0,366968	0,0018099	2,019298	1,888825	0,513301	1,791675

Исправленное среднеквадратическое отклонение ошибок для данного уравнения $S_2 = 1,0588$

Система уравнений для определения коэффициентов степенного уравнения регрессии $Z = a \cdot X^b$ имеет вид:

$$\begin{cases} \ln a + \overline{\ln X} \cdot b = \overline{\ln Z} \\ \overline{\ln X} \cdot \ln a + \overline{(\ln X)^2} \cdot b = \overline{\ln X \cdot \ln Z} \end{cases},$$

где $\overline{(\ln X)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i)^2$, $\overline{\ln X \cdot \ln Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \cdot \ln Z_i$.

X_i	140,25	128,15	135,85	142,45	154,55	157,85	155,65
Z_i	43,6	29,7	37,8	47,3	64,2	73	66,4
$\ln X_i$	4,943427	4,853201	4,911551	4,958991	5,040518	5,061645	5,047609897
$(\ln X_i)^2$	24,43747	23,55356	24,12334	24,59159	25,40682	25,62025	25,47836567
$\ln Z_i$	3,775057	3,391147	3,632309	3,85651	4,162003	4,290459	4,195697056
$\ln X_i \cdot \ln Z_i$	18,66172	16,45792	17,84027	19,1244	20,97865	21,71678	21,17824199

Подставив вычисленные в таблице данные в формулы, получим: $\overline{(\ln X)^2}$ =24,74449, $\overline{\ln X \cdot \ln Z}$ =19,42142, $\overline{\ln X}$ =4,9738

Подставляя вычисленные значения, получим систему:

$$\begin{cases} \ln a + 4,97385 \cdot b = 3,90023, \\ 4,97385 \cdot \ln a + 24,74449 \cdot b = 19,42142; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln a = 3,90023 - 4,97385 \cdot b \\ 4,97385(3,90023 - 4,97385 \cdot b) + 24,74449 \cdot b = 19,42142; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln a = 3,90023 - 4,97385 \cdot b \\ 19,3992 - 24,73915 \cdot b + 24,74449 \cdot b = 19,42142; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln a = 3,90023 - 4,97385 \cdot b, \\ b = 4,161049; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4,161049, \\ \ln a = -16,7962; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4{,}161049, \\ a = 5{,}078 \cdot 10^{-8}. \end{cases}$$

Определив коэффициенты, получим уравнение регрессии:

$$Z = 5{,}078 \cdot 10^{-8} \cdot \tilde{O}^{4{,}19397}$$

Вычислим Z по найденной формуле и найдем ошибки:

$Z_{iв}$	29,9105857	43,53841	38,1303	46,45147	65,21206	71,20458	67,16521757
$Z_i - Z_{iв}$	0,04434636	0,003794	0,109097	0,719996	1,024264	1,79542	0,58555793
$(Z_i - Z_{iв})^2$	0,0019666	1,44E-05	0,011902	0,518395	1,049116	3,2235	0,34287809

Исправленное среднеквадратическое отклонение ошибок для данного уравнения: S_3=0,92626.

Коэффициенты детерминации составляют $\mathbf{R}_{XY}$= 0,8416**,** $\mathbf{R}_{YZ}$= 0,8571**,** $\mathbf{R}_{XZ}$= 0,989.

Поскольку самое большое значение принимает $\mathbf{R}_{XZ}$, то можно считать, что на норму прибыли **Z** большее влияние оказывает фактор **X** – вложенные средства, а фактор **Y** – количество рабочих незначительно влияет на **Z**. Это видно и из линейного уравнения регрессии: коэффициент при **Y** близок к нулю, поэтому можно выбрать уравнение регрессии, связывающее только переменные **X** и **Z**. Так как у экспоненциального уравнения исправленное среднеквадратическое отклонение ошибок S_2 больше, чем у степенного S_3, то выбираем последнее уравнение, как наиболее адекватно отражающее зависимость нормы прибыли от рассматриваемых факторов.

Системы уравнений, полученные по методу наименьших квадратов, для параметров трендовых моделей имеют вид:

а) для линейной $X = a + b \cdot t$: $\begin{cases} a \cdot \bar{t} \cdot b = \overline{X} \\ \bar{t} \cdot a + \overline{t^2} \cdot b = \overline{t \cdot X} \end{cases}$,

где $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$, $\overline{t^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2$, $\overline{t \cdot X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot X_i$.

Параметр $\mathbf{t}_i$ принимает целые значения от 1 до 7.

X_i	128,15	140,25	135,85	142,45	154,55	157,85	155,65
t_i	1	2	3	4	5	6	7
t_i^2	1	4	9	16	25	36	49
$t_i \cdot X_i$	128,15	280,5	407,55	569,8	772,75	947,1	1089,55

Подставляя данные таблицы в формулы, вычислим: $\overline{t} = 4$, $\overline{t^2} = 20$, $\overline{t \cdot X}$ =599,34285.

Подставляя вычисленные значения, получаем систему:

$$\begin{cases} a + 4 \cdot b = 144{,}96429, \\ 4 \cdot a + 20 \cdot b = 599{,}34285; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 144{,}96429 - 4 \cdot b, \\ 4(144{,}96429 - 4 \cdot b) + 20 \cdot b = 599{,}34285; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 144{,}96429 - 4 \cdot b, \\ 579{,}85716 - 16 \cdot b = 599{,}34285; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4{,}87142, \\ a = 125{,}4786. \end{cases}$$

б) для степенной $X = a \cdot t^b$: $\begin{cases} \ln a + \overline{\ln t} \cdot b = \overline{\ln X} \\ \overline{\ln t} \cdot \ln a + \overline{(\ln t)^2} \cdot b = \overline{\ln t \cdot \ln X} \end{cases}$,

где $\overline{\ln t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln t_i$, $\overline{(\ln t)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\ln t_i)^2$, $\overline{\ln t \cdot \ln X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln t_i \cdot \ln X_i$.

X_i	28,115	140,25	135,85	142,45	154,55	157,85	155,65
$\ln t_i$	4,853201	4,943427	4,911551	4,958991	5,040518	5,061645	5,047609897
t_i	1	2	3	4	5	6	7
$\ln t_i$	0	0,693147	1,098612	1,386294	1,609438	1,791759	1,945910149
$(\ln t_i)^2$	0	0,480453	1,206949	1,921812	2,59029	3,210402	3,786566308
$\ln t_i \ln t_i$	0	3,426522	5,395891	6,874621	8,1124	9,069251	9,822195327

Подставим данные из таблицы в формулы, получим:

$\overline{\ln t}$ =1,21788, $\overline{(\ln t)^2}$ =1,8852, $\overline{\ln t \cdot \ln X}$ =6,09967. Подставляя эти значения, получим систему:

$$\begin{cases} \ln a + 1{,}21788 \cdot b = 4{,}9738, \\ 1{,}21788 \cdot \ln a + 1{,}8852 \cdot b = 6{,}09967; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln a = 4{,}9738 - 1{,}21788 \cdot b, \\ 1{,}21788(4{,}9738 - 1{,}21788 \cdot b) + 1{,}8852 \cdot b = 6{,}09967; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln a = 4{,}9738 - 1{,}21788 \cdot b \\ 6{,}05749 - 1{,}4832 \cdot b + 1{,}8852 \cdot b = 6{,}09967; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0{,}149, \\ \ln a = 4{,}9738 - 1{,}21788 \cdot 0{,}1049; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0{,}149, \\ a = 127{,}23. \end{cases}$$

в) для гиперболической $Y = a + \dfrac{b}{t}$: $\begin{cases} a + \overline{\left(\dfrac{1}{t}\right)} \cdot b = \overline{Y} \\ \overline{\left(\dfrac{1}{t}\right)} \cdot a + \overline{\left(\dfrac{1}{t^2}\right)} \cdot b = \overline{\left(\dfrac{Y}{t}\right)} \end{cases}$,

