Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Л.С. НИКУЛИНА
Л.Я. ДУБИНИНА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практикум

Часть 2

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2009

ББК 22.11
Н 62

Рецензенты: Н.Н. Одияко, доцент
И.В. Пивоварова, ст. преп.

Никулина, Л.С., Дубинина, Л.Я.
Н 62 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: практикум. Ч. 2. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2009. – 92 с.

Содержит методические указания и контрольные работы по математическому анализу.

Для студентов первого курса очной и заочной форм обучения, изучающих предмет «Математический анализ».

ББК 22.11

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

© Издательство Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Курс математического анализа является фундаментом математического образования, имеющим важное значение для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, а также таких дисциплин, как «Вычислительная математика», «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы», «Эконометрика».

Данное учебно-практическое пособие соответствует учебной программе курса «Математический анализ» для специальности «Вычислительные машины и аппараты» и является продолжением одноименного пособия, предлагаемого студентам первого курса данной специальности в качестве методического руководства для работы над курсом математического анализа.

Студент заочной формы обучения должен выполнить две контрольные работы по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра. Контрольные работы после их выполнения высылаются на проверку в университет в плановые сроки. Без прорецензированных работ студент к экзамену не допускается.

Вариант	Номера задач	
	Контрольная работа №3	Контрольная работа №4
1	1.1,2.1,3.1,4.1,5.1,6.1,7.1.	8.1,9.1,10.1,11.1,12.1,13.1,14.1,15.1,16.1.
2	1.2,2.2,3.2,4.2,5.2,6.2,7.2.	8.2,9.2,10.2,11.2,12.2,13.2,14.2,15.2,16.2.
3	1.3,2.3,3.3,4.3,5.3,6.3,7.3.	8.3,9.3,10.3,11.3,12.3,13.3,14.3,15.3,16.3.
4	1.4,2.4,3.4,4.4,5.4,6.4,7.4.	8.4,9.4,10.4,11.4,12.4,13.4,14.4,15.4,16.4.
5	1.5,2.5,3.5,4.5,5.5,6.5,7.5.	8.5,9.5,10.5,11.5,12.5,13.5,14.5,15.5,16.5.
6	1.6,2.6,3.6,4.6,5.6,6.6,7.6.	8.6,9.6,10.6,11.6,12.6,13.6,14.6,15.6,16.6.
7	1.7,2.7,3.7,4.7,5.7,6.7,7.7.	8.7,9.7,10.7,11.7,12.7,13.7,14.7,15.7,16.7.
8	1.8,2.8,3.8,4.8,5.8,6.8,7.8.	8.8,9.8,10.8,11.8,12.8,13.8,14.8,15.8,16.8.
9	1.9,2.9,3.9,4.9,5.9,6.9,7.9.	8.9,9.9,10.9,11.9,12.9,13.9,14.9,15.9,16.9.
10	1.10,2.10,3.10,4.10,5.10,6.10,7.10.	8.10,9.10,10.10,11.10,12.10,13.10,14.10,15.10,16.10.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1

1.1. Числовые ряды

Пусть задана бесконечная числовая последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$.

Выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется числовым рядом. Числа u_1, $u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются первым, вторым, ..., n-м, … членами ряда; u_n также называется общим членом ряда.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n-ой частичной суммой ряда:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$ то он называется суммой ряда, а ряд называется сходящимся. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то ряд называется расходящимся и суммы не имеет.

1.1.1. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n\ldots$ расходится.

Пример 1.

Решение. Ряд $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0 .$$

Подчеркнём, что рассмотренный признак является только необходимым, но не достаточным, то есть из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ не следует, что ряд сходится.

1.1.2.Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов

Признак сравнения. Пусть даны два знакоположительных числовых ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots \qquad (1.1)$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (1.2)$$

причём $u_n \leq v_n$ при любых n=1,2,….

Тогда: 1) если ряд (1.2) сходится, то сходится и ряд (1.1);

2) если ряд (1.1) расходится, то расходится и ряд (1.2).

Замечание. Для использования признака сравнения нужно иметь для сравнения ряды, про которые заранее известно, сходятся они или расходятся. В качестве таких рядов можно использовать сходящуюся бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, а также обобщённые гармонические ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, где $к$ – действительное число. При $к \leq 1$ такие ряды расходятся, а при $k>1$ сходятся.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots .$$

Решение. Рассмотрим расходящийся ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots$.

Он расходится, так как получен из гармонического ряда отбрасыванием u_1=1. Так как $ln(n+1)<n+1$ при любом n=1,2,…, то $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$, поэтому данный ряд расходится по признаку сравнения.

Предельный признак сравнения. **Пусть даны два знакоположительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.**

Замечание. Предельный признак сравнения рекомендуется применять в тех случаях, когда общий член ряда представляет собой отношение степенных функций. Для сравнения выбирается обобщённый гармонический ряд, общий член которого равен отношению старших степеней числителя и знаменателя общего члена данного ряда.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3+n+1}$.

Решение. Возьмём для сравнения ряд с общим членом $v_n=\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$, то есть расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Применим предельный признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)n}{n^3+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^3+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=1\neq 0,$$

следовательно, данный ряд расходится по предельному признаку сравнения.

Признак Даламбера. Пусть дан знакоположительный числовой ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n\ldots$$

и пусть существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p$. При $p<1$ ряд сходится, при $p>1$ ряд расходится.

Замечания.

1. Если расходимость ряда установлена с помощью признака Даламбера, то $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$.

2. При $p=1$ признак Даламбера не даёт ответа о сходимости ряда. В этом случае нужно применять другие признаки сходимости.

3. Признак Даламбера рекомендуется применять при наличии в выражении общего члена ряда показательной функции или факториала.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера.

$$u_n=\frac{2n-1}{3^n},\ u_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}}=$$

$$=\frac{2n+1}{3^{n+1}}.\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot(2n-1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}<1,$$

следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Признак Коши. Пусть дан знакоположительный числовой ряд и пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = p.$ При p<1 ряд сходится, при p>1 ряд расходится.

Интегральный признак Коши. Пусть члены знакоположительного числового ряда не возрастают и пусть *f(x)* такая положительная, непрерывная, невозрастающая на промежутке [1;∞) функция, что $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2,\ldots, f(n)= =u_n,\ldots$. Тогда ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$

1.1.3. Знакопеременные ряды

Числовые ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными* рядами.

Числовой ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + + (-1)^{n-1}\cdot u_n + \ldots,$$

где u_n – модуль члена ряда, называется *знакочередующимся* числовым рядом.

Признак Лейбница. Если для знакочередующегося числового ряда

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot u_n + \ldots$$

выполняются два условия: члены ряда убывают по модулю и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

то ряд сходится, причём его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n\cdot(n+1)^2}.$

Решение. Применим признак Лейбница.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)^2} > u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} = 0.$$

Оба условия признака Лейбница выполняются, следовательно, ряд сходится.

Замечание 1. Теорема Лейбница справедлива и если условие $u_n > u_{n+1}$ выполняется, начиная с некоторого номера N.

2. Условие $u_n > u_{n+1}$ не является необходимым. Ряд может сходиться, если оно не выполняется. Например, ряд $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\ldots+$ $+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$ сходится, как разность двух сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$, хотя условие $u_n > u_{n+1}$ не выполняется.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда, расходится, то говорят, что знакопеременный ряд сходится условно.

Если сходится и сам знакопеременный ряд и ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то говорят, что знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Пример 6. Установить характер сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Очевидно, что данный ряд сходится по признаку Лейбница. Действительно: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ и $u_n = \frac{1}{n} > u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является расходящимся гармоническим рядом. Поэтому данный ряд сходится условно.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда или признак абсолютной сходимости. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

и пусть сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|.$$

Тогда данный ряд сходится абсолютно.

Теорема об оценке остатка знакочередующегося числового ряда. Если знакочередующийся числовой ряд сходится по признаку Лейбница, то его n-й остаток по абсолютной величине не превосходит модуля $(n+1)$-го члена ряда.

Пример 7. Вычислить с точностью до 0,01 сумму ряда $\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\dots$.

Решение. Очевидно, ряд сходится по признаку Лейбница. $u_1=\frac{1}{1!}=1; u_2=\frac{1}{3!}\approx 0{,}166; u_3=\frac{1}{5!}\approx 0{,}008<0{,}01$. Поэтому

$$S\approx 1-0{,}166\approx 0{,}84.$$

1.2. Степенные ряды

Ряд, члены которого являются функциями, называется *функциональным рядом*

Если при $x = x_0$ функциональный ряд сходится, то x_0 называется точкой сходимости функционального ряда.

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*.

Очевидно, что в области сходимости функционального ряда его сумма является функцией от x. Будем обозначать её $S(x)$.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1\cdot(x-a)+a_2\cdot(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n+\dots,$$

где $a, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – некоторые числа, называемые коэффициентами степенного ряда.

Теорема о структуре области сходимости степенного ряда

Областью сходимости степенного ряда является интервал $(a-R;a+R)$, к которому в зависимости от конкретных случаев могут быть присоединены точки $a-R$ и $a+R$, где $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (если этот предел существует). В каждой точке интервала $(a-R;a+R)$ ряд сходится абсолютно.

Интервал $(a-R;a+R)$, называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а половина его длины R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Любой степенной ряд сходится при $x=a$. Если других точек сходимости у ряда нет, то считают, что $R=0$. Если степенной ряд сходится во всех точках числовой прямой, то считают, что $R=\infty$.

Пример 8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}=|x|.$$

Ряд сходится, если $|x|<1$ или $x\in(-1;1)$ – это и есть интервал сходимости. Исследуем концы этого интервала. При $x=1$ получаем расходящийся обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. При $x=-1$ получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, сходящийся по признаку Лейбница.

Действительно, $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ и $|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}>|u_{n+1}|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $[-1;1)$; $R=1$.

Пример 9. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!(x-5)^n.$$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n!|\ x-5\ |^n$ и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|x-a|^{n+1}}{n!|x-a|^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot|x-a|=\begin{cases}\infty, x\neq a,\\ 0, x=a.\end{cases}$$

Таким образом, областью сходимости данного ряда является одна точка $x=a$; $R=0$.

Пример 10. Найти область сходимости степенного ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!\cdot|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1 \text{ при всех } x.$$

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $(-\infty;+\infty)$; $R=\infty$.

Ряд $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в точке a.

Ряд $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$

называется рядом Маклорена.

1.2.1. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots,\ x\in(-\infty;+\infty)$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+$$

$$+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ x\in(-1;1)$$

$$\ln x=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x-1)^n}{n}+\ldots,\ x\in(0;2]$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}+\ldots,\ x\in(-1;1)$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\ x\in(-1;1)$$

Пример 11. Разложить в степенной ряд функцию e^{-x^2} .

Решение. Сделаем замену переменной x=-t^2, получим

$e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+...+\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{n!}+...$ при $t\in(-\infty;+\infty)$. Переобозначая t на x, получим нужное разложение:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{n!}+... \text{ при } x\in(-\infty;+\infty).$$

Пример 12. Разложить в степенной ряд функцию f(x)= $\frac{1}{1+x^2}$.

Решение. Очевидно, f(x)= $(1+x^2)^{-1}$. Обозначим $x^2=t$ и воспользуемся биноминальным рядом при m=-1.

$$(1+t)^{-1}=1-\frac{t}{1!}+\frac{1\cdot 2}{2!}t^2-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3!}t^3+...+\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 2...n}{n!}t^n+...,$$

$$(1+t)^{-1}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n\cdot t^n+\ldots,\ t\in(-1;1).$$

Возвращаясь к переменной x, получаем разложение при $x\in(-1;1)$:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n\cdot x^{2n}+\ldots.$$

Пример 13. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся разложением $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...$

Тогда

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...)dx\approx\left.(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 5!})\right|_0^1\approx$$

$$\approx\left.(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 5!})\right|_0^1\approx 1-0.3333+0.1-0{,}0238+0{,}0046-$$

$-0{,}0008\approx 0{,}7475\approx 0{,}748$.

Так как ряд знакочередующийся и 0,0008<0,001, то все слагаемые, начиная с 0,0008, отбрасываем и при этом погрешность не превосходит 0,001.

Пример 14. Вычислить $\sqrt[3]{10}$ с точностью до 0,001.

Решение. $\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot 10}{8}}=2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{10}{8}}=2\cdot\sqrt[3]{1+0.25}=2\cdot(1+0.25)^{\frac{1}{3}}.$ Используем биномиальный ряд при x=0.25; $m=\dfrac{1}{3}$.

$$\sqrt[3]{10}\approx 2(1+\frac{1}{3}\cdot 0.25+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot 0.25^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot 0.25^3+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}\cdot 0.25^4)\approx 2\cdot(1+0{,}0833-0{,}0069+0{,}00096)$$

$$\approx 2\cdot(1+0{,}0833-0{,}0069)\approx 2{,}1528\approx 2{,}153.$$

Так как, начиная со второго члена, ряд знакочередующийся и 0,00096<0,001, то все слагаемые, начиная с 0,00096, отбрасываем и при этом погрешность не превосходит 0,001.

1.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.3.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Функциональное уравнение вида $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$, связывающее между собой независимую переменную *x*, неизвестную функцию *y*, зависящую от этого *x*, и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$, называется *дифференциальным* уравнением.

Порядок старшей производной неизвестной функции определяет порядок уравнения. Так, уравнение $F(x, y, y')=0$ является уравнением первого порядка, уравнение $F(x, y, y', y'')=0$ – уравнением второго порядка.

Всякая функция $y=\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение вместе со своими производными, обращает его в тождество, называется *решением* этого уравнения.

Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение– значит найти все его решения в данной области.

Функция $y=\varphi(x, C)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению первого порядка при любом значении произвольной постоянной *C*, то есть совокупность всех решений этого уравнения, называется его *общим решением.*

Решения, получаемые из общего при определенных значениях С, называются *частными.*

Уравнение вида $\Phi(x,y,C)=0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$, носит название *задачи Коши.*

Уравнения с разделяющимися переменными. Если дифференциальное уравнение можно привести к виду:

$$f(x)dx=g(y)dy,$$

то оно называется дифференциальным уравнением с *разделяющимися переменными.*

Решение этого уравнения можно найти, проинтегрировав левую и правую части уравнения.

Однородные дифференциальные уравнения Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией n–го измерения* относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$.

Уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется *однородным,* если функция $f(x,y)$ является однородной функцией нулевого измерения относительно x и y.

Такое уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены переменной $u=\dfrac{y}{x}$.

Пример 15. Решить уравнение $(y^2-3x^2)dy+3xydx=0$.

Решение. Разрешим это уравнение относительно y'. $y'=-\dfrac{3xy}{y^2-3x^2}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, получим: $y'=-\dfrac{3\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}-3}\Rightarrow y'=-\dfrac{3\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-3}$.

Далее вводим новую функцию $u=\dfrac{y}{x}$. Так как $y'=u'x+u$, то уравнение преобразуется к виду: $u'x+u=-\dfrac{3u}{u^2-3}$. Отсюда

$x\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{3u}{u^2-3}-u$, $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-3u-u^3+3u}{u^2-3}$, $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-u^3}{u^2-3}$. Разделяя переменные, получим: $\dfrac{-\left(u^2-3\right)}{u^3}du=\dfrac{dx}{x}$, $\left(-\dfrac{1}{u}+\dfrac{3}{u^3}\right)du=\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя, имеем:

$$3\int\frac{du}{u^3}-\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x}.$$

Отсюда $-\dfrac{3}{2u^2}-ln|u|=ln|x|+ln|C|$, $-\dfrac{3}{2u^2}=ln|x|+ln|u|+ln|C|$, $-\dfrac{3}{2u^2}=ln|xuC|$. Исключая вспомогательную функцию $u=\dfrac{y}{x}$, получаем: $-\dfrac{3x^2}{2y^2}=\ln|Cy|$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{1}{yC}$, где произвольная постоянная C выбирается так, что $Cy>0$.