где $\overline{\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i}$, $\overline{\left(\dfrac{1}{t^2}\right)} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{t_i^2}$, $\overline{\left(\dfrac{Y}{t}\right)} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{Y_i}{t_i}$,

$1/t_i$	1	0,5	0,333333	0,25	0,2	0,166667	0,142857143
$1/t_i^2$	1	0,25	0,111111	0,0625	0,04	0,027778	0,020408163
Y_i / t_i	66	36	24	19,5	16,8	16	14,57142857

Подставим вычисленные значения в формулы. Получим:

$\overline{\left(\dfrac{1}{t}\right)} = 0{,}37041$, $\overline{\left(\dfrac{1}{t^2}\right)} = 0{,}21597$, $\overline{\left(\dfrac{Y}{t}\right)} = 27{,}55306$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a + 0{,}37041 \cdot b = 81{,}42857, \\ 0{,}37041 \cdot a + 0{,}21597 \cdot b = 27{,}55306; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 81{,}42857 - 0{,}37041 \cdot b, \\ 0{,}37041(81{,}42857 - 0{,}37041 \cdot b) + 0{,}21597 \cdot b = 27{,}55306; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 81{,}42857 - 0{,}37041 \cdot b, \\ 30{,}16196 - 0{,}1372 \cdot b + 0{,}21597 \cdot b = 27{,}55306; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -33{,}12048, \\ a = 93{,}69673. \end{cases}$$

г) для экспоненциальной $Y = a \cdot e^{b \cdot t}$: $\begin{cases} \ln a + \bar{t} \cdot b = \overline{\ln Y} \\ \bar{t} \cdot \ln a + \overline{t^2} \cdot b = \overline{t \cdot \ln Y} \end{cases}$,

где $\overline{t \cdot \ln Y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \ln Y_i$.

Yi	66	72	72	78	84	96	102
$\ln Y_i$	4,189655	4,276666	4,276666	4,356709	4,430817	4,564348	4,624972813
$t_i \cdot \ln Y_i$	4,189655	8,553332	12,83	17,42684	22,15408	27,38609	32,37480969

Подставим вычисленные значения в формулы, получим: $\overline{\ln Y}$ =4,38855, $\overline{t \cdot \ln Y}$ =17,84497, $\bar{t} = 4$, $\overline{t^2} = 20$. Система примет вид:

$$\begin{cases} \ln\ a + 4 \cdot b = 4{,}38855, \\ 4 \cdot \ln\ a + 20 \cdot b = 17{,}84497; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln\ a = 4{,}38855 - 4 \cdot b, \\ 4 \cdot (4{,}38855 - 4 \cdot b) + 20 \cdot b = 17{,}84497; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln\ a = 4{,}38855 - 4 \cdot b, \\ 17{,}5542 - 16 \cdot b + 20 \cdot b = 17{,}84497; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0{,}07269, \\ \ln\ a = 4{,}09778; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0.07269, \\ a = 60.20631. \end{cases}$$

Определив коэффициенты систем и решив их, получим уравнения трендовых моделей:

$$X_1 = 125{,}4786 + 4{,}87142 \cdot t, X_2 = 127{,}23 \cdot t^{0{,}1049},$$

$$Y_1 = 93{,}69673 - \frac{33{,}12048}{t}, \ Y_2 = 60{,}2 \cdot å^{0{,}07269 \cdot t}.$$

Далее вычисляются значения трендовых моделей и отклонения наблюдаемых значений от вычисленных. Исправленные дисперсии случайных отклонений трендовых моделей равны соответственно $\sigma^2_{X_1}$ = 16,9976, $\sigma^2_{X_2}$ = 19,43697, $\sigma^2_{Y_1}$ = 77,4867, $\sigma^2_{Y_2}$ = 6.718. Выбираем те модели, у которых меньшие дисперсии: $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{Y}_2$. По этим уравнениям определим прогнозные значения количества рабочих **Y** и вложенных средств **X**. Первому кварталу 1997 года соответствует значение **t** = 9. Получим $\mathbf{X}_1(9)$ = 169,32%, $\mathbf{Y}_2(9)$ = 115,8%. По линейному уравнению множественной регрессии определим прогнозное значение нормы прибыли предприятия **Z** = 95,1%.

11. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Для установления корреляционной зависимости между величинами X и Y (где Y – случайная величина, X – неслучайная величина) проведены эксперименты, результаты которых представлены в таблице.

Требуется:

I. Найти условные средние $\overline{y}_i$ и построить эмпирическую линию регрессии Y по X (ломаную).

II. Найти уравнение регрессии Y по X методом наименьших квадратов и затем построить ее на одном чертеже с эмпирической линией регрессии.

III. Оценить тесноту корреляционной зависимости Y по X.

IV. Проверить адекватность уравнения регрессии Y по X.

№ 1

x_i	10	20	30	40	50
y_{ij}	212	258	282	316	370
	220	258	290	330	330
	251	285	325	334	350
	270	314	326	361	375
	292	325	343	370	380

№ 2

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_{ij}	187	208	225	255	295
	150	192	225	245	988
	162	208	234	265	270
	210	238	266	295	320
	234	278	300	332	321

№ 3

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	30,6	55	10,89	11,39	11,39
	49,2	55	11,43	12,62	14,19
	30,6	55	9,65	11,06	14,80
	49,2	55	9,65	10,16	15,01
	30,6	35	10,94	12,35	15,07
	49,2	35	11,23	13,53	14,01

№ 4

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	30,6 49,2 30,6 49,2 30,6 49,2	55 55 35 35 35 35	11,06 10,16 12,35 13,53 10,79 10,24	9,65 9,65 10,94 11,23 9,40 9,13	8,01 8,10 9,13 10,90 8,70 8,10

№ 5

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	0,27 0,25 0,21 0,33 0,24	0,23 0,25 0,30 0,31 0,37	0,31 0,27 0,26 0,24 0,22	0,32 0,29 0,33 0,32 0,33	0,81 0,65 0,50 0,63 0.60

№ 6

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	0,23 0,25 0,28 0,28 0,29	0,25 0,30 0,31 0,27 0,27	0,33 0,32 0,32 0,32 0,28	0,81 0,65 0,50 0,63 0,62	1,33 1,40 0,95 1,42 0,96

№ 7

x_i	1	2	3	4	5	6
y_{ij}	12 12 10 14 13	11 11 12 12 9	6 8 6 6 7	6 4 6 3 6	11 12 10 10 11	15 13 16 14 14

№ 8

x_i	5	7	10	12	15
y_{ij}	92,7 91,5 88,7 88,4	53 62 32 37	42 51 64 97	81 82,3 75 71	92,7 81,8 88,7 93,4

№ 9

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	9,83 5,0 3,33 3,16 1,83	4,16 5,83 6,33 6,66 4,5	9,16 3,33 10,0 8,33 8,33	7,5 9,16 4,16 8,33 5,83	9,16 10,0 7,5 8,4 7,8

№ 10

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	146,9 129,59 132,57 169,18	98,44 67,53 84,0 86,75	43,55 67,53 50,02 33,80	27,78 16,82 13,38 13,14	16,82 13,38 18,33 13,14

№ 11

x_i	12	14	16	18	20
y_{ij}	0,6 0,44 0,93 0,52	1,28 1,01 1,58 0,93	4,18 5,11 5,76 6,57	6,57 6,87 6,78 7,42	4,56 4,41 4,04 4,89

№ 12

x_i	11	13	15	17	19
y_{ij}	4,56 4,89 4,57 4,59	3,32 2,07 2,23 3,76	1,89 1,71 1,28 1,28	1,28 1,87 1,04 1,58	1,02 1,08 1,09 0,91

№ 13

x_i	90	100	110	120	130
y_{ij}	1,7 1,54 1,1 2,0 1,78	1,9 1,73 1,22 2,22 2,0	2,1 1,91 1,35 2,47 2,21	2,2 2,0 1,42 2,58 2,31	3,1 4,2 5,8 2,9 3,2