Линейные уравнения первого порядка. Линейным уравнением первого порядка называют уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$. Здесь $p(x)$ и $q(x)$ –заданные непрерывные функции от x или постоянные.

Решение такого уравнения методом Бернулли рассмотрим на примере.

Пример 16. Решить уравнение $sin\,x\,y'-y=sin\,x\cdot sin\dfrac{x}{2}$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $sin\,x$:

$y'-\dfrac{y}{sin\,x}=sin\dfrac{x}{2}$. Положим $y=u\cdot v, y'=u'v+uv'$ и подставим эти выражения в последнее уравнение: $u'v+uv'-\dfrac{uv}{sin\,x}=sin\dfrac{x}{2}$.

Вынесем за скобки общий множитель v и получим

$v\left(u'-\dfrac{u}{sin\,x}\right)+uv'=sin\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{du}{dx}-\dfrac{u}{sin\,x}=0$, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u}{sin\,x}$, $\dfrac{du}{u}=\dfrac{dx}{sin\,x}$,

$ln\,u=ln\,tg\dfrac{x}{2}$, $u=tg\dfrac{x}{2}$. Тогда $tg\dfrac{x}{2}v'=sin\dfrac{x}{2}$ или, сокращая на $sin\dfrac{x}{2}\neq 0$ обе части последнего уравнения, имеем $\dfrac{v'}{cos\,x/2}=1$ и $dv=cos\dfrac{x}{2}\cdot dx$.

Интегрируя, получаем $v = 2\sin\frac{x}{2} + C$. И окончательно $y = uv = \left(2\sin\frac{x}{2} + C\right) \cdot tg\,\frac{x}{2}$.

1.3.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в виде $F(x, y, y', y'') = 0$.

Условия $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$ называются *начальными условиями*.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных, которая при любых значениях C_1 и C_2 является решением дифференциального уравнения.

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, определяющее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Если в общее решение подставить конкретные значения C_1 и C_2, то получится *частное решение* дифференциального уравнения.

*Уравнения, допускающие понижение порядка.*1) Рассмотрим простейшее уравнение второго порядка $y'' = f(x)$. Общее решение такого уравнения получается путем двукратного интегрирования:

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1,$$

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2 ,$$

где C_1 и C_2–произвольные постоянные, а неопределенные интегралы трактуются как первообразные соответствующих функций.

Пример 17. Решить уравнение $y'' = x + \sin x$.

Решение. Интегрируя первый раз, получаем $y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$. Общее решение данного уравнения получаем, интегрируя второй раз: $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$.

2) Рассмотрим уравнение $y'' = f(x, y')$, явно не содержащее искомую функцию y. Положим $y' = p$. Тогда $y'' = p'$ и уравнение примет вид $p' = f(x, p)$.

Решаем теперь это уравнение первого порядка относительно p, а затем заменяем p на y' и решаем последнее уравнение относительно неизвестной функции y.

Пример 18. Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Решение. Положим $y' = p, y'' = p'$ и подставим y' и y'' в данное уравнение. Получим $xp' + p = 0, x\dfrac{dp}{dx} = -p$. Разделим переменные. Тогда $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $ln|p| = -ln|x| + ln|C_1|$, $ln|p| = ln\left|\dfrac{C_1}{x}\right|$ и $p = \dfrac{C_1}{x}$. Заменим теперь p на y'. Имеем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_1}{x}, dy = C_1\dfrac{dx}{x}$ и $y = C_1 \ln|x| + C_2$.

3) Пусть $y'' = f(y, y')$. Это уравнение явно не содержит x. Подстановкой $y' = p(y), y'' = p' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p' \cdot p$ это уравнение приводят к уравнению первого порядка: $p' \cdot p = f(y, p)$.

Далее получившееся уравнение первого порядка решают относительно вспомогательной функции p, а затем, заменяя p на y', получают уравнение первого порядка относительно функции y, из которого ее и находят.

Пример 19. Решить уравнение $y''tgy = 2(y')^2$.

Решение. Положим $y' = p, y'' = p' \cdot p$, подставим в уравнение эти выражения производных и получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p:

$p' \cdot p \cdot tgy = 2p^2$. Отсюда $p' \cdot p \cdot tgy - 2p^2 = 0, p(p'tgy - 2p) = 0$. Это уравнение имеет решение $p = 0$ или $y' = 0$, а $y = C$, а так же решения, удовлетворяющие уравнению $p'tgy - 2p = 0$.

Разделим переменные в этом уравнении:

$$\frac{dp}{dy} \cdot tgy = 2p, \ \frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{tgy}, \ \frac{dp}{p} = 2\frac{cos\, y}{sin\, y}dy, \ ln|p| = 2ln|sin\, y| + ln|C_1|.$$

Откуда $p = C_1 sin^2 y$. Полагая $p = y'$, получим дифференциальное уравнение $y' = C_1 sin^2 y$.

Снова разделим переменные: $\frac{dy}{dx} = C_1 sin^2 y, \frac{dy}{sin^2 y} = C_1 dx$.

Интегрируя, получим: $\int \frac{dy}{sin^2 y} = C_1 \int dx, -ctgy = C_1 x + C_2$ или $ctgy = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$. Решение уравнения p=0, то есть y=C, входит в этот общий интеграл при $x = 0$, так как в таком случае $ctgy = \tilde{C}_2$ и y является постоянным.

Таким образом, получили общий интеграл дифференциального уравнения $ctgy = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Линейные однородные уравнения второго порядка**.** Дифференциальное уравнение второго порядка называется *линейным,* если оно имеет вид: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.

Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют *линейным неоднородным*. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным.*

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + py' + qy = 0$ имеет постоянные коэффициенты p и q.

Квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется характеристическим уравнением данного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

По таблице определяется общее решение однородного линейного уравнения в зависимости от корней его характеристического уравнения.

Таблица 1

N	k_1, k_2	$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2$
1	$k_1 \neq k_2 \in R$	$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	$k_1 = k_2 = k$	$e^{kx}(C_1 + xC_2)$
3	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}(C_1 cos \beta x + C_2 sin \beta x)$
4	$k_{1,2} = \pm \beta i$	$C_1 cos \beta x + C_2 sin \beta x$

Пример 20. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$k^2 - 5k + 6 = 0,\ \ k_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}},\ k_1 = \frac{5+1}{2} = 3,\ k_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$

Тогда общее решение дифференциального уравнения: $y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Пример 21. Решить дифференциальное уравнение

$y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения: $k^2 - 6k + 9 = 0$. Тогда $(k-3)^2 = 0$ и $k = 3$.

Общее решение данного дифференциального уравнения записываем в виде $y_{oo} = e^{3x}(C_1 + xC_2)$.

Пример 22. Составить общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни. Имеем $k^2 + 4k + 13 = 0$. Отсюда $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$. Тогда общее решение данного дифференциального уравнения: $y_{oo} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме любого частного решения этого уравнения $y_{чн}$ и общего решения y_{oo} соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Приведём таблицу для нахождения частного решения.

Таблица 2

№	$f(x)$	№	k_1, k_2	y^*
1	2	3	4	5
I	ae^{mx}	1 2 3	$k_1, k_2 \neq m$ $k_1 = m, k_2 \neq m$ $k_1 = k_2 = m$	Ae^{mx} xAe^{mx} $x^2 Ae^{mx}$

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5
II	$P_n(x)e^{mx}$, где $P_n(x)=a_0x^n$ $+a_1x^{n-1}+\dots\dots+a_n$.	1 2 3	$k_1\neq m, k_2\neq m$ $k_1=m, k_2\neq m$ $k_1=k_2=m$	$Q_n(x)e^{mx}$ $xQ_n(x)e^{mx}$ $x^2Q_2(x)e^{mx}$
III	$P_n(x)$	1 2 3	$k_1\neq 0, k_2\neq 0$ $k_1=0, k_2\neq 0$ $k_1=k_2=0$	$Q_n(x)$ $xQ_n(x)$ $x^2Q_n(x)$
IV	$M\cos\beta x+$ $+N\sin\beta x$	1 2	$k_{1,2}\neq\pm\beta i$ $k_{1,2}=\pm\beta i$	$A\cos\beta x+B\sin\beta x$ $x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
V	$P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+$ $+Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ где степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ могут быть разными, и один из многочленов может быть тождественно равен нулю.	1 2	$k_{1,2}\neq\alpha\pm\beta i$ $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}(U(x)\cos\beta x+$ $+V(x)\sin\beta x)$ $xe^{\alpha x}(U(x)\cos\beta x+$ $+V(x)\sin\beta x)$, где степени $U(x)$, $V(x)$ равны максимальной из степеней $P(x)$,$Q(x)$.

Принцип наложения решений. Решение $y_{чн}$ уравнения $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$, где правая часть есть сумма функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, можно представить в виде суммы $y_{чн}=y_{чн\,1}+y_{чн\,2}$, где $y_{чн\,1}$ и $y_{чн\,2}$ являются соответственно решениями уравнений $y''+py'+qy=f_1(x)$ и $y''+py'+qy=f_2(x)$.

Пример 23. Решить уравнение $y'' + y' = xe^x$.

Решение. Находим общее решение уравнения $y'' + y' = 0$. Корни характеристического уравнения $k^2 + k = 0$ равны $k_1 = 0, k_2 = -1$. Тогда $\overline{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Число $m = 1$ и не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения. Тогда частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{чн} = (Ax + B)e^x$, где $Ax + B$ –многочлен первой степени с неопределенными коэффициентами. Найдем первую и вторую производные от

$$у_{чн} : y_{чн}' = Ae^x + (Ax + B)e^x = e^x (Ax + A + B),$$

$$y_{чн}'' = e^x (Ax + A + B) + Ae^x = e^x (Ax + 2A + B).$$

Подставим $y_{чн}, y_{чн}'$ и $y_{чн}''$ в исходное уравнение, сократим его на $e^x \neq 0$ и получим уравнение $Ax + 2A + B + Ax + A + B = x$.

Отсюда $2Ax + 3A + 2B = x$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего уравнения: 2A=1, A=0,5; 3A+2B=0, B=-0,75.

Таким образом, $y_{чн} = (0,5x - 0,75)e^x$, а общее решение исходного уравнения имеет вид: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{-x} + (0,5x - 0,75)e^x$.

Пример 24. Решить уравнение $y'' + 100y = cos\, x$.

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2 + 100 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{-100}$, $k_{1,2} = \pm 10i$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{oo} = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x$.

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения. По виду правой части уравнения определяем число β. Оно здесь равно 1, а так как $k_{1,2} = \pm 10i$, то $k_{1,2} \neq \pm\beta i$ и, следовательно, частное решение уравнения с правой частью *cosx* будет иметь вид $y_{чн} = A\cos x + B\sin x,$ $y_{чн}' = -A\sin x + B\cos x,$ $y_{чн}'' = -A\cos x - B\sin x.$ Подставляя в уравнение $y_{чн}, y_{чн}'$ и $y_{чн}''$, получим:

$$-Acos\, x - Bsin\, x + 100(Acos\, x + Bsin\, x) = cos\, x,\; 99Acos\, x + 99Bsin\, x = cos\, x.$$

Приравнивая коэффициенты при *cosx* и *sinx* в левой и правой частях последнего соотношения, получаем $99A = 1$ и $99B = 0$, откуда имеем $A=\dfrac{1}{99}, B=0$ и $y^{*}=\dfrac{1}{99}cos\,x$. Тогда

$$y_{он}=C_1\cos 10x+C_2\sin 10x+\frac{1}{99}\cos x.$$

1.4. Элементы операционного исчисления

1.4.1. Основные операционные соотношения функция-оригинал и изображение

Оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t,

2) для всех отрицательных t $f(t)=0$,

3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, то есть существуют такие постоянные $M>0$ и $S_0\geq 0$, что для всех t $|f(t)|<Me^{S_0 t}$.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция Хевисайда $\eta(t)=\begin{cases}1, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$. Тогда ясно, что $\varphi(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases}\varphi(t), t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3,то $\varphi(t)\cdot\eta(t)$ является оригиналом.

В дальнейшем мы будем писать $f(t)$ вместо $f(t)\cdot\eta(t)$, считая, что $f(t)=0$ для всех отрицательных t.

Функция $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot f(t)dt$, где комплексная переменная $p=a+ib$, называется *лапласовым изображением* функции $f(t)$.Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re}p=a>S_0$.

Тот факт, что $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ записывают так: $F(p)\,\bullet\!\!=\!\!\bullet\, f(t)$.

Изображение функций Хевисайда, $\cos t$ и $\sin t$:

$$\eta(t)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot 1dt=-\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}.\text{ Итак, } 1\,\bullet\!\!=\!\!\bullet\,\frac{1}{p}.$$

$$\sin t = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot \sin t dt = \frac{1}{p^2+1};\ \cos t = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot \cos t dt = \frac{p}{p^2+1}.$$

Теорема подобия. Если изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$, изображение функции $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Пример 25. $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$. Найти изображение.

Решение.

$$\sin at \risingdotseq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{p^2+a^2};\ \cos at \risingdotseq \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+a^2}.$$

Таким образом, $\sin at \risingdotseq \frac{a}{p^2+a^2}$; $\cos at \risingdotseq \frac{p}{p^2+a^2}$.

Свойство линейности изображения. Изображение суммы нескольких функций, умноженных на постоянные, равно сумме изображений этих функций, умноженных на те же постоянные, то есть если $f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot f_i(t)$ и $F(p) \risingdotseq f(t)$, а $F_i(p) \risingdotseq f_i(t)$, то $F(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot F_i(p)$.

Пример 26. Найти изображение функции $f(t) = 2\sin 3t - \cos 4t$.

Решение. $F(p) = 2\cdot\frac{3}{p^2+3^2} - \frac{p}{p^2+4^2} = \frac{6}{p^2+9} - \frac{p}{p^2+16}$.

Теорема смещения. Если $F(p)$ есть изображение функции $f(t)$, то $F(p+\alpha)$ есть изображение функции $e^{-\alpha t}\cdot f(t)$, то есть если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то $F(p+\alpha) \risingdotseq e^{-\alpha t}\cdot f(t)$.

Эта теорема позволяет расширить класс функций, для которых легко находятся оригиналы по данному изображению.

Используя данную теорему, получим изображение функций $e^{-\alpha t}$, $shat$, $chat$ и некоторых других.

$e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t} \cdot 1$ и $1 \bullet\!\!=\!\!\bullet\ \dfrac{1}{p}$, поэтому $e^{-\alpha t} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ \dfrac{1}{p+\alpha}$, $e^{\alpha t} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ \dfrac{1}{p-\alpha}$.

Гиперболическая функция $shat = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ имеет изображение

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+a-p+a}{(p-a)(p+a)} = \frac{a}{p^2 - a^2}.$$

Аналогично можно найти изображение гиперболического косинуса: т.к. $chat = \dfrac{1}{2} \cdot (e^{at} + e^{-at})$, то $chat \bullet\!\!=\!\!\bullet\ \dfrac{p}{p^2 - a^2}$.

Зная изображения $\sin at$, $\cos at$, по теореме смещения можно получить изображения функций $e^{-\alpha t} \cdot \sin at$ и $e^{-\alpha t} \cdot \cos at$:

$$e^{-\alpha t} \cdot \sin at \bullet\!\!=\!\!\bullet\ \frac{a}{(p+\alpha)^2 + a^2}; \quad e^{-\alpha t} \cdot \cos at \bullet\!\!=\!\!\bullet\ \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + a^2}.$$

Дифференцирование изображения. Если $F(p) = f(t)$, то $(-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} F(p) \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t^n f(t)$. Используя данную формулу, найдем изображение степенной функции t^n. Известно, что $\dfrac{1}{p} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ 1$. Применяя формулу дифференцирования изображения при $n = 1$, получим $(-1)\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{1}{p}\right) \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t$ или $\dfrac{1}{p^2} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t$. Аналогично $(-1)\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{1}{p^2}\right) \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t^2$ или $\dfrac{2}{p^3} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t^2$. Далее, $(-1)\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{2}{p^3}\right) \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t^3$. Откуда $\dfrac{2 \cdot 3}{p^4} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t^3$ или $\dfrac{3!}{p^4} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t^3$.

При любом n получаем $\dfrac{n!}{p^{n+1}} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ t^n$.

Применяя теорему смещения к этому изображению, получим $\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}} \bullet\!\!=\!\!\bullet\ e^{-\alpha t} \cdot t^n$.

На основании теоремы дифференцирования изображения можно получить изображения функций $t \cdot \sin at$ и $t \cdot \cos at$:

$$t \cdot \sin at \bullet\!\!=\!\!\bullet\ -\frac{d}{dp}\left(\frac{a}{p^2 + a^2} \right) = \frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2},$$

$$t \cdot \cos at \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right) = -\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}.$$

Изображение производных. Если $f(t)$, $f'(t)$,…, $f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; F(p)$, то

$$f'(t) \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; p^2F(p) - pf(0) - f'(0),\ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Таблица 3

N	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t)dt$	$f(t)$
1	2	3
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
3	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
4	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
5	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$shat$
6	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$chat$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \cdot \sin at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \cdot \cos at$

Окончание табл. 3

1	2	3
9	$\dfrac{a}{(p+\alpha)^2-a^2}$	$e^{-\alpha t} shat$
10	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-a^2}$	$e^{-\alpha t} chat$
11	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
12	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t} \cdot t^n$
13	$\dfrac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cdot \sin at$
14	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cdot \cos at$
15	$\dfrac{2pa}{(p^2-a^2)^2}$	$t \cdot shat$
16	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$	$t \cdot chat$
17	$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at \cdot \cos at)$
18	$\dfrac{1}{(p^2-a^2)^3}$	$\dfrac{1}{2a^3}(at \cdot chat - shat)$
19	$p \cdot F(p) - f(0)$ $p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$ .... $p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$	$f'(t)$ $f''(t)$ .... $f^{(n)}(t)$

Пример 27. Найти изображение функции $f(t)=7\sin^2 t$.

Решение. Преобразуем функцию $f(t)=7\sin^2 t$ к виду $f(t)=\frac{7}{2}(1-\cos 2t)$ и найдем изображение этой функции, используя свойство линейности изображения и таблицу изображений

$$\frac{7}{2}(1-\cos 2t) \risingdotseq \frac{7}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)=\frac{7}{2}\cdot\frac{p^2+4-p^2}{p(p^2+4)}.$$

Пример 28. Найти изображение функции $f(t)=t\cdot sh6t+t^3$.

Решение. Воспользуемся формулами (16) и (11).

$$F(p)=\frac{2p\cdot 6}{(p^2-6^2)^2}+\frac{3!}{p^4}=\frac{12p}{(p^2-36)^2}+\frac{6}{p^4}.$$

Пример 29. Найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{p}{p^2-4p+9}$.

Решение. Преобразуем это выражение к сумме элементарных функций, изображения которых есть в таблице. Для этого в знаменателе дроби выделим полный квадрат:

$$F(p)=\frac{p}{p^2-4p+4+5}=\frac{p}{(p-2)^2+5}=\frac{p-2+2}{(p-2)^2+5}=$$

$$=\frac{p-2}{(p-2)^2+5}+\frac{2}{(p-2)^2+5}=\frac{p-2}{(p-2)^2+5}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{(p-2)^2+5}.$$

По формулам (7) и (8) таблицы имеем:

$$\frac{p-2}{(p-2)^2+5} \risingdotseq \mathrm{e}^{2t}\cdot\cos\sqrt{5}t,\quad \frac{\sqrt{5}}{(p-2)^2+5} \risingdotseq \mathrm{e}^{2t}\cdot\sin\sqrt{5}t.$$

Поэтому

$$\frac{p}{p^2-4p+9} \risingdotseq \mathrm{e}^{2t}\cdot\left(\cos\sqrt{5}t+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\right).$$

Пример 30. Найти изображение функции $f(t)=e^t\cdot\cos^2 t$.

Решение. Преобразуем функцию $f(t)$ к виду $f(t)=e^t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}\cdot e^t+\frac{1}{2}\cdot e^t\cdot\cos 2t$. Воспользуемся формулами (2) и (8) таблицы изображений:

$$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4}=\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{p^2-2p+5}=$$

$$=\frac{p^2-2p+5+p^2-2p+1}{2(p-1)(p^2-2p+5)}=\frac{p^2-2p+3}{(p-1)(p^2-2p+5)}.$$

Интегрирование оригинала. Если $f(t)\bullet\!\!=\!\!\bullet\, F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \bullet\!\!=\!\!\bullet\, \frac{F(p)}{p}$.

Интегрирование изображений. Если $f(t)\bullet\!\!=\!\!\bullet\, F(p)$,а $\int\limits_p^\infty F(p)dp$ сходится, то $\frac{f(t)}{t} \bullet\!\!=\!\!\bullet\, \int\limits_p^\infty F(p)dp$.

Теорема запаздывания. Если $f(t)\bullet\!\!=\!\!\bullet\, F(p)$,то для любого $\tau\rangle 0$ f(t-τ) $\bullet\!\!=\!\!\bullet\, e^{-p\tau}F(p)$.

Теорема свёртывания. Если $F(p)\bullet\!\!=\!\!\bullet\, f(t)$, $\Phi(p)\bullet\!\!=\!\!\bullet\, \varphi(t)$ то

$$F(p)\Phi(p)\bullet\!\!=\!\!\bullet\, \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau.$$

Интеграл в правой части последнего выражения называется свёрткой функции $f(t)$ и $\varphi(t)$,а операция получения свёртки называется свёртыванием.

1.4.2. Решение дифференциальных уравнений

Пусть дано дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_nx=f(t),$$

где *f(t)* – оригинал.

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0;\ x'(0)=x'_0;\ \dots\ x^{(n-1)}(0)=x_0{}^{(n-1)}.$$

Обозначим изображение этого решения *X(p)*, после чего найдём изображения левой и правой частей уравнения. Получив вспомогательное уравнение, разрешают его относительно *X(p)* и находят его оригинал, то есть *x(t).*

Пример 31. Решить дифференциальное уравнение $x''+x'-2x=e^t$, при начальных условиях *x(0)*=–1; *x'(0)*=0.

Решение. Полагая, что *x(t)* $\bullet\!=\!^\bullet$ *X(p)*, получим операторное уравнение:

$$p^2X(p)+p+pX(p)+1-2X(p)=\frac{1}{p-1},$$

$$(p^2+p-2)X(p)=\frac{1}{p-1}-p-1=\frac{1-(p+1)(p-1)}{p-1}$$

$$X(p)=\frac{2-p^2}{(p-1)(p-1)(p+2)}.$$

Окончательно

$$X(p)=\frac{-p^2+2}{(p+2)(p-1)^2}.$$

Разложим *X(p)* на простейшие дроби: $\frac{-p^2+2}{(p+2)(p-1)^2}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{(p-1)^2}$. Отсюда $-p^2+2=A(p-1)^2+B(p+2)(p-1)+C(p+2)$. Положим в этом тождестве p=1. Тогда 1=3C и $C=\frac{1}{3}$. Полагая, что p=–2, получим -2=9A, откуда $A=-\frac{2}{9}$.Далее:

$$-p^2+2=-\frac{2}{9}(p-1)^2+B(p+2)(p-1)+\frac{1}{3}(p+2).$$

Приравнивая свободные члены в обеих частях тождества, получаем уравнение для определения B: $2=-\frac{2}{9}-2\cdot B+\frac{2}{3}$. Откуда $\mathrm{B}=-\frac{7}{9}$, а

$$X(p)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}.$$

$$X(t)=-\frac{2}{9}\cdot e^{-2t}-\frac{7}{9}\cdot e^{t}+\frac{1}{3}\cdot t\cdot e^{t}.$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами проводится по той же схеме, что и решение однородного дифференциального уравнения.

Пример 32. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x + 4y \\ y'(t) = 4x - 3y, \quad x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Полагая, что $x(t) \bullet\!\!=^{\bullet} X(p)$, $y(t) \bullet\!\!=^{\bullet} Y(p)$, составляем операторную систему: $\begin{cases} p \cdot X(p) - 1 = 3X(p) + 4Y(p) \\ p \cdot Y(p) - 1 = 4X(p) - 3Y(p) \end{cases}$,

откуда $\begin{cases} (p-3) \cdot X(p) - 4 \cdot Y(p) = 1 \\ -4X(p) + (p+3) \cdot Y(p) = 1 \end{cases}$.

Решим эту систему относительно *X(p)* и *Y(p)*. Домножим первое уравнение системы на *p+3*, а второе на 4 и сложим эти уравнения. Получаем уравнение, из которого найдём *X(p)*:

$$[(p-3)(p+3) - 16] \cdot X(p) = p + 3 + 4, \quad X(p) = \frac{p+7}{p^2 - 25}.$$

Умножая далее первое уравнение на 4, а второе на *p-3*, аналогичным образом найдём $Y(p) = \dfrac{p+1}{p^2 - 25}$. Преобразуем полученные изображения:

$X(p) = \dfrac{p}{p^2 - 25} + \dfrac{7}{5} \cdot \dfrac{5}{p^2 - 25}$, $Y(p) = \dfrac{p}{p^2 - 25} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{5}{p^2 - 25}$. По таблице находим: $x(t) = ch5t + \dfrac{7}{5} sh5t$, $y(t) = ch5t + \dfrac{1}{5} sh5t$.

2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задание 1. Исследовать на сходимость ряд с общим членом u_n.

1.1. $u_n=\dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$,

1.2. $u_n=\dfrac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$,

1.3. $u_n=\dfrac{n^2}{(n+2)!}$,

1.4. $u_n=\dfrac{(n!)^2}{(3n+1)(2n)!}$,

1.5. $u_n=\dfrac{(n+1)!}{n^n}$,

1.6. $u_n=\dfrac{7^{2n}}{(2n-1)!}$,

1.7. $u_n=\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$,

1.8. $u_n=\dfrac{2^n}{(n+2)!\cdot 4^n}$,

1.9. $u_n=\dfrac{(3n+2)!}{10^n\cdot n^2}$,

1.10. $u_n=\dfrac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$,

1.11. $u_n=\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$,

1.12. $u_n=\dfrac{10^n\cdot 2n!}{(2n)!}$,

1.13. $u_n=\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}$,

1.14. $u_n=\dfrac{6^n\cdot(n^2-1)}{n!}$,

1.15. $u_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$,

1.16. $u_n=\dfrac{n!}{(3n)!}$,

1.17. $u_n=\dfrac{5^n\cdot\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$,

1.18. $u_n=\dfrac{5^n\cdot(n+1)!}{(2n)!}$,

1.19. $u_n=\dfrac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$,

1.20. $u_n=\dfrac{n!\cdot(2n+1)!}{(3n)!}$,

1.21. $u_n=\dfrac{\sqrt{n!}}{3^n}$,

1.22. $u_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$,

1.23. $u_n=\dfrac{n^2+5}{2^n}$,

1.24. $u_n=\dfrac{n!\cdot 3^n}{n^n}$,

1.25. $u_n=\dfrac{n!\cdot e^n}{n^n}$,

1.26. $u_n=\dfrac{3+7n}{5^n+n}$,

1.27. $u_n=\dfrac{2^n+1}{3^n+3}$,

1.28. $u_n=\dfrac{3^n}{(n-1)!}$,

1.29. $u_n=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$,

1.30. $u_n=\dfrac{10^n\cdot n!}{(2n)!}$.

Задание 2. Установить характер сходимости ряда с общим членом u_n.

2.1. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$,

2.2. $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2}$,

2.3. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot(n+1)}$,

2.4. $u_n=(-1)^n\cdot\left(\dfrac{3n+1}{4n+5}\right)^n$,

2.5. $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n}}$,

2.6. $u_n=(-1)^n\cdot e^{-n}$,

2.7. $u_n=(-1)^{n+1}\cdot\left(\dfrac{2n}{3n+2}\right)^n$,

2.8. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^3+3}$,

2.9. $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{100n+1}$,

2.10. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n\ln^3 n}$,

2.11. $u_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n^2+1}$,

2.12. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$,

2.13. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$,

2.14. $u_n=\dfrac{\sin n}{n!}$,

2.15. $u_n=(-1)^n\cdot\dfrac{\sin 3^n}{3^n}$,

2.16. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$,

2.17. $u_n=\dfrac{\cos n}{n^3}$,

2.18. $u_n=(-1)^n\cdot\dfrac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$,

2.19. $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^4-n^2+1}$,

2.20. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$,

2.21. $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{2n}}$,

2.22. $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$,

2.23. $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[4]{2n+3}}$,

2.24. $u_n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{2n-1}$,

2.25. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}\cdot(n+3)}$,

2.26. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$,

2.27. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$,

2.28. $u_n=(-1)^n\cdot\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n$,

2.29. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{(5n-2)\ln^2(5n-2)}$,

2.30. $u_n=\dfrac{\cos n}{n^2+5}$.

Задание 3. Найти область сходимости степенного ряда с общим членом u_n.

3.1. $u_n=\frac{nx^{n+1}}{2^n}$,

3.2. $u_n=\frac{(x-1)^n}{n(n+1)}$,

3.3. $u_n=\frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)}$,

3.4. $u_n=\frac{(n+1)x^n}{3^n(n+2)}$,

3.5. $u_n=\frac{n(x+2)^n}{2^{n-1}}$,

3.6. $u_n=\frac{(n+2)(x-2)^n}{(n+1)n}$,

3.7. $u_n=\frac{nx^n}{2n+3}$,

3.8. $u_n=\frac{3^n\cdot(x-3)^n}{n}$,

3.9. $u_n=\frac{2^n\cdot(x+3)^n}{n^2}$,

3.10. $u_n=\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$,

3.11. $u_n=\frac{x^{n+1}}{n^3}$,

3.12. $u_n=\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$,

3.13. $u_n=\frac{(x+4)^n}{n(n+1)}$,

3.14. $u_n=\frac{2n^2-1}{n^2}x^n$,

3.15. $u_n=\frac{(x-4)^n}{2^n\sqrt{3n-1}}$,

3.16. $u_n=\frac{(x+5)^n}{2^n\cdot(n+1)!}$,

3.17. $u_n=\frac{(n+1)x^n}{2n^2-1}$,

3.18. $u_n=\frac{x^{2n-1}}{(n+1)^2}$,

3.19. $u_n=\frac{(x-6)^n}{2^{n+1}}$,

3.20. $u_n=\frac{\sqrt{n^2+1}\cdot x^n}{(2n+1)!}$,

3.21. $u_n=\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$,

3.22. $u_n=\frac{(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$,

3.23. $u_n=\frac{(x+3)^{2n}}{2n+3}$,

3.24. $u_n=\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$,

3.25. $u_n=\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$,

3.26. $u_n=\frac{n\cdot x^{n-1}}{(n+2)!}$,

3.27. $u_n=\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n\cdot(2n-1)}$,

3.28. $u_n=\frac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n}$,

3.29. $u_n=\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$,

3.30. $u_n=\frac{(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$.