№ 14

x_i	90	100	110	120	130
y_{ij}	2,0	2,22	2,47	2,58	2,58
	1,78	2,0	2,21	2,31	2,31
	1,26	1,41	1,56	1,63	2,10
	1,41	1,58	1,74	1,83	2,02
	1,31	1,46	1,62	1,69	1,93
	1,06	1,19	1,31	1,37	1,72

№ 15

x_i	90	100	110	120	130
y_{ij}	11,8	9,4	8,0	7,3	7,8
	14,3	11,1	8,3	7,8	7,3
	23,7	19,2	16,9	14,5	11,0
	10,3	8,8	5,5	5,7	5,0

№ 16

x_i	90	100	110	120	130
y_{ij}	10,3	8,8	5,5	5,7	7,7
	12,8	10,6	9,6	6,4	6,7
	21,0	15,3	12,1	10,2	8,8
	18,8	14,3	11,0	9,8	9,8
	22,0	20,9	14,3	12,1	10,01

№ 17

x_i	1	2	3	4	5	6
y_{ij}	75	75	90	110	100	120
	75	75	90	120	110	130
	90	99	100	130	120	140
	100	99	100	150	140	150
	100	100	110	150	150	170

№ 18

x_i	1	2	3	4	5	6
y_{ij}	6,8	9,8	13,6	11,9	14,2	16,3
	3,3	4,1	9,3	6,4	11,2	16,2
	5,4	5,6	17,4	10,1	17,3	22,0
	13,3	14,7	24,6	18,4	22,5	32,7

№ 19

x_i	1	2	3	4	5	6
y_{ij}	14,2	20,3	27,1	18,8	28,2	20,6
	9,6	13,4	17,9	12,4	19,2	15,3
	7,4	10,2	13,6	9,6	14,8	14,2
	6,1	8,1	10,8	7,5	12,1	11,1

№ 20

x_i	8	10	14	16	20	24
y_{ij}	13,9	20,3	27,1	18,8	27,7	15,9
	9,5	13,4	17,9	12,4	19,0	14,2
	7,3	10,2	13,6	9,4	14,7	12,9
	6,0	8,1	10,8	7,5	12,1	10,4

№ 21

x_i	1	2	3	10	12
y_{ij}	0,95	0,81	1,26	31,5	20,6
	0,95	0,84	1,55	25,6	24,2
	0,95	0,89	1,65	20,6	20,2
	0,95	0,90	1,94	19,4	19,8
	0,77	0,79	1,46	36,6	18,7
	0,77	0,8	1,5	24,8	16,1

№ 22

x_i	1	2	3	12	15
y_{ij}	0,77	0,89	1,68	21,0	15,0
	0,77	0,9	2,04	20,4	14,6
	0,7	0,68	1,23	30,7	17,1
	0,7	0,7	1,63	26,9	13,2
	0,7	0,72	1,81	22,7	17,1
	0,7	0,73	1,97	19,7	12,0

№ 23

x_i	30	40	50	60	70
y_{ij}	1,2	1,1	1,1	1,0	0,9
	2,3	2,0	1,8	1,5	0,8
	3,0	2,5	1,8	1,6	0,7
	0,9	0,9	0,9	0,9	0,7

№ 24

x_i	10	20	30	40	50
y_{ij}	1,2 2,0 2,2 0,9	1,1 1,7 2,0 0,9	1,1 1,4 1,6 0,9	1,0 1,1 1,4 0,9	0,9 0,9 0,8 0,7

№ 25

x_i	20	40	60	80	100
y_{ij}	1,2 2,0 2,5 0,9	1,1 1,6 1,8 0,9	1,1 1,2 1,3 0,9	1,0 1,1 1,2 1,0	1,0 1,1 0,8 0,9

№ 26

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	0,65 0,7 0,75 0,81 0,7	0,9 0,9 0,9 0,9 0,9	0,92 0,97 0,98 0,99 0,86	0,99 0,86 0,93 0,96 0,97	0,7 0,75 0,80 0,85 0,7

№ 27

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	14,9 12,2 10,0 8,6 16,9	18,1 15,4 13,6 10,1 15,2	18,8 16,4 30,9 23,6 19,7	13,4 28,8 22,7 18,3 16,2	8,8 16,6 12,8 10,4 8,8

№ 28

x_i	2	4	6	8	10
y_{ij}	0,8 0,85 0,9 0,95 0,8	0,9 0,9 0,9 1,8 1,6	0,96 0,98 0,99 0,97 0,98	2,5 1,8 1,6 3,0 2,8	3,4 3,2 2,8 3,5 2,5

№ 29

x_i	10	15	20	25	30
y_{ij}	4,6	11,5	20,1	11,5	8,9
	5,8	14,5	19,2	14,5	9,9
	5,8	14,5	18,2	13,5	7,2
	4,6	11,5	20,1	14,5	6,2
	5,0	12,0	20,1	13,5	7,8

№ 30

x_i	1	2	3	4	5
y_{ij}	0,17	1,22	1,35	2,5	6,7
	0,15	1,0	1,40	2,4	6,0
	0,14	1,21	1,58	2,3	7,0
	0,17	1,2	1,40	2,5	7,0
	0,16	0,9	1,58	2,3	6,8

Задание 2.

Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X.

№ 1

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
67	- 201	82	- 237	78	- 226	90	- 269
68	- 199	70	- 209	75	- 218	95	- 279
70	- 206	83	- 243	82	- 245	88	- 259
76	- 221	80	- 239	85	- 247	86	- 251
80	- 238	76	- 221	68	- 201	71	- 207
87.	- 256	81	- 238	72	- 215	87	- 257
75	- 222	80	- 238	71	- 209	77	- 227
79	- 230	76	- 223	72	- 212	73	- 214
79	- 234	70	- 207	68	- 203	82	- 243
73	- 217	79	- 237	86	- 252	74	- 214
86	- 253	74	- 216	85	- 251	67	- 196
78	- 228	77	- 228	71	- 206	82	- 239
79	- 230	65	- 193	72	- 214	72	- 210
67	- 201	80	- 234	76	- 227	74	- 221
79	- 237	79	- 229				

№ 2

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
48	99	61	128	52	112	50	105
40	83	42	88	32	67	49	99
52	106	55	117	48	97	54	113

50	107	52	110	40	82	45	99
39	79	44	94	40	81	36	75
47	100	41	82	46	92	41	91
38	80	47	97	41	90	46	101
46	96	43	91	54	110	38	83
47	98	55	118	48	96	44	89
44	97	43	87	53	110	35	79
45	92	49	104	47	97	47	99
44	90	42	89	50	102	44	93
53	108.	31	71	46	101	57	120
52	107	40	86	56	112	53	107
45	96	47	97	42	93	51	108
42	86	43	89	41	84	48	100
45	98	48	101	55	112	46	92
45	97	44	93	40	80	43	89

№ 3

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
90	192	92	186	95	195	92	189
83	171	79	158	97	207	81	169
81	162	82	176	83	182	92	201
83	175	103	211	97	208	93	196
86	178	93	188	79	161	108	229
87	185	89	194	91	193	78	169
90	185	93	188	85	186	98	201
85	189	91	186	90	187	99	210
99	214	83	174	89	185	90	191
91	192	104	211	91	193	93	193
92	189	95	199	80	169	92	195
98	201	97	204	86	190	76	169
87	178	100	204	90	199	90	193
89	179	92	187	91	192	90	190
108	225	92	184	90	193	87	177
82	180	84	175	92	191	85	186
79	159	93	205	84	174	88	185
93	200	98	197	77	156	103	211
91	195	97	199	88	190	91	190
98	203	104	218	89	183	94	200
90	182	84	177				

№ 4

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
16	96	13	75	12	66	14 14	86

16	86	16	80	15	84	16	86
16	96	15	92	14	71	16	80
13	68	17	86	16	86	15	80
16	92	15	77	14	85	15	88
10	54	16	99	13	78	13	74
16	81	17	94	13	75	17	86
15	89	17	104	17	97	14	80
14	78	16	86	12	67	13	79
13	71	12	74	15	83	15	92
12	77	13	75	13	74	14	77
13	79	13	84	15	93	14	81
15	81	14	88	19	109	16	87
14	81	12	67	17	99	11	71
13	66	14	78	15	76.	13	81
14	85	16	87	15	77	15	76
17	92	13	74	14	70	13	77
13	68	19	107	16	92	16	95
18	104	14	76	15	79	15	78
15	83	17	102	17	101	16	99
13	81	13	79	15	93	15	78
17	102	16	86	13	74	15	94
15	92	11	70				

№ 5

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
39	242	34.	215	27	165	29	181
36	235	31	198	31	196	32	206
35	228	34	209	2.8	183	31	205
20	136	36	225	30	196	27	174
31	204	19	132	38	229	41	252
41	249	34	218	34	205	44	274
24	160	28	174	35	221	22	142
22	140	30	197	22	143	33	200
38	229	24	162	38	242	38	236
35	213	17	104	28	181	30	184
26	172	27	175	30	199	30	186
34	207	29	176	36	225	31	205
16	98	33	203	32	201	28	178
35	225	32	210	26	159	27	166
22	141	30	188	26	163		

№ 6

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
93	298	83	251	90	279	87	261
88	281	87	273	89	270	88	271
91	283	91	284	81	261	85	270
83	254	87	266	87	276	83	268
89	271	87	265	88	266	88	266
86	260	91	280	89	278	88	282
85	262	86	274	89	268	89	273
88	275	93	286	82	265	92	284
85	265	89	278	86	276	88	267
87	277	85	269	84	262	90	274
82	256	87	268	86	258	91	288
91	280	87	269	92	295	84	264
86	263	88	264	92	280	82	261
86	264	84	263	80	243	83	263
87	279						

№ 7

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
89	542	89	544	88	536	90	546
89	549	91	564	90	549	92	568
89	550	88	535	90	542	90	555
90	556	90	559	91	546	90	544
89	550	91	564	88	545	86	519 -
90	540	90	555	90	556	90	550
91	553	88	545	88	546	89	550
88	544	89	535	87	527	89	537
89	541	89	543	92	559	88	528
90	556	90	554	89	545	90	553
89	541	89	548	88	530	90	551
90	552	91	553	90	542	90	553
89	548	89	536	89	547	88	535
89	534	90	553				

№ 8

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
32	177	40	212	34	180	35	181
40	201	39	208	34	180	34	187
36	189	28	142	33	177	42	218
40	213	39	196	31	159	27	145
36	180	28	143	33	182	41	206
34	185	32	162	42	223	40	204

33	177	40	200	26	130	32	172
35	175	37	191	43	224	40	219
36	189	30	163	38	205	36	197
43	229	32	177	40	205	32	173
29	153	34	187	33	181	40	211
41	208	40	208	29	147	33	177
44	221	40	213	38	202	36	187
36	186	36	196	39	210	32	179
37	185	36	199				

№ 9

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
70	702	70	715	72	721	72	729
72	739	73	730	77	788	78	785
75	760	71	712	75	755	76	777
68	699	71	716	70	719	71	711
68	688	69	700	72	434	78	780
71	713	71	722	72	725	77	784
69	700	66	662	70	717	74	755
71	719	74	752	76	779	67	684
69	706	76	765	80	800	70	706
68	696	78	798	65	662	75	756
68	696	74	746	70	710	67	678
69	703	79	797	70	718	79	808
75	755	78	787	70	702	75	756
83	838	72	737	80	804	67	683
73	748	70	708	65	655	74	741
71	715	75	753	72	739	69	696
82	831	77	775	70	707	70	705
69	709	68	695	75	752	71	719
73	734	68	697	69	702	74	751
73	736	71	713	73	747	68	682
72	736	72	730	73	744		

№ 10

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
58	122	63	133	62	138	72	151
62	138	68	148	62	137	61	137
65	137	64	144	66	141	58	1.31
61	133	70	154	73	160	63	128
66	132	63	140	70	151	65	148
67	143	67	153	64	131	70	151
67	137	65	148	69	141	58	130

65	131	71	150	70	157	62	138
62	142	64	145	59	121	66	140
68	138	62	124	65	145	64	137
64	143	64	135	65	149	64	137
55	114	72	160	64	137	64	140
68	136	66	135	64	130	64	147
64	130	63	139	63	144	67	148
63	143	67	151	68	148	64	140
64	137	59	123	67	145	65	145
67	138	69	139	63	131	67	149
69	140	67	134	63	143	75	158
70	153	69	148	68	145	63	130
68	152	64	129	77	158	60	137
69	153	64	130	62	138	73	159
68	149	65	144	59	123	73	150
70	158	65	147	67	152	66	138
63	126	61	128	63	139		

№ 11

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
37	159	41	182	4S	176	40	169
39	174	31	127	39	173	35	147
30	133	44	191	34	138	24	115
32	137	38	159	36	154	37	160
40	173	28	126	31	133	42	168
34	145	42	181	29	125	38	153
33	150	31	132	41	182	35	159
40	162	26	116	27	109	38	162
38	157	32	140	27	124	32	146
35	140	31	143	37	154	38	154
37	157	40	163	38	157	37	167
35	149	31	126	47	198	41	182
26	114	34	139	40	176	33	139
29	118	45	185	33	149	32	128
37	166	36	161	36	154	42	178
31	134	38	153	36	150	28	129
38	154	35	150	41	179	44	178
38	159	32	129	41	172	42	180
33	151	37	157	35	150	35	142
36	144	40	161	39	169	33	136
37	158	31	134	33	133	35	141
48	202						

№ 12

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
17	117	15	9.7	16	107	16	110
16	103	18	112	16	113	17	121
17	108	16	98	16	111	16	96
16	102	18	114	17	120	18	112
15	91	18	113	18	127	15	98
17	110	15	99	16	100	16	111
17	111	18	121	17	110	17	120
16	111	17	103	14	86	19	128
17	109	18	120	17	110	15	99
16	96	15	95	15	101	16	98
16	96	17	116	18	110	15	95
18	108	17	116	17	112	18	127
15	97	16	112	16	99	15	96
16	108	18	117	18	108	16	106
16	102	16	104	15	90	15	108
17	109	18	121				

№ 13

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
28	298	29	308	27	270	30	301
29	291	30	310	30	304	32	338
30	301	30	308	29	295	31	318
28	283	32	326	28	293	30	216
32	337	30	305	30	307	30	306
31	311	30	316	32	332	30	318
29	306	29	308	30	302	30	304
30	307	31	328	30	309	31	320
28	293	30	300	29	303	30	306
29	291	29	299	30.	303	29	294
29	307	29	290	27	283	30	305
30	306	29	293	32	324	30	312
29	298	30	303	30	303	29	304
30	310	29	303	29	297	29	300
29	292	28	294	31	310	28	284
30	311	29	309	29	309	30	304
28	298	29	302	30	303	30	303
30	315	27	286	29	299	30	307
29	303	27	274	30	303	29	304
31	329	28	289	29	293	30	316
29	309	32	336	31	328	29	307
30	306	29	297	31	310	28	289
29	292	31	327	30	315	30	301
29	297	33	343	30	306	29	297

№14

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
47	482	52	529	56	576	50	510
49	504	47	479	48	487	55	556
50	513	53	532	52	522	50	506
50	500	57	580	50	507	49	494
52	526	48	491	51	521	53	541
49	493	51	516	51	527	52	521
49	505	46	465	53	540	55	561
54	552	57	578	49	506	51	519
50	503	50	507	50	515	54	556
52	529	53	539	51	511	50	503
54	546	51	510	59	598	56	563
58	590	55	566	52	522	54	547
55	550	53	533	51	515	50	516
49	491	51	528	52	521	48	496
55	567	54	549	51	527	54	548
50	512	53	537	52	524	59	606
51	512	48	492	51	526	52	534
56	564	54	546	52	531	57	586
50	515	51	527	47	486	54	554
53	538	50	500	54	558	52	537-
49	492	55	559				