Задание 4. Найти решение задачи Коши.

4.1. $4y^3y'' = y^4 - 1, y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = 1/(2\sqrt{2}).$

4.2. $y'' = 128y^3, y(0) = 4, y'(0) = 8.$

4.3. $y''y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2.$

4.4. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

4.5. $y'' = 32\sin^3 y\cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 4.$

4.6. $y'' = 98y^3, y(1) = 1, y'(1) = 7.$

4.7. $y''y^3 + 49 = 0, y(3) = -7, y'(3) = -1.$

4.8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1, y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

4.9. $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

4.10. $y'' = 72y^3, y(2) = 1, y'(2) = 6.$

4.11. $y''y^3 + 36 = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2.$

4.12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 3.$

4.13. $4y^3y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

4.14. $y'' = 50y^3, y(3) = 1, y'(3) = 5.$

4.15. $y''y^3 + 25 = 0, y(2) = -5, y'(2) = -1.$

4.16. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3.$

4.17. $y'' = 8\sin^3 y\cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 2.$

4.18. $y'' = 32y^3, y(4) = 1, y'(4) = 4.$

4.19. $y''y^3 + 16 = 0, y(1) = 2, y'(1) = 2.$

4.20. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4.$

4.21. $y'' = 50\sin^3 y\cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 5.$

4.22. $y'' = 18y^3, y(1) = 1, y'(1) = 3.$

4.23. $y''y^3 + 9 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 3.$

4.24. $y^3y'' = 4(y^4 - 1), y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$

4.25. $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$

4.26. $y'' = 8y^3, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

4.27. $y''y^3 + 4 = 0, y(0) = -1, y'(0) = -2.$

4.28. $y'' = 2\sin^3 y\cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 1.$

4.29. $y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$

4.30. $y'' = 2y^3, y(-1) = 1, y'(-1) = 1.$

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

5.1. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 - 1.$ **5.2.** $y''' - 20y'' + 19y' = x^2 + x.$

5.3. $y''' + 4y'' + 10y' = 5(x+2)^2.$

5. 4. $y''' - 6y'' + 9y' = x^2 + x + 1.$

5.5. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$

5.6. $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$

5.7. $y''' + 2y'' + y' = 12x.$

5. 8. $y''' - 2y'' + y' = 2x(1-x).$

5.9. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$

5.10. $y''' - 4y' = 2x^2 - x.$

5.11. $y''' + 7y'' + 6y' = 3x - x^2.$

5.12. $y''' + y'' = 49 - 24x^2.$

5.13. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$

5.14. $y''' - y'' = 6x - 5.$

5.15. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$

5.16. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$

5.17. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$

5.18. $y''' + 9y'' - 10y' = 4x^2.$

5.19. $y''' - 4y'' + 4y' = x^2 - 2.$

5.20. $y''' + 3y'' = x - 3.$

5.21. $y''' - 49y' = 2 - x^2.$

5.22. $y''' + 4y' = 3x^2 + 2x.$

5.23. $y''' - 4y'' - 7y' = 4x + 5.$

5.24. $y''' + 9y'' - 10y' = 3x^2 + x - 4.$

5.25. $y''' + y'' = 12x + 6.$

5.26. $y''' - 4y'' + 4y' = (x+1)^2.$

5.27. $y''' - 2y'' + y' = x^2$.

5.28. $y''' - 5y'' + 4y' = 2 - x$.

5.29. $y''' - y' = 2 + x - x^2$.

5.30. $y''' - 7y'' + 6y' = 2x^2$.

Задание 6. Операционным методом решить задачу Коши.

6.1. $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3, y'(0) = 1$;

6.2. $y'' - y' = t^2$, $y(0) = 0, y' = 1$;

6.3. $y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = -2$;

6.4. $y'' - y' = \cos 3t$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$;

6.5. $y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 4$;

6.6. $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$;

6.7. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$, $y(0) = -3, y'(0) = 2$;

6.8. $y'' + 2y' = 2 + e^t$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$;

6.9. $2y'' - y' = \sin 3t$, $y(0) = 2, y'(0) = 1$;

6.10. $y'' + 2y' = \sin\frac{t}{2}$, $y(0) = -2, y'(0) = 4$;

6.11. $y'' + y' = sht$, $y(0) = 2, y'(0) = 1$;

6.12. $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;

6.13. $y'' - 3y' + 2y = e^t$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

6.14. $2y'' + 3y' + y = 3e^t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;

6.15. $y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$;

6.16. $y'' + 4y = \sin 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;

6.17. $2y'' + 5y' = 29\cos t$ $y(0) = -1, y'(0) = 0$;

6. 18. $y'' + y' + y = t^2 + t$, $y(0) = 1, y'(0) = -3$;

6.19. $y'' + 4y = 8\sin 2t$, $y(0) = 3, y'(0) = -1$;

6.20. $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

6.21. $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$;

6.22. $y'' + 4y' + 4y = t^3 \cdot e^{2t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$;

6.23. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$, $y(0) = 2, y'(0) = 6$;

6.24. $y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t$, $y(0) = -2, y'(0) = 3$;

6.25. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t$ **6. 26.** $y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t$,

$y(0) = 5, y'(0) = 1$; $y(0) = 3, y'(0) = -1$;

6.27. $y'' + y' - 2y = \ell^{-t}$ **6.28.** $y'' - 2y' = e^{t}\ (t^2 + t - 3)$

$y(0) = -1, y'(0) = 0$; $y(0) = 2, y'(0) = 2$;

6.29. $y'' + y' = 2\cos t$ **6. 30.** $y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t$

$y(0) = 0, y'(0) = 1$ $y(0) = -1, y'(0) = -2.$

Задание 7. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений.

7.1. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$; **7.2.** $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$;

$x(0) = -1, y(0) = 2$. $x(0) = 1, y(0) = 2$.

7.3. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \end{cases}$; **7.4.** $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$;

$x(0) = 1, y(0) = 0$. $x(0) = 0, y(0) = 1$.

7.5. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}$; **7. 6.** $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$;

$x(0) = 1, y(0) = 1$. $x(0) = 0, y(0) = 2$.

7.7. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -5x - 3y + 2 \end{cases}$; **7.8.** $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$;

$x(0) = 2, y(0) = 0$. $x(0) = 0, y(0) = 2$.

7.9. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1 \\ y' = 2x + 2 \end{cases}$; **7.10.** $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$;

$x(0) = 0, y(0) = 1$. $x(0) = -1, y(0) = 0$.

7.11. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}$; **7.12.** $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -4x \end{cases}$;

$x(0) = 0, y(0) = 5$. $x(0) = 3, y(0) = 1$.

7.13. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1 \\ y' = -\dfrac{3}{2}x + y \end{cases}$; **7.14.** $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2 \\ y' = 3x + y + 1 \end{cases}$;

$x(0)=1, y(0)=0$. $\quad$ $x(0)=0, y(0)=2$.

7.15. $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = \dfrac{5}{2}x - y + 2 \end{cases}$; $\quad$ **7.16.** $\begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = 2x + 3 \end{cases}$;

$x(0)=0, y(0)=1$. $\quad$ $x(0)=-1, y(0)=0$.

7.17. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1 \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$; $\quad$ **7.18.** $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2 \\ y' = 4y + 1 \end{cases}$;

$x(0)=2, y(0)=1$. $\quad$ $x(0)=0, y(0)=1$.

7.19. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y + 1 \end{cases}$; $\quad$ **7.20.** $\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = -3x \end{cases}$;

$x(0)=1, y(0)=0$. $\quad$ $x(0)=0, y(0)=1$.

7.21. $\begin{cases} x' = 3y + 2 \\ y' = x + 2y \end{cases}$; **7. 22.** $\begin{cases} x' = x + 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$;

$x(0)=-1, y(0)=1$. $\quad$ $x(0)=0, y(0)=1$.

7.23. $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x + 3y + 1 \end{cases}$; $\quad$ **7. 24.** $\begin{cases} x' = -2x + y + 2 \\ y' = 3x \end{cases}$;

$x(0)=2, y(0)=1$. $\quad$ $x(0)=1, y(0)=0$.

7.25. $\begin{cases} x' = 4x + 3 \\ y' = x + 2y \end{cases}$; **7.26.** $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 2 \end{cases}$;

$x(0)=-1, y(0)=0$. $\quad$ $x(0)=1, y(0)=0$.

7.27. $\begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$ **7.28.** $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$

$x(0)=0, y(0)=1$ $\quad$ $x(0)=0, y(0)=1$

7.29. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 3x \end{cases}$ **7.30.** $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$

$x(0)=0, y(0)=1$ $\quad$ $x(0)=1, y(0)=0$.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2

3.1. Ряды Фурье

3.1.1. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье

Тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, .., \cos nx, \sin nx, ..$$

является ортогональной на отрезке [-π,π] и на всяком отрезке длины 2π тоже, т.е. интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю.

Тригонометрический ряд

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (3.1)$$

коэффициенты которого вычислены по формулам Фурье, т.е.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

называется *рядом Фурье* функции *f(x)*.

Функция *f(x)* называется *кусочно-монотонной* на отрезке [a,b], если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, в каждом из которых функция монотонна.

Достаточный признак сходимости ряда Фурье. Если периодическая с периодом 2π функция является кусочно-монотонной и ограниченной на [-π,π], то ряд Фурье этой функции сходится во всех точках. Сумма полученного ряда S(x) равна значению функции *f(x)* в точках непрерывности функции, а в точках ее разрыва сумма ряда равна полусумме левостороннего и правостороннего пределов функции, т.е., если *x = c* – точка разрыва, то

$$S(x)\Big|_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}. \qquad (3.2)$$

3.1.2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Так как известно свойство определенного интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, если *f(x)* – нечетна, и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$,если *f(x)* – четна, то для четных и нечетных функций имеем следующие ряды Фурье.

Если $f(x)$ является *четной*, то

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx ,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx .$$

Если $f(x)$ является *нечетной*, то

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx ,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx .$$

3.1.3. Ряды Фурье для функций с периодом $2l$

Если функция *f(x)* является периодической с периодом $2l$, то имеют место следующие формулы:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}) ,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx , \; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx , \; b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx .$$

Если $f(x)$ – четна,

то

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} ,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx, a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx .$$

Если $f(x)$ – нечетна,

то

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $b_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$.

Замечание. Если $f(x)$ не является периодической, то эту функцию доопределяют до периодической. Затем получившуюся периодическую функцию раскладывают в ряд Фурье, который будет сходиться к функции *f(x)* на промежутке, где задана эта функция.

Пример 33. Разложить периодическую с периодом Т=2π функцию

$f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ при 0<*x*<2π.

Решение. Полупериод $l=\pi$, а так как для периодической с периодом Т=2π функции коэффициенты Фурье можно вычислять по любому промежутку длины 2π, то в нашем случае имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx,\, a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx,\, b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=-\frac{1}{2\pi}\frac{(\pi-x)^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}((\pi-2\pi)^2-\pi^2)=0.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\pi-x)\cos nxdx.$$

Этот интеграл вычислим по формуле интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Положим $u=\pi-x,\quad dv=\cos nxdx$. Тогда $du=-dx, v=\dfrac{1}{n}\sin nx$.

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{2\pi}\sin nxdx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi}=-\frac{1}{2\pi n^2}(\cos 2\pi-\cos 0)=0.$$

Теперь вычислим b_n.

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\pi-x)\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} u=\pi-x, du=-dx, \\ dv=\sin nxdx, v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi-x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{n}.$$

Подставляя значения коэффициентов в формулу (3.1), получаем в точках непрерывности функции сумму ее ряда Фурье $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

В точках разрыва функции находим сумму ряда по формуле (3.2). В точке x=0 получаем: $S(0)=\frac{-\pi/2+\pi/2}{2}=0$.

Пример 34. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x$ на промежутке (0,π): а) по синусам, б) по косинусам.

Решение.

а) Доопределим функцию $y = x$ до периодической как нечетную.

Тогда

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx.$$

Вычислим интеграл по формуле интегрирования по частям.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\begin{bmatrix}u=x,du=dx\\ dv=\sin nxdx,v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{2}{n}\cos n\pi,$$

т.е.

$$b_n=-\frac{2}{n}\cos n\pi,$$

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cos n\pi\cdot\sin nx,$$

где $x\in(0,\pi)$ или

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n};$$

б) Доопределим теперь функцию до периодической как четную и разложим ее в ряд Фурье по косинусам.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi\ ,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ \cos nx dx = dv, v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - 1\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

При четном n выражение в скобках равно нулю и, значит, $a_n = 0$, а при n нечетном, т.е. при $n = 2m+1$, $a_{2m+1} = \dfrac{-4}{\pi(2m+1)^2}$.

Тогда

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)}{(2m+1)^2}x\ ,\ \text{где}\ x \in (0,\pi).$$

Пример 35. Разложить в ряд Фурье функцию $y = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4 \end{cases}.$

Решение. Разбиваем интервал интегрирования на две части точкой x=2 и полагаем $l = 2$. Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 y dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 6dx + \int_2^4 3x dx\right) = \frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2 + \frac{3}{2}x^2\Big|_2^4\right) = 15.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 y\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_2^4 3x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + 3\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right) =$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi).$$

При n четном $\cos n\pi = 1$ и тогда $a_n = 0$, а при n нечетном $\cos n\pi = -1$ и $a_n = \dfrac{12}{n^2\pi^2}$.

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 y\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4 3x\sin\frac{n\pi x}{2}dx)=$$

$$=\frac{1}{2}(-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2})\Big|_2^4)=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{12}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{3}{n\pi}(8-4\cos n\pi))=\frac{1}{2n\pi}(12-24)=-\frac{6}{n\pi}.$$

Разложение функции в ряд Фурье в точках непрерывности функции имеет вид

$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$, причем в интервале (0;2) сумма ряда $S(x)=6$, а в интервале (2;4) ряд сходится к функции $3x$.

В точке x=2, где функция не определена,

$$S(2)=\frac{1}{2}(f(2-0)+f(2+0))=\frac{6+6}{2}=6.$$

3.2. Кратные интегралы

3.2.1. Двойные интегралы

Определение двойного интеграла. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D плоскости Oxy.

Разобьём область D произвольным образом на элементарные ячейки $\Delta\sigma_i$, в каждой из которых выберем произвольно точку $M_i(\overline{x_i},\overline{y_i})$ (i=1, 2, …, n), затем вычислим значение функции $f(x,y)$ в этой точке и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i},\overline{y_i})\Delta\sigma_i$, называемую интегральной, которая соответствует данному разбиению области D и данному выбору точек M_i.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что max diam $\Delta\sigma_i\to 0$, не зависящий ни от разбиения области D на элементарные ячейки, ни от выбора точек M_i, то он называется двойным интегралом по области D от функции $z=f(x,y)$ и обозначается $\iint_D f(x,y)d\sigma$. Таким образом, по определению

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\max diam\Delta\sigma_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i},\overline{y_i})\Delta\sigma_i\,. \qquad (3.3)$$

В формуле (3.3) $f(x,y)$ называют подынтегральной функцией, D – областью интегрирования, а $d\sigma$ – элементом площади.

Замечание. Так как двойной интеграл не зависит от способа разбиения области D на элементарные ячейки, то в дальнейшем мы будем использовать это обстоятельство для выбора подходящего способа разбиения. Так, например, если двойной интеграл

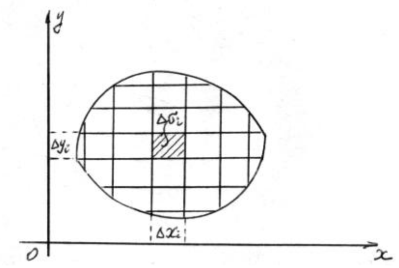

Рис. 1

рассматривают в декартовой системе координат, то разбиение области D удобно производить прямыми, параллельными координатным осям, так как в этом случае элементарными ячейками $\Delta\sigma_i$ являются прямоугольники с площадями $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Тогда элемент площади $d\sigma$ в декартовых координатах полагают равным $d\sigma = dxdy$.