№ 15

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
42	299	41	295	34	247	45	316
52	373	41	289	53	374	41	295
46	325	36	254	41	296	30	216
39	277	39	273	50	354	43	302
54	383	32	224	21	148	45	322
41	291	45	320	51	359	57	399
47	331	46	331	40	284	35	254
34	240	36	260	46	323	48	345
62	435	40	281	50	355	58	408
46	327	52	373	48	337	34	239
35	251	36	252	28	198	39	279
43	310	56	401	55	386	52	372
21	152	41	288	60	420	42	298
44	310	41	296	48	342	40	287
28	198	37	265	45	320	49	343
52	365	52	371	47	329	42	302
59	416	43	306	40	283	33	240

59	413	41	296	58	414	45	322
50	353	42	294	57	400	52	369
57	404	53	377	35	252	38	273
58	409	41	293	34	238	43	302
41	288	24	174	43	301	45	323
41	288	48	337	33	239	38	272
43	310	48	340	33	233	41	287

№ 16

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
13.	71	17	87	13	60	20	96
11	62	16	70	16	78	15	64
18	91	17	80	15	65	16	74
13	60	16	67	22	95	16	69
15	79	17	68	14	69	10	40
21	85	13	67	15	77	15	61
17	79	18	86	12	49	23	102
13	54	14	57	12	62	15	63
16	71	13	67	11	49	17	70
13	67	11	48	16	76	17	83
19	90	15	60	17	70	17	76
17	81	10	51	15	77	19	86
15	61	15	63	14	72	16	73
12	54	14	67	13	57	11	52
17	77	9	54	17	70	13	5?
20	82	19	85	15	64	17	87
17	72	18	87	14	61	20	88
18	91	15	61	12	67	19	85
17	81	15	71	12	51		

№ 17

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
25	233	49	443	43	392	52	473
47	432	22	201	27	245	43	392
42	385	48	440	49	445	49	442
38	347	30	274	35	323	39	356
30	274	29	261	36	331	42	386
30	276	29	270	15	140	37	338
32	294	38	345	33	303	30	277
38	348	37	334	27	247	27	247
34	315	55	498	43	387	18	170
34	307	38	342	47	426	42	380
41	377	27	250	33	304	24	221

37	338	44	403	28	257	31	287
39	353	48	434	41	377	27	244
36	332	35	320	59	535	34	313
34	307	35	318	23	208	24	219
29	264	28	256	39	357	43	392
31	285	39	358	37	337	46	415
41	377	38	347	49	447	37	341
15	137	35	318	26	238	35	321
27	245	40	369	20	182	28	255
46	421	44	400	48	437	22	206
34	313	30	277	32	292	35	324
39	359	43	395				

№ 18

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
76	304	89	364	81	326	80	325
85	340	78	318	84	338	85	344
77	315	87	353	80	326	77	312
74	303	83	332	83	338	85	340
83	341	82	331	88	361	77	313
73	297	83	332	79	317	93	373
77	316	84	341	81	325	78	313
78	318	81	324	81	332	74	298
85	348	91	364	83	339	78	312
82	329	85	343	90	368	86	351
81	325	80	320	73	300	75	307
85	349	86	345	80	323	79	317
79	320	84	345	75	303	93	372
83	337	88	355	77	313	84	339
81	330	87	356	80	320	82	337
87.	357	82	333	85	341	85	343
84	337	85	347	83	338	80	328
80	321	77	310	90	362	75	305
81	328	79	320	84	343	83	341
81	324	81	329	78	315	75	309
74	303	90	366	76	303	71	284

№ 19

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
59	420.	61.	435	63	460	62	444
71	509	63	457	65	462	62	437
61	435	59	422	64	456	64	458
67	469	64	454	68	485	64	453

62	449	63	458	70	490	62	443
62	450	62	449	57	409	56	410
61	437	68	486	65	472	65	473
59	422	65	468	69	502	66	464
65	463	68	478	62	436	64	458
63	455	65	463	65	.457	61	431
65	472	62	441	66	475	62	434
62	448	68	491	66	474	69	486
62	443	64	450	62	452	65	465
65	462	60	432	60	435	62	439
67	484	64	453	64	465	66	466
63	442	67	478	60	431	63	453
58	419	68	481	60	432	57	408
64	456	62	438	63	446	55	396
64	451	67	487				

№ 20

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
48	200	52	216	65	269	60	246
46	188	65	261	70	281	54	224
62	249	65	265	58	232	67	277
63	261	49	196	70	287	57	237
51	213	69	276	63	258	66	265
61	253	55	229	60	249	58	236
62	252	47	192	77	311	63	261
56	230	61	246	63	261	58	234
50	204	53	212	49	199	70	282
54	225	58	237	59	242	59	239
53	220	68	273	65	262	62	255
47	192	48	192	65	267	51	204
66	273	52	214	61	244	61	245
58	236	52	212	64	260	71	286

№ 21

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
40	209	40	212	41	224	40	219
40	201	39	204	40	213	40	204
42	214	41	224	.41	216	41	205
41	222	42	223	40	213	40	217
42	210	41	215	41	209	41	217
41	219	42	214	42	225	40	202
40	208	40	2i0	42	219	41	219
41	208	41	207	40	215	39	213

41	206	42	215	40	214	41	219
39	200	40	203	41	223	41	208
38	209	41	207	40	209	40	201
39	202	40	212	41	220	41	216
42	212	42	226	41	205	39	212
40	206	40	204	40	212	41	217
40	216	42	221	41	218	40	216
41	220	41	220	39	210		

№ 22

X	У	X	Y	X	Y	X	Y
7	23	6	19	6	20	11	42
11	38	5	18	10	37	9	35
10	34	10	31	14	47	12	45
4	16	10	31	12	42	10	32
11	42	13	43	6	25	7	30
12	44	15	49	6	22	8	32
9	33	6	26	8	28	9	30
5	18	11	42	6	26	9	34
8	29	10	31	6	25	11	36
13.	42	14	45	13	46	13	42
12	39	8	28	11	42	9	27
10	36	14	49	9	32	9	29
9	27	6	23	10	36	10	38
9	30	16	57	8	31	13	41
11	36	8	29	12	43	7	21
9	31	6	23	14	44	9	32
10	38	8	25	14	49	8	27
10	35	8	32	7	28	16	53
13	45	7	25	16	50	12	42
15	48	8	29	11	34	15	50
4	18	10	36	11	40	13	39
9	30	12	39	12	42	11	37
14	50						

№ 23

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
72	152	69	140	71	149	75	159
72	152	70	145	73	148	73	152
73	155	73	155	69	139	75	152
68	144	68	140	73	147	80	164
71	145	70	144	68	139	71	151
77	155	69	145	67	135	75	158

74	154	71	150	69	139	79	164
67	136	71	142	80	168	76	153
68	142	71	142	77	157	73	152
71	147	65	139	74	149	65	137
74	153	67	137	78	161	70	141
69	145	68	144	68	137	66	141
69	143	66	139	73	153	68	143
81	168	71	144	64	131	74	156
68	143	72	148	67	139	74	151
67	134	66	134	67	143	71	149
76	152	72	151	70	144	70	140
67	139	73	150	67	142	73	146
68	141	67	134	67	137	70	147
69	146	75	155	74	153	75	157
70	146	66	139	66	139	63	130
69	142	73	150	65	136	68	136

№ 24

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
46	279	57	342	56	338	68	415
40	245	45	274	48	297	47	282
58	354	55	336	44	268	40	242
35	212	46	277	49	294	35	210
58	323	53	320	50	309	60	360
47	285	45	278	46	284	37	227
40	240	43	266	46	276	41	248
60	361	48	294	47	289	46	284
39	235	50	308	39	234	46	278
41	246	44.	271	49	298	53	320
58	357	38	228	44	264	43	260
59	361	68	414	49	302	53	321
57	343	54	325	53	323	54	328
65	390	57	348	44	272	50	304
34	208	34	211	47	284	45	278
50	301	59	356	51	315	50	303
45	277	57	350	56	340	25	159
50	306	57	350	39	236	44	266
55	334	49	301	46	285	54	331