Имеем $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

Двукратные интегралы по области D. Пусть область D такова, что прямая, параллельная оси Oy и проходящая через внутреннюю, то есть не лежащую на границе области точку, пересекает границу области в двух точках. Такую область называют
правильной в направлении оси Oy.

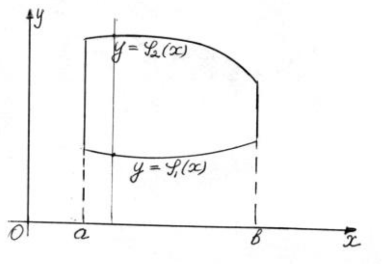

Рис. 2

Предположим, что в рассматриваемом случае область D ограничена линиями: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$, причём, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $a<b$, а функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Область, изображённая на рисунке, является *простой и правильной* в направлении оси Oy.

На рисунке 3 изображена область, правильная, но не являющаяся простой в направлении оси Oy.

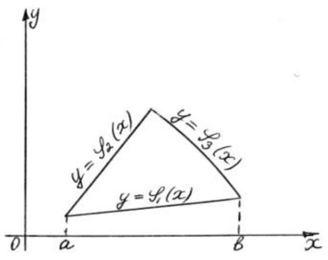

Рис. 3

Введём понятие *двукратного* интеграла по области простой и правильной в направлении оси Oy.

Выражение $I_D=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx$ мы будем называть *двукратным* интегралом по такой области от функции $f(x,y)$. Вычисляя интеграл по переменной y, считая x постоянным, мы получим в результате значение $I_D=\int\limits_a^b\Phi(x)dx,$ равное некоторому числу.

Например, $\int\limits_0^2\left(\int\limits_x^{x\sqrt{3}}(x+y)dy\right)dx=\int\limits_0^2(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_x^{x\sqrt{3}}dx=$

$$=\int\limits_0^2(x^2\sqrt{3}+\frac{3x^2}{2}-x^2-\frac{x^2}{2})dx=\sqrt{3}\int\limits_0^2x^2dx=\sqrt{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Отметим, что двукратный интеграл удобнее записывать в виде

$$I_D=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy.$$

Если область D ограничена линиями $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $y=c$, $y=d$, $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$, а прямая, параллельная оси Ox, пересекает границу области в двух точках (рис. 4),

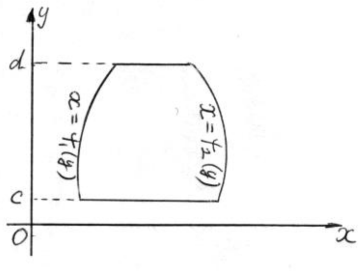

Рис. 4

то мы будем называть область D *простой и правильной в направлении оси Ox*. Выражение $I_D = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ мы будем называть *двукратным* интегралом по области простой и правильной в направлении оси Ox.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Двойной интеграл по области D простой и правильной в направлении оси Oy равен соответствующему двукратному интегралу

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

. Если область D простая и правильная в направлении оси Ox, то

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Если же область D простая и правильная, то есть правильная в направлении обеих координатных осей, то двойной интеграл не зависит от порядка интегрирования:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Замечание. Если область D не является простой, то такую область следует разбить на конечное число простых областей (если это возможно) прямыми, параллельными оси Oy или оси Ox и вычислить двойной интеграл как сумму двойных интегралов по полученным областям.

Пример 36. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\,dxdy$, где D – трапеция с вершинами A(1;1), B(5;1), C(10;2), D(2;2).

Решение. Изобразим трапецию на рисунке 5. Очевидно, область D является простой и правильной в направлении оси Ox. Напишем уравнения прямых AD и BC. Очевидно, что AD имеет уравнение $x=y$, а BC – $x=5y$. Тогда $\iint\limits_D \sqrt{xy-y^2}\,dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_y^{5y}\sqrt{xy-y^2}\,dx=$

$$=\int\limits_1^2\frac{dy}{y}\int\limits_y^{5y}(xy-y^2)^{\frac{1}{2}}d(xy-y^2)=\int\limits_1^2\left.\frac{2(xy-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3y}\right|_y^{5y}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\frac{(5y^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{y}dy=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\frac{(4y^2)^{\frac{3}{2}}}{y}dy=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\frac{8y^3}{y}dy=\frac{16}{3}\int\limits_1^2 y^2dy=$$

$$=\frac{16}{3}\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_1^2=\frac{16}{9}(8-1)=\frac{16}{9}\cdot 7=\frac{112}{9}.$$

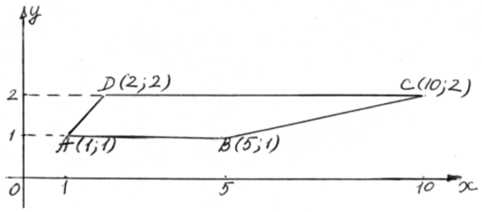

Рис. 5

Пример 37. Вычислить $\iint\limits_D ydxdy,$ где D – треугольник с вершинами O(0;0), A(1;1) и B(0;1).

Решение. Запишем уравнения линий, ограничивающих область D.

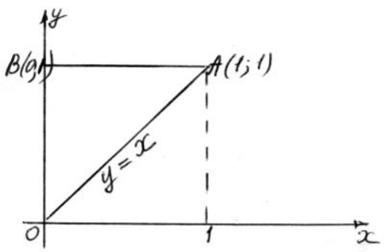

Рис. 6

Получим: $\iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 y\,dy = \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^1 dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3})\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 38. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx.$

Решение. Запишем уравнения линий, ограничивающих области D_1 и D_2, по которым записаны двукратные интегралы. D_1: $y=0$, $y=1$,

$x=\frac{y^2}{9}$, $x=y$, D_2: $y=1$, $y=3$, $x=\frac{y^2}{9}$, $x=1$ (рис. 7).

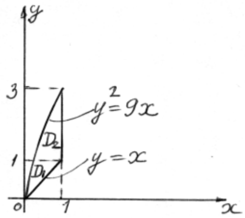

Рис. 7

Область $D=D_1+D_2$ и ограничена снизу отрезком прямой $y=x$, а сверху – ветвью параболы $y^2=9x$. Область D – простая и правильная в направлении оси Oy. Поэтому имеем

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{9x}} f(x,y)dy.$$

Пример 39. Изобразить область, ограниченную окружностями $x^2 + y^2 = 2y$ *и* $x^2 + y^2 = 1$, и записать $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде двукратных, взятых в различных порядках.

Решение. Приведем уравнение $x^2 + y^2 = 2y$ к каноническому виду: $x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$, откуда имеем $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Решая совместно уравнения обеих окружностей, получим абсциссы точек пересечения $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Область D ограничена снизу дугой нижней полуокружности с центром в точке (0,1), а сверху – дугой верхней полуокружности с центром в начале координат. Разрешив уравнения окружностей относительно *y*, найдём уравнения верхней и нижней границ области *D*. Из уравнения $x^2 + y^2 = 1$ имеем $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, а из уравнения $x^2 + (y-1) = 1$ получим $y - 1 = \pm\sqrt{1-x^2}$, а $y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$. Поэтому $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

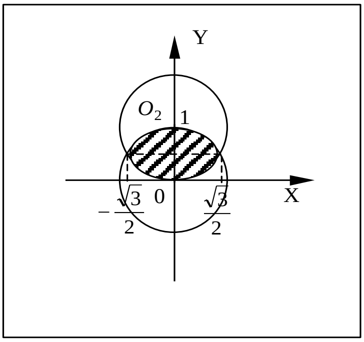

Рис. 8

Изменим порядок интегрирования. Область *D* следует разбить на две области прямой $y = \frac{1}{2}$. Разрешим уравнения окружностей относительно *x*: $x = \pm\sqrt{2y - y^2}$ и $x = \pm\sqrt{1-y^2}$. Границей области D_1 служат дуги окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$ и прямая $y = \frac{1}{2}$, а границей D_2–дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$ и прямая $y = \frac{1}{2}$. Таким образом, имеем:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx \quad .$$

Двойной интеграл в полярных координатах. Допустим, что в декартовых координатах вычисление $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ затруднительно, что часто бывает, если границей области являются кривые, в декартовых уравнениях которых присутствует двучлен x^2+y^2 (окружности, лемнискаты и т.д.). В этом случае для вычисления двойного интеграла желательно перейти от декартовых координат к полярным, полагая

$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr$.

Выражение $d\sigma = rd\varphi dr$ называется *двумерным элементом площади в полярных координатах.*

Рассмотрим $\iint\limits_D F(r,\varphi)d\varphi dr$, где функция $F(r,\varphi)$ непрерывна в области D изменения координат r и φ, и пусть эта область определяется неравенствами $\alpha \le \varphi \le \beta$, $r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ – непрерывные однозначные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$ (рис.9). Тогда по аналогии с прямоугольными декартовыми координатами запишем формулу для вычисления двойного интеграла в полярных координатах сведением его к двукратному

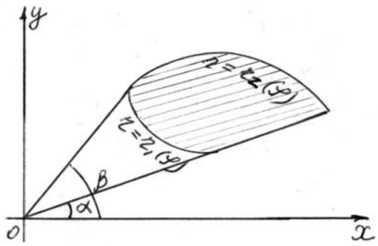

Рис. 9

$$\iint\limits_D F(r;\varphi)d\varphi dr = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r;\varphi)dr.$$

Пример 40. Перейти к полярным координатам и вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

Решение. Положим $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда очевидно $x^2+y^2=r^2$. Уравнение окружности преобразуется к виду $r^2=2ar\cos\varphi$ или $r=2a\cos\varphi$.

Так как $r \geq 0$, $a>0$ (это параметр), то ясно, что и $\cos\varphi \geq 0$, то есть $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно,

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \cdot rdr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{16a^4\cos^4\varphi}{4} d\varphi = 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 4\cdot 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)d\varphi = 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2})d\varphi =$$

$$= 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2})d\varphi = 2a^4 (\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2a^4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3a^4\pi}{2}.$$

3.2.2. Геометрические приложения двойного интеграла

Назовём *цилиндрическим брусом, или цилиндроидом*, тело, ограниченное плоскостью Oxy, поверхностью $z=f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz. Область D, вырезаемая цилиндрическим брусом на плоскости Oxy, называется основанием цилиндра, а цилиндрическая поверхность – его боковой поверхностью.

Пусть $z=f(x,y)$ есть уравнение поверхности, ограничивающей цилиндр сверху, и будем считать, что $f(x,y)>0$, то есть поверхность целиком лежит над плоскостью Oxy.

Объем цилиндроида с основанием D и ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)$ равен $V = \iint_D f(x,y)d\sigma$.

Пусть тело, объем которого требуется найти, ограничено сверху поверхностью $z=f_2(x,y)$, снизу поверхностью $z=f_1(x,y)$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость Oxy является область D. В этом случае объем тела равен разности объемов цилиндроидов, ограниченных сверху поверхностями $z=f_2(x,y)$ и $z=f_1(x,y)$,т. е. $V=V_2-V_1$.

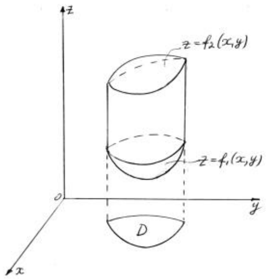

Рис. 10

$$V=\iint_D f_2(x,y)dxdy-\iint_D f_1(x,y)dxdy=\iint_D [f_2(x,y)-f_1(x,y)]dxdy.$$

Легко показать, что формула верна не только в том случае, когда $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ неотрицательны, но и тогда, когда $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – любые непрерывные функции, удовлетворяющие условию $f_2(x,y)\geq f_1(x,y)$ во всех точках области D.

Площади плоских фигур вычисляют по формуле:

$$S=\iint_D d\sigma.$$

В декартовых координатах $S=\iint_D dxdy$.

В полярных координатах $S=\iint_D r d\varphi dr.$

Пример 41. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4x+4$ и $x+y=2$.

Решение. Изобразим фигуру (рис.11). Вычислим площадь этой фигуры. Область D является простой и правильной в направлении оси Ox, поэтому двойной интеграл сводим к двукратному с внешним интегрированием по y. Найдем точки пересечения параболы

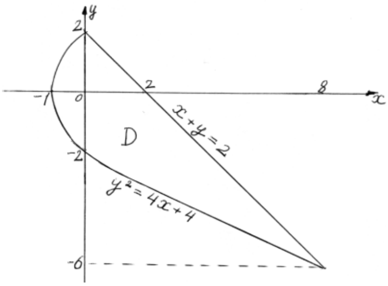

Рис. 11

y^2=4x+4 и прямой $x+y$=2, решив относительно переменной y систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4x+4 \\ x = 2-y \end{cases}.$$

Получим y_1=2, y_2=-6. Тогда

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx = \int_{-6}^{2} x \Bigg|_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dy = \int_{-6}^{2} (2-y-\frac{y^2}{4}+1)dy =$$

$$= \int_{-6}^{2} (3-y-\frac{y^2}{4})dy = (3y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12})\Bigg|_{-6}^{2} = (6-2-\frac{2}{3})-(-18-18+18) = = 21\frac{1}{3}.$$

Пример 42. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, осью Ох и прямой $y=x$.

Решение. Уравнение окружности $x^2+y^2=2x$ приведем к каноническому виду: $x^2+y^2=2x$, $x^2-2x+y^2=0$, $(x-1)^2+y^2=1$. Аналогично уравнение второй окружности будет иметь вид $(x-2)^2+y^2=4$. Изобразим эти окружности на рис. 12.

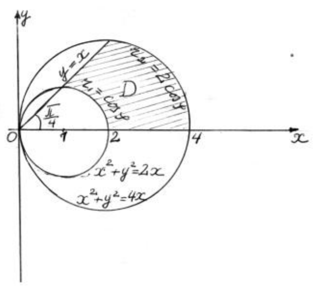

Рис. 12

Площадь области D вычислим в полярных координатах, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда уравнения окружностей, ограничивающих эту область, будут иметь вид $r_1=\cos\varphi$ и $r_2=2\cos\varphi$. В таком случае

$$S = \iint_D r d\varphi dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{3}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{3}{16}(\pi+2).$$

Пример 43. *Вы*числить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

Решение. Произведем замену переменных, полагая $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение кривой примет вид

$$(r^2)^2 = 2a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi),$$

$$r^2 = 2a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Rightarrow r^2 = 2a^2\cos 2\varphi,$$

$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, где $\cos 2\varphi \ge 0$.

Тогда $-\dfrac{\pi}{2} \le 2\varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.С учетом того, что $\cos 2\varphi$ имеет период Т = π, $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \bigcup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

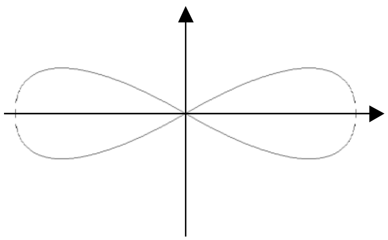

Рис. 13

Вычислим площадь по формуле $S = \iint\limits_D r d\varphi dr$. В силу симметрии фигуры вычислим площадь четвертой части и результат умножим на четыре.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2 2\cos 2\varphi}{2} d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

Площадь всей фигуры, ограниченной данной линией, $S = 2a^2$.

Пример 44. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, x+z=4, z=0.