№ 25

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
45	-177	38	-145	53	-204	41	-162
38	-146	34	-135	29	-110	40	-151

58	-226	44	-172	40	-152	30	-111
46	-184	47	-181	41	-161	38	-143
40	-152	65	-259	44	-167	51	-201
41	-155	34	-133	28	-109	45	-180
58	-230	42	-161	48	-186	43	-167
41	-155	48	-189	53	-203	44	-176
51	-199	54	-208	26	-99	46	176
59	-227	55	-220	43	-168	59	-234
62	-244	50	-191	42	-159	42	-163
44	-172	37	-141	68	-266	43	-166
47	-184	43	-163	42	-159	49	-188
43	-170	47	-188	60	-237	34	-130
47	-183	44	-170	56	-222	54	-215
55	-218	51	-203	39	-147	49	-191
61	-240	51	-204	47	-188	44	-176
47	-180	48	-186	55	-211	43	-170
58	-232	43	-172	35	-138	42	-161
40	-158	64	-255	41	-157	59	-232
47	-183	53	-207	47	-183	42	-163
46	-184	43	-168	56	-217	39	-150
42	-162	45	-174	42	-167	33	-123
50	-198	43	-172	53	-208	64	-256
45	-171						

№ 26

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
67	207	75	225	62	195	68	208
57	171	68	207	71	220	71	220
82	246	65	201	67	205	76	231
62	191	80	241	66	207	77	234
57	172	71	219	67	201	73	225
83	255	61	183	70	215	65	198
69	213	77	239	64	197	70	217
86	261	69	209	66	206	74	225
66	203	64	201	78	241	73	224
79	242	68	208	65	197	77	237
82	248	52	159	63	196	77	236
73	221	59	183	69	216	49	154
65	195	63	197	59	180	63	189
55	172	56	176	71	214	71	222
61	186	62	192	59	185	69	214
64	197	67	204	64	196	52	160
59	182						

№ 27

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
46	50	59	59	56	62	58	62
55	57	57	60	52	58	57	57
57	61	48	52	42	46	46	49
55	58	41	47	48	50	54	63
51	51	57	57	60	63	67	72
62	70	50	57	62	64	60	64
43	43	64	67	46	47	53	53
64	71	43	45	51	59	57	65
56	64	57	62	69	76	41	45
65	67	54	56	60	60	58	61
56	63	50	51	57	61	43	45
51	58	59	66	62	65	55	57
58	60	48	51	58	66	40	43
42	47	45	54	54	60	67	74
4J5	54	51	53	57	63	57	57
54	60	40	41	44	45	48	54
62	67	59	65	55	62	56	57
57	58	46	54	50	54	57	65
68	68	47	52	63	67	73	79
47	56	55	59	44	48	54	56
69.	74	49	55	51	60	57	66
65	72	64	70	47	55	63	67

№ 28

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
77	619	74	605	67	549	72	583
76	626	77	632	69	568	66	529
62	505	69	554	66	530	80	647
83	680	72	594	71	568	72	585
83	673	76	612	71	574	68	561
79	637	69	556	77	628	76	619
77	629	84	679	78	631	81	667
81	649	77	629	77	631	69	567
71	568	72	582	67	542	83	667
83	669	76	611	73	587	77	634
73	591	78	626	67	542	69	565
81	648	87	703	83	681	81	664
82	663	79	650	67	544	65	528
77	616	80	655	76	616	71	579
82	672	70	577	71	579	69	564
83	677	80	657	74	604	85	688

80	655	75	613	73	594	81	656
77	619	69	557	75	601	72	578
69	568	77	619	80	659	84	675
78	624						

№ 29

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
73	-291	57	-219	61	-241	68	-264
69	-270	71	-281	62	-243	62	-240
72	-279	66	-262	63	-245	70	-277
72	-282	76	-302	71	-282	70	-279
65	-254	70	-275	65	-252	65	-253
67	-264	68	-267	70	-276	70	-275
56	-216	74	-290	70	-276	63	-248
70	-276	68	-266	63	-246	63	-243
63	-248	69	-270	73	-284	67	-264
64	-253	71	-283	68	-271	68	-267
70	-276	60	-237	59	-227	55	-213
67	-262	56	-222	64	-256	56	-218
60	-234	71	-281	79	-309	58	-223
63	-243	68	-269	77	-300	70	-278
80	-313	66	-257	78	-310	59	-236
71	-278	60	-235	66	-255	68	-263
74	-292	70	-275	63	-252	69	-268
68	-271	69	-276	69	-274	63	-243
65	-256	72	-282	74	-291	70	-271
73	-291	70	-277				

№ 30

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
31	318	23	231	28	284	31	316
28	280	28	288	26	265	25	251
30	305	26	269	29	298	27	278
23	234	26	267	26	264	26	268
25	255	28	284	23	232	27	273
25	258	27	277	27	272	28	280
25	258	25	253	29	292	24	244
27	272	26	268	24	245	24	243
31	317	27	270	27	274	26	269
25	252	28	289	25	256	25	255
28	280	27	278	29	291	22	229
25	258	29	295	29	290	27	272
30	304	24	246	25	257	26	263

28	289	23	238	25	258	24	249
28	288	27	279	30	309	25	252
31	317	27	273	25	257	22	229

Задание 3. На основании следующих данных построить производственную функцию Кобба-Дугласа:

№ 1

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	124	130	133	141	148	156	160	168	177	190
Ki	235	256	279	301	324	348	373	399	427	455
Li	32,2	32,7	33,2	33,6	34,0	34,4	34,7	34,9	35,2	35,4

№ 2

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	113	119	121	129	135	142	146	153	161	173
Ki	214	233	254	274	295	317	340	364	389	415
Li	29,3	29,8	30,2	30,6	31,0	31,3	31,6	31,8	32,1	32,3

№ 3

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	129	135	139	147	154	162	166	175	184	198
Ki	244	267	290	313	337	362	388	415	444	473
Li	33,5	34,0	34,5	34,9	35,3	35,8	36,1	36,3	36,6	36,9

№ 4

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	148	155	159	168	177	186	191	201	211	227
Ki	280	306	332	359	386	415	446	477	509	543
Li	38,4	39,0	39,6	40,1	40,5	41,0	41,4	41,6	42,0	42,3

№ 5

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	138	145	148	157	165	173	178	187	197	212
Ki	261	285	310	335	360	387	416	444	475	507
Li	35,8	36,4	36,9	37,4	37,8	38,3	38,6	38,8	39,1	39,4

№ 6

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	168	176	181	191	210	211	217	228	240	258
Ki	318	347	377	408	439	471	506	541	578	617
Li	43,6	44,3	45,0	45,5	46,0	46,6	47,0	47,2	47,7	48,0

№ 7

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	157	165	169	179	188	197	202	213	224	241
Ki	297	324	353	381	410	440	473	506	540	576
Li	40,8	41,4	42,0	42,5	43,0	43,5	43,9	44,1	44,5	44,9

№ 8

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	192	201	206	218	229	241	248	261	274	294
Ki	364	397	431	466	501	539	578	618	661	705
Li	49,8	50,6	51,4	52,0	52,6	53,3	53,7	54	54,5	54,8

№ 9

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	174	182	187	198	208	218	224	236	248	267
Ki	330	359	391	422	454	488	524	560	599	639
Li	45,2	45,9	46,6	47,1	47,7	48,3	48,7	48,9	49,4	49,7

№ 10

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	217	228	233	247	259	272	280	295	310	333
Ki	411	448	487	527	566	609	653	699	747	796
Li	56,3	57,2	58,1	58,8	59,4	60,2	60,7	61	61,6	62

№ 11

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	223	234	240	254	266	280	288	303	318	342
Ki	422	461	501	541	582	626	672	718	767	819
Li	57,9	58,8	59,7	60,4	61,1	61,9	62,4	62,7	63,3	63,7