Решение. Данное тело ограничено сверху плоскостью $x+z=4$, снизу – частью плоскости Oxy, с боков – цилиндрическими поверхностями, направляющими которых являются ветви парабол. Построим тело (рис. 14).

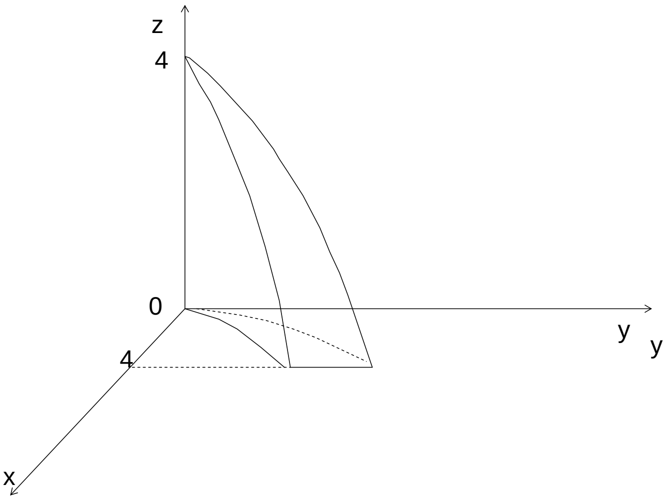

Рис. 14

Вычислим V:

$$V=\iint_D(4-x)dxdy=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)dy=\int_0^4(4-x)dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=$$

$$=\int_0^4(4-x)y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=\int_0^4(4-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx=\int_0^4(4-x)\sqrt{x}dx=$$

$$=\int_0^4(4\sqrt{x}-x\sqrt{x})dx=\left(4\cdot\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-2\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac{128}{15}.$$

Пример 45. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $z=1+\sqrt{x^2+y^2}$ и $x^2+y^2=1$.

Решение. Это тело ограничено конусом с вершиной в точке (1,0,0), снизу – плоскостью Oxy, с боков – круговым цилиндром радиуса r=1.

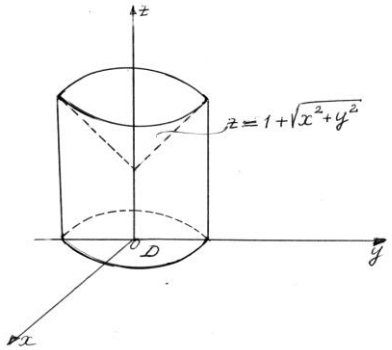

Рис. 15

Вычислим объем.

$$V = \iint\limits_D (1+\sqrt{x^2+y^2})dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1+r) r dr = 2\pi \cdot \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}\pi.$$

3.2.2. Тройные интегралы

Определение тройного интеграла. Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью G. Пусть в области V и на её границе определена некоторая непрерывная функция $u=f(x,y,z)$, где (x,y,z) – прямоугольные декартовы координаты точки области. Например, если $f(x,y,z)\geq 0$, то эту функцию можно считать плотностью распределения некоторого вещества в области V.

Разобьём эту область V произвольным образом на элементарные ячейки Δv_i с объёмами Δv_i (i=1, 2, …, n). В каждой такой ячейке выберем произвольную точку M_i, вычислим значения функции в этих точках и составим интегральную сумму

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$. Назовём *диаметром области* Δv_i максимальное расстояние между двумя точками области, лежащими на границе. Устремим $\max\, diam\ \Delta v_i \to 0$ и перейдём к пределу в интегральных суммах.

Если существует конечный предел составленных интегральных сумм при условии, что $\max\, diam\ \Delta v_i \to 0$, не зависящий ни от разбиения области V на элементарные ячейки, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется *тройным интегралом* по области V от функции $f(x,y,z)$ и обозначается $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv.$ Таким образом, по определению

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \lim_{\max\, diam \Delta v_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i .$$

Если рассматривать интеграл в декартовых координатах, то элемент

$$dv=dxdydz,$$

а

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Пусть пространственная область V, ограниченная замкнутой поверхностью G, удовлетворяет условиям:

а) всякая прямая, параллельная оси Oz, проведённая через внутреннюю точку области V, пересекает поверхность G в двух точках;

б) вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную область D.

Тогда область V мы будем называть *правильной трёхмерной* областью.

Пусть поверхность, ограничивающая область V снизу, имеет уравнение $z=z_1(x,y)$, а поверхность, ограничивающая V сверху – $z=z_2(x,y)$.

В таком случае тройной интеграл по области V вычисляют по формуле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \cdot$

Пример 46. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, x=0, y=0, z=0.

Решение. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{d(x+y+z+1)}{(1+x+y+z)^3} =$

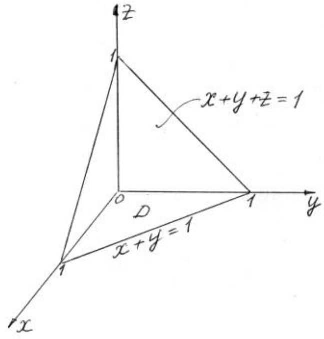

Рис. 16

$$=-\frac{1}{2}\iint_D \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy = -\frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dxdy =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{y}{4}+\frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)dx = \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

При переходе от декартовых координат к *цилиндрическим* по формулам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ тройной интеграл по области V преобразуется к виду

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r d\varphi dr dz,$$

где $rd\varphi drdz$ – это элемент объёма dv в цилиндрических координатах.

Вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла. Объём пространственной области V равен: $V=\iiint_V dv$, $V=\iiint_V dxdydz$, $V=\iiint_V rd\varphi drdz$ соответственно в общем виде, в декартовых координатах и в цилиндрических координатах.

Пример 47. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $z=y$, $z+y=2$.

Решение. Изобразим тело (рис. 17). Сверху это тело ограничено частью плоскости $z+y=2$, снизу – $z=y$, с боков – цилиндрической поверхностью $y = x^2$. D – проекция тела на плоскость Oxy. Найдём линию пересечения плоскостей, ограничивающих тело сверху и снизу. Очевидно, это y=1.

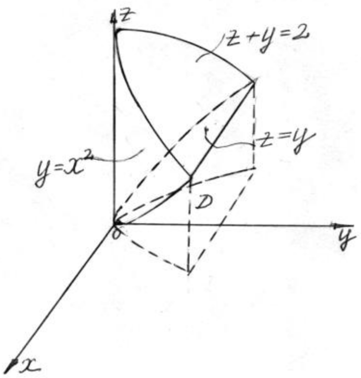

Рис. 17

Тогда $V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_y^{2-y} dz = \iint\limits_D z\Big|_y^{2-y} dxdy = \iint\limits_D (2-2y)dxdy =$

$$= 2\int\limits_0^1 (1-y)dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = 2\int\limits_0^1 (1-y)\cdot x\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy = 2\int\limits_0^1 (1-y)\cdot 2\sqrt{y}dy =$$

$$= 4\int\limits_0^1 \left(\sqrt{y} - \sqrt{y^3}\right)dy = 4\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{15}.$$

Пример 48. Вычислить объём тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3az$ (внутри параболоида).

Решение. Вычислим объём тела, переходя к цилиндрическим координатам. Для этого запишем уравнения поверхностей в цилиндрических координатах, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r=z$. Уравнение сферы преобразуется к виду $r^2 + z^2 = 4a^2$, а уравнение параболоида – $3az=r^2$. Спроектируем тело (рис. 18) на плоскость Oxy. D – это круг, радиус которого найдем, решив совместно уравнения сферы и параболоида:

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = 4a^2 \\ 3az = r^2 \end{cases}, \quad z^2 + 3az - 4a^2 = 0,$$

$z_1=a$, $z_2=-4a$.

Очевидно, поверхности пересекаются при $z=a$. Подставляя $z=a$ в одно из уравнений системы, получим $r = a\sqrt{3}$.

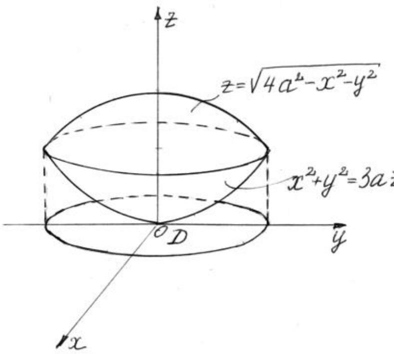

Рис. 18

Вычислим теперь объём тела.

$$V = \iiint\limits_V r\,d\varphi\,dr\,dz = \iint\limits_D r\,d\varphi\,dr \int\limits_{\frac{r^2}{3a}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} dz = \iint\limits_D z\Big|_{\frac{r^2}{3a}}^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \iint\limits_D \left(\sqrt{4a^2-r^2} - \frac{r^2}{3a}\right) r\,d\varphi\,dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4a^2-r^2} - \frac{r^2}{3a}\right) dr =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{a\sqrt{3}} \sqrt{4a^2-r^2}\,d\left(4a^2-r^2\right) - \int\limits_0^{a\sqrt{3}} \frac{r^3}{3a}dr\right) =$$

$$= \left(-\frac{2\pi}{3}\cdot\left(4a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi r^4}{3\cdot 4a}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{3}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2\pi}{3}\left(4a^2\right)^{\frac{3}{2}} -$$

$$- \frac{\left(a\sqrt{3}\right)^4\cdot 2\pi}{3\cdot 4a} = \frac{16\pi}{3}a^3 - \frac{2\pi}{3}a^3 - \frac{3\pi}{2}a^3 = \frac{19}{6}\pi a^3.$$

3.3. Криволинейные и поверхностные интегралы. Теория векторного поля

3.3.1. Криволинейные интегралы первого рода

Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть AB – некоторая кривая, гладкая или кусочно-гладкая, и пусть $f(M)$ – функция, заданная на этой кривой. Рассмотрим некоторое разбиение этой кривой на части $A_{i-1}A_i$ точками $A=A_0$, A_1, …, $A_n=B$, выберем на каждой из дуг $A_{i-1}A_i$ произвольную точку M_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i, \qquad (3.3)$$

где Δl_i – длина дуги $A_{i-1}A_i$. Мы будем называть такие суммы как и ранее интегральными суммами.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм (3.3) при стремлении $\max \Delta l_i$ к нулю, не зависящий ни от разбиения AB на элементарные дуги, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(M)$ по кривой AB и обозначается $\int\limits_{AB} f(M)dl$. Таким образом по определению

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i.$$

Так как точки кривой AB определяются своими координатами (x,y), то функцию $f(M)$, заданную на AB, мы будем писать в виде $f(x,y)$, а сам интеграл $\int\limits_{AB} f(M)dl$ в виде $\int\limits_{AB} f(x,y)dl.$

Отметим, что здесь переменные x и y не являются независимыми, а связаны условием: точка (x,y) лежит на кривой AB.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сведением к определённому интегралу. *Теорема.* Пусть AB – гладкая кривая, заданная уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ ($t\in[t_0,t_1]$), и $f(x,y)$ – функция, заданная и непрерывная на этой кривой. Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt, \qquad (3.4)$$

причём стоящий слева криволинейный интеграл существует тогда и только тогда, когда существует определённый интеграл, стоящий справа.

Замечание. Хотя криволинейный интеграл сводится к определённому интегралу, между этими понятиями есть различие. Определённый интеграл меняет знак, если поменять местами его пределы, то есть $\int\limits_a^b f(x,y)dx = -\int\limits_b^a f(x,y)dx,$ а криволинейный интеграл в силу того, что длины дуг Δl_i положительны всегда, не зависит от выбора направления на кривой AB, то есть от её ориентации:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl.$$

Если кривая AB задана явным уравнением $y=y(x)$ ($a\le x\le b$), то в формуле (3.4) заменим переменную t на x и получим

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_a^b f((x),y(x))\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Пример 49. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой x-2y=4 между точками A(0,-2) и B(4,0).

Решение. Из уравнения прямой выразим y: $y=\dfrac{x-4}{2}$. Тогда

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{(x-4)^2}{4}}=\frac{\sqrt{4x^2+x^2-8x+16}}{2}=$$

$=\dfrac{\sqrt{5x^2-8x+16}}{2}$, $\quad y'=\dfrac{1}{2}$, $\quad dl=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}dx=\dfrac{\sqrt{5}}{2}dx$. Подставляя найденные выражения под знак интеграла, получим:

$$\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5x^2-8x+16}}=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{5}}}=$$

$$=\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{16}{5}-\frac{16}{25}}}=\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{64}{25}}}=$$

$$=\ln\left|x-\frac{4}{5}+\sqrt{x^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{5}}\right|\Bigg|_0^4=\ln\left|4-\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{64}{5}}\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{16}{5}}-\frac{4}{5}\right|=$$

$$=\ln\frac{\frac{16}{5}+\frac{8}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{4}{5}}=\ln\frac{2(2+\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}=\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

3.3.2. Криволинейные интегралы второго рода

Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть $\bar{a}(M)=\{a_x(M),a_y(M)\}$ – вектор – функция, определённая на гладкой кривой AB.

Разобьём кривую AB точками $A=M_0$, M_1, …, $M_n=B$ на n дуг $M_{i-1}M_i$ (i=1, 2, …, n). В каждой такой дуге произвольно выберем точку M_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{a}(M_i^*)\Delta\bar{r}_i=\sum_{i=1}^{n}a_x(M_i^*)\Delta x_i+a_y(M_i^*)\Delta y_i\ ,$$

которую будем называть интегральной.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что max $\Delta x_i\to 0$ и max $\Delta y_i\to 0$ (то есть $\Delta\bar{r}_i\to 0$), не зависящий ни от разбиения *AB* на элементарные дуги, ни от выбора точек M_i^*, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода по кривой AB* и обозначается

$$\int_{AB}\bar{a}(M)d\bar{r}=\int_{AB}a_x(M)dx+a_y(M)dy$$

или

$$\int_{AB}\bar{a}(x,y)d\bar{r}=\int_{AB}a_x(x,y)dx+a_y(x,y)dy.$$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Пусть *AB* – гладкая кривая, заданная параметрическими уравнениями *x=x(t), y=y(t)*, где $t\in[t_1,t_2]$, причём t_1 и t_2 – значения параметра, отвечающие точкам *A* и *B* кривой соответственно, $\bar{a}(x,y)=\{a_x(x,y);a_y(x,y)\}$ – вектор – функция, заданная и непрерывная на этой кривой. Тогда

$$\int_{AB}a_x(x,y)dx+a_y(x,y)dy=\int_{t_1}^{t_2}\left[a_x(x(t),y(t))x'_t+a_y(x(t),y(t))y'_t\right]dt\ .$$

Рассмотрим частные случаи.

1) Если кривая *AB* задана явным уравнением *y=y(x)*, где $x\in[a,b]$, $x=a$ отвечает началу кривой, $x=b$ – концу, то криволинейный интеграл вычисляют следующим образом:

$$\int_{AB}a_x(x,y)dx+a_y(x,y)dy=\int_a^b[a_x(x,y(x))+a_y(x,y(x))y']dx\ ,$$

то есть подставляют под знак интеграла вместо *y* уравнение кривой, вдоль которой вычисляют криволинейный интеграл, и производную функции *y(x)*, то есть y'.

2) Если кривая *AB* задана уравнением $y=y_0$, то $y'\equiv 0$ вдоль этой кривой и тогда вдоль такой линии криволинейный интеграл сводят к определённому так. Если абсцисса точки *A* равна *a*, а абсцисса точки *B* равна *b*, то $\int_{AB}a_x(x,y)dx+a_y(x,y)dy=\int_a^b a_x(x,y_0)dx$.

3) Если кривая AB задана уравнением $x=x_0$, где $c \le y \le d$, то имеем $\int\limits_{AB} a_x(x,y)dx + a_y(x,y)dy = \int\limits_c^d a_y(x_0,y)dy$.