№ 12

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	238	250	256	271	284	299	307	323	340	365
Ki	451	492	535	578	621	668	717	767	819	874
Li	61,8	62,7	63,7	64,4	65,2	66,0	66,6	66,9	67,5	68

№ 13

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	246	258	264	280	294	309	317	334	351	377
Ki	466	508	553	597	642	690	741	792	847	903
Li	63,9	64,8	65,8	66,6	67,4	68,2	68,8	69,1	69,8	70,3

№ 14

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	251	263	270	286	300	315	324	341	358	385
Ki	475	519	564	609	655	704	756	808	864	921
Li	65,2	66,2	67,2	68,0	68,8	69,6	70,2	70,6	71,2	71,7

№ 15

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	267	280	287	304	319	335	344	363	381	409
Ki	506	552	600	648	697	749	804	860	919	980
Li	69,3	70,4	71,5	72,3	73,1	74,1	74,7	75,1	75,7	76,3

№ 16

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	275	288	295	313	329	345	355	373	392	422
Ki	521	568	618	667	718	771	828	886	946	1009
Li	71,4	72,5	73,6	74,5	75,3	76,3	76,9	77,3	78,0	78,6

№ 17

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	283	297	304	322	338	355	365	384	404	434
Ki	536	585	636	687	739	794	852	911	974	1039
Li	73,5	74,6	75,7	76,6	77,5	78,5	79,1	79,5	80,3	80,8

№ 18

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	296	310	318	337	354	371	382	402	422	454
Ki	561	612	665	718	773	830	891	953	1019	1086
Li	76,8	78,0	79,2	80,1	81,1	82,1	82,8	83,2	84,0	84,6

№ 19

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	305	320	328	347	364	383	393	414	435	468
Ki	578	630	685	740	796	856	918	982	1050	1119
Li	79,2	80,4	81,6	82,6	83,5	84,6	85,3	85,7	86,5	87,1

№ 20

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	312	327	335	35	373	392	402	424	445	478
Ki	591	645	701	757	814	875	940	1005	1074	1145
Li	81,0	82,2	83,5	84,5	85,5	86,5	87,3	87,7	88,5	89,1

№ 21

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	326	342	350	371	390	409	420	443	465	500
Ki	617	673	732	791	851	914	982	1050	1122	1197
Li	84,6	85,9	87,2	88,3	89,3	90,4	91,2	91,6	92,5	93,1

№ 22

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	334	350	359	380	399	419	431	454	477	512
Ki	633	690	750	811	872	937	1006	1076	1149	1226
Li	86,7	88,0	89,4	90,4	91,5	92,6	93,4	93,9	94,7	95,4

№ 23

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	3	358	366	388	407	428	440	463	487	523
Ki	646	704	766	828	890	957	1027	1098	1173	1252
Li	88,5	89,9	91,3	92,3	93,4	94,6	95,4	95,9	96,7	97,4

№ 24

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	353	370	379	402	422	443	455	479	504	541
Ki	669	729	793	857	921	990	1063	1137	1215	1296
Li	91,6	93,1	94,5	95,6	96,7	97,9	98,7	99,2	100,1	100,8

№ 25

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	368	386	395	419	440	462	474	500	525	564
Ki	697	760	827	893	961	1032	1108	1185	1266	1351
Li	95,5	97,0	98,5	99,6	100,8	102,1	102,9	103,4	104,4	105,1

№ 26

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	379	397	407	431	453	476	489	515	541	581
Ki	718	783	851	920	989	1063	1141	1221	1304	1391
Li	98,4	99,9	101,4	102,6	103,8	105,1	106,0	106,5	107,5	108,3

№ 27

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	384	403	413	437	459	482	495	522	548	589
Ki	727	793	863	932	1002	1077	1156	1237	1321	1409
Li	99,7	101,2	102,8	104	105,2	106,5	107,4	107,9	108,9	109,7

№ 28

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	392	411	421	446	468	492	505	532	559	601
Ki	742	810	881	951	1023	1100	1180	1262	1349	1439
Li	101	103	104	106,1	107	108	109,6	110,2	111,2	112

№ 29

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	397	416	427	452	474	498	512	539	566	609
Ki	752	820	892	963	1036	1114	1196	1279	1366	1457
Li	103,1	104,7	106,2	107,5	108,7	110,1	111,0	111,6	112,6	113,4

№ 30

Год	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
Yi	400	419	430	455	478	502	516	543	571	613
Ki	758	826	899	971	1044	1122	1205	1288	1377	1468
Li	103,8	105,4	107,0	108,3	109,6	110,9	111,9	112,4	113,5	114,3

Здесь **Yi** – производственный национальный доход (млрд руб.), **Ki** – среднегодовые основные производственные фонды (млрд руб.), **Li –** среднегодовая численность занятых в материальном производстве (млн чел.). Имеется прогноз на 1997 год: основных производственных фондов K_{1996}·1,0N млн руб. и трудовых ресурсов L_{1996}·1,0N, где N=01, 02, …, 30 (номер а) млн чел. На основании полученной производственной функции сделать точечный прогноз национального дохода на 1997 год.

Задание 4. Имеются данные, характеризующие прибыль промышленного предприятия за девять кварталов:

Год	1995				1996				1997
Кв	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	243	251	265	270	282	299	327	343	355
2	234	241	255	261	272	288	315	330	342
3	247	255	269	274	287	304	332	348	361
4	298	308	325	331	346	366	401	421	435
5	231	238	252	256	268	284	311	326	337
6	212	219	231	235	246	261	285	299	310
7	221	228	241	245	256	271	297	312	323
8	263	272	287	292	305	323	354	371	384
9	226	233	246	251	262	278	304	319	330
10	229	236	250	254	266	282	308	323	335
11	268	277	292	297	311	329	360	378	391
12	203	209	221	225	235	249	273	286	296
13	207	214	225	230	240	254	278	292	302
14	237	245	258	263	275	291	319	334	346
15	239	247	260	265	277	294	321	337	349
16	245	253	267	272	284	301	329	345	358
17	251	259	273	279	291	309	337	354	366
18	254	262	277	282	294	312	341	358	371
19	258	266	281	286	299	317	347	364	377
20	265	273	289	294	307	326	356	374	387
21	216	223	235	240	250	265	290	304	315

22	219	226	238	243	254	269	294	309	319
23	274	283	298	304	318	337	368	386	400
24	271	279	285	301	314	333	364	382	396
25	279	288	304	310	323	343	375	393	407
26	277	286	302	307	321	340	372	391	404
27	281	290	306	312	326	345	378	396	410
28	283	292	308	314	328	348	380	399	413
29	285	294	310	316	330	350	383	402	416
30	287	296	313	319	332	353	386	405	418

Требуется:

1. Построить график данного временного ряда.
2. Рассчитать характеристики скорости и интенсивности изменения ряда: базисные и цепные абсолютные приросты, базисные и цепные темпы роста и прироста.
3. Вычислить средние характеристики изменения прибыли: средний абсолютный прирост, средний темп роста и прироста.
4. Выдвинуть гипотезу о наличии тренда в исходном ряду. При построении трендовой модели необходимо выбрать два регрессионных уравнения из представленного ниже набора функциональных зависимостей и найти методом наименьших квадратов оценки их параметров:

$$X(t) = a_0 + a_1 \cdot t\,;\ X(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2\,;\ X(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}\,;$$

$$X(t) = a_0 \cdot e^{a_1 \cdot t}\,;\ X(t) = a_0 \cdot t^{a_1}\,.$$

5. По полученным трендовым моделям вычислить значения анализируемого показателя за рассматриваемый период времени. Найти остатки $l_i = X(t_i) - X_i$, дисперсию остатков σ_l^2. Выбрать трендовую модель, наилучшим образом отражающую тенденции показателя.
6. С помощью выбранной трендовой модели получить прогнозные значения прибыли на 2 и 3-й кварталы 1999 года.