Пример 50. Вычислить $\int\limits_{AB} y^2dx - x^2dy$ вдоль верхней полуокружности $x=cost$, $y=sint$ между точками $A(-1,0)$ и $B(1,0)$.

Решение. Точка пробегает верхнюю полуокружность при изменении параметра t от 0 до π, при этом точке $A(-1,0)$ соответствует значение $t=\pi$, а точке $B(1,0)$ – $t=0$. Подставим под знак криволинейного интеграла уравнения кривой. Тогда

$$\int\limits_{AB} y^2dx - x^2dy = \int\limits_\pi^0 \sin^2 td(\cos t) - \cos^2 td(\sin t) =$$

$$= \int\limits_\pi^0 (1-\cos^2 t)d(\cos t) - (1-\sin^2 t)d(\sin t) =$$

$$= \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right)\Bigg|_\pi^0 = 1 - \frac{1}{3} - \left(\cos\pi - \frac{\cos^3\pi}{3} \right) =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Пример 51. Вычислить $\int\limits_{AB} xydx + x^2dy$

а) вдоль прямой $y=2x+1$ между точками $A(0,1)$ и $B(2,5)$,

б) вдоль параболы $y=x^2$ между точками $A(0,0)$ и $B(2,4)$,

в) вдоль ломаной, проходящей через точки $A(-2,0)$, $C(2,0)$ и $B(2,1)$.

Решение. а) $\int\limits_{AB} xydx + x^2dy = \int\limits_0^2 [x(2x+1) + x^2 \cdot 2]dx =$

$$= \int\limits_0^2 (4x^2 + x)dx = \left(\frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{3} + 2 = \frac{38}{3};$$

б) $\int\limits_{AB} xydx + x^2dy = \int\limits_0^2 (x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx = \int\limits_0^2 3x^3dx = \frac{3x^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{3 \cdot 16}{4} = 12;$

в) изобразим ломаную (рис. 19).

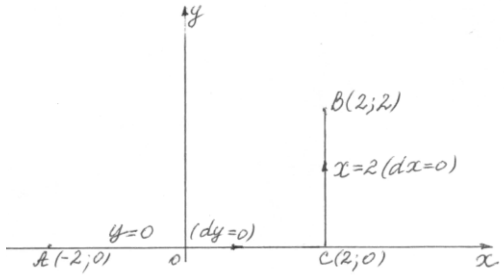

Рис. 19

Тогда имеем:

$$\int_{AB} xydx + x^2dy = \int_{AC} xydx + x^2dy + \int_{CB} xydx + x^2dy = \int_0^2 2^2\,dy = 4y\Big|_0^2 = 8.$$

3.3.3. Поверхностные интегралы

Определение поверхностного интеграла. Пусть в некоторой пространственной области задана гладкая или кусочно-гладкая поверхность *G*. Напомним, что поверхность *является гладкой*, если в каждой точке этой поверхности существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно. Пусть скалярное поле *U(M)* задано на этой поверхности. Произведём разбиение поверхности *G* на *n* частичных поверхностей ΔS_i с площадями, которые мы так же будем обозначать ΔS_i. Выберем в каждой частичной поверхности произвольную точку M_i, составим сумму $\sum_{i=1}^{n} u(M_i)\Delta S_i$, которую мы будем называть интегральной суммой, отвечающей данному разбиению поверхности и данному выбору точек M_i.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм $\lim\limits_{\max diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(M_i)\Delta S_i$, не зависящий ни от разбиения поверхности *G*, ни от выбора точек M_i, то он называется поверхностным интегралом от функции *U(M)* по поверхности *G* и обозначается $\iint_G U(M)dS$.

Таким образом, по определению

$$\lim_{\substack{\max \\ diam\Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} u(M_i)\Delta S_i = \iint_G U(M)dS = \iint_G U((x,y,z)dS .$$

Ориентированная поверхность. Пусть G – гладкая поверхность. Возьмём на этой поверхности какую-нибудь точку, не лежащую на границе этой поверхности, проведём через эту точку нормаль к поверхности и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений.

Любая гладкая поверхность, определённая уравнением $z=z(x,y)$ – *двусторонняя*. Одну сторону (верхнюю) этой поверхности мы получим, выбрав в каждой её точке нормаль так, чтобы она составляла острый угол с осью Oz, а другую сторону (нижнюю) – при противоположной ориентации нормали (рис. 20).

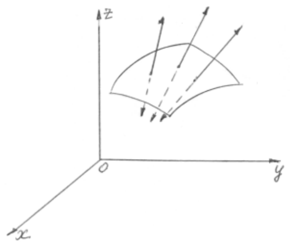

Рис. 20

Ориентация поверхности и направление обхода контура согласованы, если поверхность остаётся слева от контура, ограничивающего эту поверхность.

Вычисление поверхностного интеграла сведением его к двойному интегралу. Пусть G – гладкая ориентированная поверхность, на которой задана непрерывная функция $U=U(M)$.

Вычислим $\iint_G U(M)dS = \iint_G U(x,y,z)dS$. Спроектируем поверхность G на плоскость Oxy. Получим область D (рис. 21).

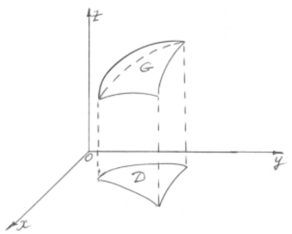

Рис. 21

Вычисление интеграла производят по формуле

$$\iint\limits_G U(x,y,z)dS = \iint\limits_D U(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{\cos\gamma},$$

где γ – угол между нормалью к поверхности и осью *Oz*.

Пример 52. Вычислить $\iint\limits_G (x+y+z)dS$, где G – часть плоскости $3x+y+2z=6$, расположенная в первом октанте.

Решение. Сделаем рисунок, для чего запишем уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1$.

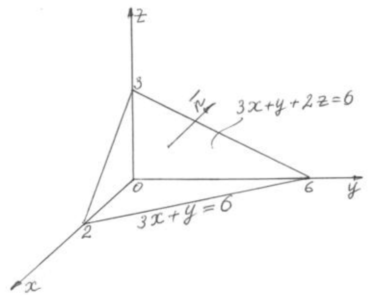

Рис. 22

Нормаль к плоскости имеет координаты $\bar{n}=\{3{,}1{,}2\}$, а единичная нормаль $\bar{n}_0=\left\{\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right\}$, где $\sqrt{14}$ – длина нормали. А, как известно, единичный вектор любого вектора с направляющими косинусами *cosα*, *cosβ*, *cosγ* равен $\bar{a}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$. Так что $\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{14}}$. Тогда $\iint\limits_G (x+y+z)dS = \iint\limits_G (x+y+z)\frac{d\sigma\cdot\sqrt{14}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{2}\iint\limits_G (x+y+z)d\sigma\cdot$

Подставим под знак интеграла вместо *z* уравнение плоскости и получим: $\frac{\sqrt{14}}{2}\iint\limits_G (x+y+z)d\sigma=\frac{\sqrt{14}}{2}\iint\limits_D (x+y+\frac{6-3x-y}{2})dxdy=$

$$=\frac{\sqrt{14}}{2\cdot 2}\iint\limits_D (6+y-x)dxdy=\frac{\sqrt{14}}{4}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{6-3x}(6+y-x)d(y+6-x)=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{4}\int\limits_0^2 \frac{(6+y-x)^2}{2}\Bigg|_0^{6-3x}=\frac{\sqrt{14}}{4\cdot 2}\int\limits_0^2 \left[(6+6-3x-x)^2-(6-x)^2\right]dx=$$

$$= -\frac{\sqrt{14}}{8}\int_0^2 \left[(6-x)^2 - (12-4x)^2\right] dx =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{8}\int_0^2 (6-x)^2\, d(6-x) - \frac{\sqrt{14}}{8}\cdot 16\int_0^2 (3-x)^2\, d(3-x) =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{8}\left.\frac{(6-x)^3}{2}\right|_0^2 - 2\sqrt{14}\left.\frac{(3-x)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{29}{6}\sqrt{14}\,.$$

3.3.4. Элементы теории поля

Если в каждой точке некоторой области задан вектор $\bar{a}(M)$, то говорят, что в области задано *векторное поле*. Векторное поле мы будем обозначать

$\bar{a}(M) = a_X\bar{i} + a_Y\bar{j} + a_Z\bar{k}$ или $\bar{a}(M) = \{a_X, a_Y, a_Z\}$.

Назовём *потоком* векторного поля через поверхность G в направлении нормали к поверхности $\bar{n}$ поверхностный интеграл.

$$П = \iint_G a_n dS\,,$$

где a_n – проекция вектора $\bar{a}$ на нормаль к G. Если $\bar{a}$ – вектор с координатами a_x, a_y, a_z в декартовой системе координат, то $a_n = \bar{a}\cdot\overline{n_0}$, где $\overline{n_0}$ – единичный вектор нормали к поверхности, т.е. $\overline{n_0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали.

$$П = \iint_G a_n dS = \iint_G (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)dS\,.$$

Пусть $\bar{a}$ – поле скоростей несжимаемой жидкости, а раз жидкость несжимаема, то количество жидкости, которое возникает или исчезает внутри некоторой области V, ограниченной поверхностью G, равно потоку жидкости через внешнюю сторону этой поверхности. Назовём это количество жидкости суммарной мощностью источников, если $П>0$, или стоков, если $П<0$, расположенных в области V.

Отношение $\frac{П}{V}$ называется *средней мощностью источников* (или стоков). Средняя мощность – это количество жидкости, возникающее или исчезающее в единице объёма за единицу времени.

Если теперь V устремить к M, то есть объём сжать до размеров точки, то мы получим *плотность* источников (или стоков) в точке M:

$$\lim_{V\to M}\frac{П}{V} = \lim_{V\to M}\frac{\iint_G a_n dS}{V}$$

Плотность источников является скалярной величиной, служит одной из важнейших характеристик исходного поля и называется *дивергенцией или расходимостью поля.*

В декартовых координатах дивергенцию вычисляют по формуле

$$div\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Теорема Остроградского – Гаусса. Поток векторного поля $\bar{a}$ через замкнутую поверхность G, лежащую в этом поле, в направлении её внешней нормали равен тройному интегралу по области V, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля, т.е.

$$\iint_G a_n dS = \iiint_V div\bar{a}\,dv.$$

Пусть в пространстве, в котором задано векторное поле, дана ориентированная линия L, то есть линия, для которой указано направление обхода. *Линейным интегралом* вектора $\bar{a}$ по линии L называется криволинейный интеграл $\int_L \bar{a}d\bar{r}$. Физический смысл этого интеграла: если $\bar{a}$ – поле сил, то линейный интеграл равен работе, совершаемой полем, при перемещении точки, на которую действует сила, вдоль линии L.

Если L – замкнутая линия, то линейный интеграл называется *циркуляцией:* $Ц = \oint_L \bar{a}d\bar{r}$.

Ротором векторного поля $\bar{a}$ называется вектор, который в каждой точке M дифференцируемости поля $\bar{a}$ определяется соотношением

$$(rot_n\bar{a})_M = \lim_{\Delta L \to M} \frac{\oint_{\Delta L} \bar{a} \cdot d\bar{r}}{\Delta S},$$

где ΔL – малый замкнутый контур, ΔS – площадь, охватываемая этим контуром, $\bar{n}$ – нормаль к ΔS.

В физике показывается, что $rot\,\bar{a}$ характеризует вращательную компоненту поля скоростей.

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

Теорема Стокса. Циркуляция дифференцируемого векторного поля $\bar{a}$ по произвольному кусочно-гладкому контуру L равна потоку ротора этого поля через поверхность G, ограниченную этим контуром L.

При этом единичный вектор нормали к поверхности G направлен в такую сторону, чтобы обход контура L происходил в положительном по отношению к $\overline{n}_0$ направлении:

$$\oint\limits_L \overline{a}\cdot d\overline{r} = \iint\limits_G (rot\ \overline{a})_n dS$$

Пример 53. Даны векторное поле $\overline{F} = (2x - y + z)\overline{k}$ и плоскость $(p): 2x - y + 2z - 4 = 0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду. Найти:

1) поток векторного поля через полную поверхность пирамиды в направлении внешней нормали непосредственно и по теореме Остроградского-Гаусса;

2) циркуляцию векторного поля вдоль замкнутого контура, ограничивающего часть плоскости (p),вырезаемую координатными плоскостями, применив теорему Стокса.

Решение. Сделаем чертеж.

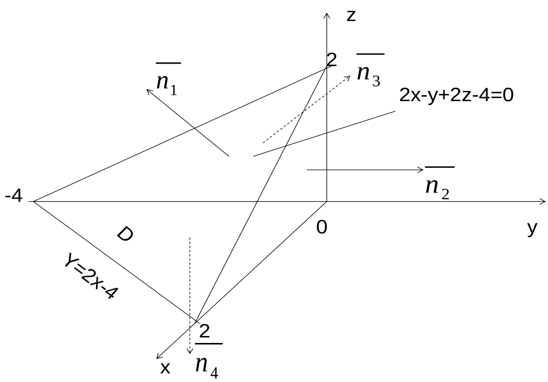

Рис. 23

1) Вычислим поток через часть плоскости, заключенной между координатными плоскостями, в направлении нормали $\overline{n_1}$.Воспользуемся формулой:

$\Pi = \iint\limits_G a_n dS$ или в нашем случае $\Pi = \iint\limits_G F_n dS$. Найдем $F_n = \overline{F}\cdot\overline{n_0}$.

Нормаль к плоскости (p) $\overline{n}_1 = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, длина нормали

$\left|\overline{n_1}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$, а единичный вектор этой нормали $\overline{n_{10}} = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$, при этом $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Тогда $F_n = \overline{F}\cdot\overline{n_{10}} = (2x-y+z)\bar{k}\cdot(\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}) = \frac{2}{3}(2x-y+z)$, а поток через часть плоскости (P) равен поверхностному интегралу

$$\iint_G 2\frac{(2x-y+z)}{3}ds = \frac{2}{3}\iint_G (2x-y+z)\frac{ds}{\cos\gamma} = \iint_D (2x-y+\frac{4-2x+y}{2})dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_{2x-4}^{0}(2x-y+4)dy = -\frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_{2x-4}^{0}(2x-y+4)d(2x-y+4) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^2 (2x-y+4)^2\Big|_{2x-4}^{0} dx = -\frac{1}{4}\int_0^2((2x+4)^2 - 64)dx =$$

$$= -\frac{1}{4}(\frac{(2x+4)^3}{2\cdot 3} - 64x)\Big|_0^2 = \frac{40}{3}.$$

Найдем потоки через боковые и нижнюю грани пирамиды.

Так как нормали к боковым граням пирамиды перпендикулярны к оси Oz, а, значит, и к вектору $\overline{F} = (2x-y+z)\bar{k}$, то потоки через боковые грани пирамиды равны нулю. Вычислим поток через нижнее основание пирамиды.

$$F_n = \overline{F}\cdot\overline{n_4} = (2x-y+z)\bar{k}\cdot(-\bar{k}) = -(2x-y+z).$$

Тогда

$$\text{П} = -\iint_G (2x-y+z)ds = -\iint_D (2x-y)dxdy = -\int_0^2 dx\int_{2x-4}^{0}(2x-y)dy = -\frac{32}{3}.$$

Сложив все потоки, получим поток через полную поверхность пирамиды: $П = \frac{40}{3} - \frac{32}{3} = \frac{8}{3}$.

Вычислим поток через полную поверхность пирамиды по теореме Остроградского. Находим дивергенцию векторного поля:

$$div\overline{F} = \frac{\partial}{\partial z}(2x-y+z) = 1.$$

Тогда $П = \iiint_V div\overline{F}dv = \iiint_V dv = V_{ПИР} = \frac{1}{3}S_{OCH}\cdot h = \frac{1}{3\cdot 2}4\cdot 2\cdot 2 = \frac{8}{3}$.