Задание 5. На основе предварительного анализа в качестве основных показателей, определяющих величину прибыли предприятия, приняты вложенные средства (X) и количество рабочих (Y), данные по которым за 1995–1996 гг. приводятся (Z – норма прибыли, %):

№	Год	1995				1996		
	Кв	1	2	3	4	1	2	3
1	X	244	266	258	270	292	298	294
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	9	13	11	14	18	21	19

2	**X**	292,8	319,2	309,6	324	350,4	357,6	352,8
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	11	15	13	16	22	25	23
3	**X**	317,2	345,8	335,4	351	379,6	387,4	382,2
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	11	16	14	18	24	27	24
4	**X**	341,6	372,4	361,2	378	408,8	417,2	411,6
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	12	18	15	19	26	29	26
5	**X**	366	399	387	405	438	447	441
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	13	19	17	21	27	31	28
6	**X**	390,4	425,6	412,8	432	467,2	476,8	470,4
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	14	20	18	22	29	33	30
7	**X**	414,8	452,2	438,6	459	496,4	506,6	499,8
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	8	11	10	12	16	18	16
8	**X**	439,2	478,8	464,4	486	525,6	536,4	529,2
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	8	12	10	13	17	19	17
9	**X**	463,6	505,4	490,2	513	554,8	566,2	558,6
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	9	12	11	13	18	20	18
10	**X**	488	532	516	540	584	596	588
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	9	13	11	14	19	21	19
11	**X**	512,4	558,6	541,8	567	613,2	625,8	617,4
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	10	14	12	15	20	22	20
12	X	536,8	585,2	567,6	594	642,4	655,6	646,8
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	10	14	13	15	20	23	21
13	**X**	561,2	611,8	593,4	621	671,6	685,4	676,2
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	11	15	13	16	21	24	22
14	**X**	585,6	638,4	619,2	648	700,8	715,2	705,6
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	11	16	14	17	22	25	23
15	**X**	610	665	645	675	730	745	735
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	12	16	14	18	23	26	24

16	**X**	634,4	691,6	670,8	702	759,2	774,8	764,4
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	10	14	12	15	19	22	20
17	**X**	658,8	718,2	696,6	729	788,4	804,6	793,8
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	10	14	12	15	20	23	21
18	**X**	683,2	744,8	722,4	756	817,6	834,4	823,2
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	10	15	13	16	21	24	22
19	**X**	707,6	771,4	748,2	783	846,8	864,2	852,6
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	11	15	13	16	22	24	22
20	**X**	732	798	774	810	876	894	882
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	11	16	14	17	22	25	23
21	**X**	756,4	824,6	799,8	837	905,2	923,8	911,4
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	11	16	14	17	23	26	24
22	**X**	780,8	851,2	825,6	864	934,4	953,6	940,8
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	12	17	15	18	24	27	25
23	**X**	805,2	877,8	851,4	891	963,6	983,4	970,2
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	12	17	15	18	25	28	25
24	**X**	829,6	904,4	877,2	918	992,8	1013,2	999,6
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	13	18	16	19	25	29	26
25	X	854	931	903	945	1022	1043	1029
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	13	18	16	20	26	29	27
26	**X**	878,4	957,6	928,8	972	1051,2	1072,8	1058,4
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	13	19	16	20	27	30	28
27	**X**	902,8	984,2	954,6	999	1080,4	1102,6	1087,8
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	14	19	17	21	28	31	28
28	**X**	927,2	1010,8	980,4	1026	1109,6	1132,4	1117,2
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	14	20	17	21	28	32	29
29	**X**	951,6	1037,4	1006,2	1053	1138,8	1162,2	1146,6
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	14	20	18	22	29	33	30

30	**X**	976	1064	1032	1080	1168	1192	1176
	Y	120	130	130	140	150	170	180
	Z	15	21	18	22	30	34	31

Используя исходные данные и предполагая, что тенденции изменения прибыли, наметившиеся в 1995–1996 годах, в основном сохранятся в ближайшее полугодие, требуется:

1. Найти все коэффициенты парной корреляции: $\mathbf{r}_{XY}$, $\mathbf{r}_{YZ}$, $\mathbf{r}_{XZ}$ и проанализировать тесноту линейной связи между всеми парами переменных.

2. Построить поля рассеяния наблюдаемых значений переменных **X**, **Y**, **Z** на основе из визуального анализа выдвинуть гипотезы о виде статистической зависимости нормы прибыли **Z** от вложенных средств **X** и количества рабочих **Y**; записать их в виде математических моделей. В качестве математических моделей предлагается выбрать следующие: $Z = a + b \cdot X + c \cdot Y$ – линейная, $Z = e^{a+b\cdot X}$ – экспоненциальная, $Z = a \cdot X^{b}$ – степенная.

3. На основе применения метода наименьших квадратов найти точечные оценки неизвестных параметров моделей. Сравнивая среднеквадратические отклонения случайных возмущений и коэффициенты детерминации, выбрать регрессионную модель, наиболее адекватно отражающую зависимость нормы прибыли от рассматриваемых факторов.

4. Методом наименьших квадратов найти оценки неизвестных параметров трендовых моделей: $X = a + b \cdot t$ – линейная, $X = a \cdot t^{b}$ – степенная, $Y = a + \dfrac{b}{t}$ – гиперболическая, $Y = a \cdot e^{b\cdot t}$ - экспоненциальная. Сравнивая дисперсии случайных ошибок выбрать те трендовые модели, которые наиболее адекватно отражают зависимости **X** от **t** и **Y** от **t**. Найти точечный прогноз величины **X** и величины **Y** на первый квартал 1997 года.

5. На основе выбранной в пункте 3 регрессионной модели найти точечный прогноз изменения нормы прибыли при возможных изменениях величин **X** и **Y** в первом квартале 1997 года.

12. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИН

1. Что называется функциональной зависимостью?
2. Что называется корреляционной зависимостью?
3. Чем отличается полная корреляция от неполной?
4. Основные задачи теории корреляции.
5. Дать определение регрессии.
6. В виде чего можно представить регрессию?
7. На какие задачи распадается задача отыскания эмпирической формулы?
8. Назовите типы линий, выравнивающих ломаную линию регрессии.
9. В чем заключается метод средних?
10. В чем заключается метод проб?
11. В чем заключается метод выровненных точек?
12. В чем заключается метод наименьших квадратов?
13. Какой величиной оценивается теснота корреляционной зависимости?
14. По какой формуле вычисляется корреляционное отношение?
15. Какие значения может принимать корреляционное отношение?
16. В чем заключается проверка адекватности уравнения?
17. Что называется коэффициентом корреляции?
18. По какой формуле вычисляется выборочный коэффициент корреляции?
19. Какие значения может принимать коэффициент корреляции?
20. Какой формулой описывается производственная функция Кобба-Дугласа?
21. Что называется временным рядом?
22. По каким формулам вычисляются базисные и цепные абсолютные приросты, темпы роста, темпы прироста?
23. По каким формулам вычисляются средний абсолютный прирост, средний темп роста, средний темп прироста?
24. По каким формулам вычисляются коэффициенты парной корреляции?
25. В чем смысл коэффициента детерминации?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Виноградов Ю. С. Математическая статистика и ее применение в текстильной и швейной промышленности. – М.: Легкая индустрия, 1970.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1985.

Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике. – М.; ДИС, 1998.

Карасев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1979.

Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. 2. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование. – М.: Высш.школа, 1982.

Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2000.

Математическая статистика (Иванова В.М., Калинина В.Н., Нешумова Л.А. и др.) – М.: Высш.школа, 1981.

Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979.

Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Высш. шк., 1997.

Экономико-математические методы и прикладные модели, под ред. В.В. Федосеева. – М.: Юнити, 1997.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Критические точки распределения Фишера-Снедекора (K_1 – число степеней свободы большей дисперсии, K_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости α=0,01												
	K_1											
K_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	38,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,96	14,80	14,66	14,54	!4,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,!5	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,72	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67

Окончание приложения

16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,44	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости α=0,05												
	K_1											
K_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Голодная Наталья Юрьевна
Одияко Наталья Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Теория корреляции в экономических расчетах

Часть II

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 5.04.06. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,7.
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 300 экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57