2) По теореме Стокса вычислим циркуляцию вдоль замкнутого контура, ограничивающего часть плоскости (P). Находим ротор векторного поля.

$$rot\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & 2x-y+z\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 2x-y+z\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 2x-y+z\end{vmatrix}=$$

$$=-\bar{i}+2\bar{j}.$$

$$(rot\overline{F})_n=rot\overline{F}\cdot\overline{n_1}=(-\bar{i}+2\bar{j})(\frac{2}{3}\bar{i}-\frac{1}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k})=-\frac{4}{3}.$$

В таком случае имеем

$$Ц=\iint\limits_G(-\frac{4}{3})ds=-\frac{2}{3}\iint\limits_G\frac{dxdy}{\cos\gamma}=-2\iint\limits_D dxdy=-2S_D=-2\frac{1}{2}4\cdot 2=-8.$$

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

Задание 8. Функцию $f(x)$ разложить в указанном интервале в ряд Фурье и в ряд Фурье по синусам:

8.1. $f(x)=\begin{cases} 1, \ 0<x\le\dfrac{\pi}{2}; \\ x, \ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$ **8.2.** $f(x)=\begin{cases} x, \ 0<x\le 1; \\ 0, \ 1<x<2. \end{cases}$

8.3. $f(x)=\begin{cases} 0, \ 0<x\le\dfrac{\pi}{2}; \\ \pi-x, \ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$ **8. 4.** $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2}, \ 0<x\le 2; \\ 0, \ 2<x<\pi. \end{cases}$

8.5. $f(x)=\begin{cases} 0, \quad 0<x\le\dfrac{1}{2}; \\ -\dfrac{x}{2}, \quad \dfrac{1}{2}<x<1. \end{cases}$ **8.6.** $f(x)=\begin{cases} x, \ 0<x\le\dfrac{\pi}{3}; \\ 1, \ \dfrac{\pi}{3}<x<\pi. \end{cases}$

8.7. $f(x)=\begin{cases} 2x, \ 0<x\le 2; \\ 0, \ 2<x<4. \end{cases}$ **8.8.** $f(x)=\begin{cases} (x-1), \ \ 0<x\le 1, \\ 0, \ \ 1<x<3. \end{cases}$

8.9. $f(x)=\begin{cases} 0, \ 0<x\le 1; \\ 3x, \ 1<x<\pi. \end{cases}$ **8.10.** $f(x)=\begin{cases} 1-2x, \ 0<x\le\dfrac{1}{2}; \\ 0, \dfrac{1}{2}<x<1. \end{cases}$

8.11. $f(x)=\begin{cases} (3x-1), \ 0<x\le\dfrac{1}{3}, \\ 0, \ \dfrac{1}{3}<x<3. \end{cases}$ **8.12**. $f(x)=\begin{cases} x, \quad 0<x\le 1, \\ -1, \quad 1<x<2. \end{cases}$

8.13. $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2}, \ 0<x\le 2; \\ 0, \ 2<x<4. \end{cases}$ **8.14**. $f(x)=\begin{cases} -2x, \ 0<x\le 1; \\ 0, \ 1<x<2. \end{cases}$

8.15. $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{4}, \ 0<x\le 4; \\ 0, \ 4<x<5. \end{cases}$

Функцию $f(x)$ разложить в указанном интервале в ряд Фурье и в ряд Фурье по косинусам:

8.16. $f(x)=\begin{cases}1,\ 0<\mathrm{x}\le\dfrac{\pi}{2};\\ x,\ \dfrac{\pi}{2}<\mathrm{x}<\pi.\end{cases}$ **8.17.** $f(x)=\begin{cases}x,\ 0<\mathrm{x}\le 1;\\ 0,\ 1<\mathrm{x}<2.\end{cases}$

8.18. $f(x)=\begin{cases}0,\ 0<\mathrm{x}\le\dfrac{\pi}{2};\\ \pi-x,\ \dfrac{\pi}{2}<\mathrm{x}<\pi.\end{cases}$ **8.19.** $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2},\ 0<x\le 2;\\ 0,\ 2<x<\pi.\end{cases}$

8.20. $f(x)=\begin{cases}0,\quad 0<x\le\dfrac{1}{2};\\ -\dfrac{x}{2},\quad \dfrac{1}{2}<x<1.\end{cases}$ **8.21.** $f(x)=\begin{cases}x,\ 0<x\le\dfrac{\pi}{3};\\ 1,\quad \dfrac{\pi}{3}<x<\pi.\end{cases}$

8.22. $f(x)=\begin{cases}2x,\ 0<\mathrm{x}\le 2;\\ 0,\ 2<\mathrm{x}<4.\end{cases}$ **8.23.** $f(x)=\begin{cases}(x-1),\quad 0<x\le 1,\\ 0,\qquad 1<x<3.\end{cases}$

8.24. $f(x)=\begin{cases}0,\ 0<\mathrm{x}\le 1;\\ 3x,\ 1<\mathrm{x}<\pi.\end{cases}$ **8.25.** $f(x)=\begin{cases}1-2x,\ 0<\mathrm{x}\le\dfrac{1}{2};\\ 0,\dfrac{1}{2}<\mathrm{x}<1.\end{cases}$

8.26. $f(x)=\begin{cases}(3x-1),\quad 0<x\le\dfrac{1}{3},\\ 0,\quad \dfrac{1}{3}<x<3.\end{cases}$ **8.27**. $f(x)=\begin{cases}x,\qquad 0<x\le 1,\\ -1,\quad 1<x<2.\end{cases}$

8.28. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2},\ 0<x\le 2;\\ 0,\ 2<x<4.\end{cases}$ **8.29**. $f(x)=\begin{cases}-2x,\ 0<\mathrm{x}\le 1;\\ 0,\ 1<\mathrm{x}<2.\end{cases}$

8.30. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{4},\ 0<x\le 4;\\ 0,\ 4<x<5.\end{cases}$

Задание 9. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

9.1. $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}fdx.$ **9.2.** $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0}fdx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0}fdx.$

9.3. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{y}fdx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}}fdx.$ **9.4.** $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}fdx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}}fdx.$

9.5. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{-1}dy\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0}fdx+\int_{-1}^{0}dy\int_{x}^{0}fdx.$

9.6. $\displaystyle\int_{0}^{1/\sqrt{2}}dy\int_{0}^{\arcsin y}fdx+\int_{1/\sqrt{2}}^{1}dy\int_{0}^{\arccos y}fdx.$

9.7. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}dy\int_{0}^{\sqrt{2+y}}fdx+\int_{-1}^{0}dy\int_{0}^{\sqrt{-y}}fdx.$

9.8. $\displaystyle\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{0}fdx+\int_{1}^{e}dy\int_{-1}^{-\ln y}fdx.$

9.9. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{-1}dx\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}}fdy+\int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{x^2}fdy.$

9.10. $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}fdy+\int_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}fdy.$

9.11. $\displaystyle\int_{0}^{1}dx\int_{1-x^2}^{1}fdy+\int_{1}^{e}dx\int_{\ln x}^{1}fdy.$

9.12. $\displaystyle\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{\sqrt[3]{y}}fdx+\int_{1}^{2}dy\int_{0}^{2-y}fdx.$

9.13. $\displaystyle\int_{0}^{\pi.4}dy\int_{0}^{\sin y}fdx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}dy\int_{0}^{\cos y}fdx.$

9.14. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}dx\int_{-(2+x)}^{0}fdy+\int_{-1}^{0}dx\int_{\sqrt[3]{x}}^{0}fdy.$

9.15. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}dy\int_{0}^{\sin y}fdx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}dy\int_{0}^{\cos y}fdx.$

9.16. $\displaystyle\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{0}fdx+\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{0}fdx.$

9.17. $\displaystyle\int_{0}^{1}dy\int_{-y}^{0}fdx+\int_{1}^{\sqrt{2}}dy\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0}fdx.$

9.18. $\displaystyle\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{y^3}fdx+\int_{1}^{2}dy\int_{0}^{2-y}fdx.$

9.19. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}}dx\int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}fdy+\int_{\sqrt{3}}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}fdy.$

9.20. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}dy\int_{-(2+y)}^{0}fdx+\int_{-1}^{0}dy\int_{\sqrt[3]{y}}^{0}fdx.$

9.21. $\displaystyle\int_{0}^{1}dy\int_{-0}^{y}fdx+\int_{1}^{e}dy\int_{\ln y}^{1}fdx.$

9.22. $\displaystyle\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{x^2}fdy+\int_{1}^{\sqrt{2}}dx\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}}fdy.$

9.23. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}dx\int_{0}^{\sin x}fdy+\int_{\pi/4}^{\pi/2}dx\int_{0}^{\cos x}fdy.$

9.24. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{1}dy\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0}fdx+\int_{-1}^{0}dy\int_{y}^{0}fdx.$

9.25. $\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy.$ **9.26.** $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy.$

9.27. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f dy.$ **9.28.** $\int_0^1 dx \int_0^x f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$

9.29. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$ **9.30.** $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f dy.$

Задание 10. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

10.1. $y = \dfrac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$

10.2. $x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$

10.3. $x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 \, (y \le 0).$

10.4. $x = 8 - y^2, x = -2y.$

10.5. $y = \dfrac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8.$

10.6. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}, y = \dfrac{1}{2x}, x = 16.$

10.7. $x = 5 - y^2, x = -4y.$

10.8. $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 \, (y \le 0).$

10.9. $y = \sqrt{12 - x^2}, y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, x = 0, (x \ge 0).$

10.10. $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}, y = \dfrac{3}{2x}, x = 9.$

10.11. $y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3}y = x^2, x = 0, (x \ge 0).$

10.12. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \ge 0).$

10.13. $y = 20 - x^2, y = -8x.$

10.14. $y = \sqrt{18 - x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$

10.15. $y = 32 - x^2, y = -4x.$

10.16. $y=\dfrac{2}{x}, y=5e^{x}, y=2, y=5.$

10.17. $x^2+y^2=36, 3\sqrt{2}y=x^2 (y\ge 0).$

10.18. $y=3\sqrt{x}, y=\dfrac{3}{x}, x=4.$

10.19. $y=6-\sqrt{36-x^2}, y=\sqrt{36-x^2}, x=0, (x\ge 0).$

10.20. $y=\dfrac{25}{4}-x^2, y=x-\dfrac{5}{2}.$

10.21. $y=\sqrt{x}, y=\dfrac{1}{x}, x=16.$

10.22. $y=\dfrac{2}{x}, y=7e^{x}, y=2, y=7.$

10.23. $y=27-y^2, x=-6y.$

10.24. $x=\sqrt{72-y^2}, 6x=y^2, y=0 (y\ge 0).$

10.25. $y=\sqrt{6-x^2}, y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}.$

10.26. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}, y=\dfrac{3}{2x}, x=4.$

10.27. $y=\sin x, y=\cos x, x=0(x\le 0.$

10.28. $y=\dfrac{1}{x}, y=6e^{x}, y=1, y=6.$

10.29. $y=3\sqrt{x}, y=\dfrac{3}{x}, x=94.$

10.30. $y=11-x^2, y=-10x.$

Задание 11. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

11.1. $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.2. $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

11.3. $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.4. $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=x.$

11.5. $y^2-8y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.6. $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=x.$

11.7. $y^2-4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=x, x=0.$

11.8. $x^2-2x+y^2=0, x^2-10x+y^2=0, y=0, y=\sqrt{3}x.$

11.9. $y^2-6y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x, x=0.$

11.10. $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.11. $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=\sqrt{3}x, x=0.$

11.12. $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.13. $y^2-4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=\sqrt{3}x, x=0.$

11.14. $x^2-2x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.15. $y^2-2y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, x=0.$

11.16. $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$

11.17. $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.18. $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$

11.19. $y^2-4y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.20. $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=x.$

11.21. $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=x, x=0.$

11.22. $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=\sqrt{3}x.$

11.23. $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0.$

11.24. $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=\sqrt{3}x.$

11.25. $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0.$

11.26. $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.27. $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=\sqrt{3}x, x=0.$

11.28. $x^2-4x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

11.29. $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, x=0.$

11.30. $x^2-6x+y^2=0, x^2-10x+y^2=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x.$

Задание 12. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

12.1. $y=16\sqrt{2x}, y=\sqrt{2x}, z=0, x+z=2.$

12.2. $y=5\sqrt{x}, y=\dfrac{5x}{3}, z=0, z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3}.$

12.3. $x^2+y^2=2, y=\sqrt{x}, y=0, z=0, z=15x.$

12.4. $x+y=2, y=\sqrt{x}, z=12y, z=0.$

12. 5. $x=20\sqrt{2y}, x=5\sqrt{2y}, z=0, x+y=\dfrac{1}{2}.$

12.6. $x=\dfrac{5\sqrt{y}}{2}, x=\dfrac{5y}{6}, z=0, z=\dfrac{5}{6}(3+\sqrt{y}).$

12.7. $x^2+y^2=2, x=\sqrt{y}, x=0, z=0, z=30y.$

12.8. $x+y=2, x=\sqrt{y}, z=\dfrac{12x}{5}, z=0.$

12.9. $y=17\sqrt{2x}, y=2\sqrt{2x}, z=0, x+z=\dfrac{1}{2}.$

12.10. $y=\dfrac{5\sqrt{x}}{3}, y=\dfrac{5x}{9}, z=0, z=\dfrac{5(3+\sqrt{x})}{9}.$

12.11. $x^2+y^2=8, y=\sqrt{2x}, y=0, z=0, z=\dfrac{15x}{11}.$

12.12. $x+y=4, y=\sqrt{2x}, z=3y, z=0.$

12.13. $x=\dfrac{5\sqrt{y}}{6}, x=\dfrac{5y}{18}, z=0, z=\dfrac{5}{18}(3+\sqrt{y}).$

12.14. $x=19\sqrt{2y}, x=4\sqrt{2y}, z=0, z+y=2.$

12.15. $x^2+y^2=8, x=\sqrt{2y}, x=0, z=\dfrac{30y}{11}, z=0.$

12.16. $x+y=4, x=\sqrt{2y}, z=\dfrac{3x}{5}, z=0.$

12.17. $y=6\sqrt{3x}, y=\sqrt{3x}, z=0, x+z=3.$

12.18. $y=\dfrac{5}{6}\sqrt{x}, y=\dfrac{5}{18}x, z=0, z=\dfrac{5}{18}(3+\sqrt{x}).$

12. 19. $x^2+y^2=18, y=\sqrt{3x}, y=0, z=0, z=\dfrac{5x}{11}.$

12.20. $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0.$

12.21. $x=7\sqrt{3y}, x=2\sqrt{3y}, z=0, z+y=3.$

12.22. $y=\dfrac{5\sqrt{y}}{3}, x=\dfrac{5y}{9}, z=0, z=\dfrac{5(3+\sqrt{y})}{9}.$

12.23. $x^2+y^2=18, x=\sqrt{3y}, x=0, z=0, z=\dfrac{10y}{11}.$

12.24. $x+y=6, x=\sqrt{3y}, z=\dfrac{4x}{5}, z=0.$

12.25. $y=\sqrt{15x}, y=\sqrt{15x}, z=0, z=\sqrt{15}(1+\sqrt{x}).$

12.26. $x^2+y^2=50, y=\sqrt{5x}, y=0, z=0, z=\dfrac{3x}{11}.$

12.27. $x+y=8, y=\sqrt{4x}, z=3y, z=0.$

12.28. $x=16\sqrt{2y}, x=\sqrt{2y}, z=0, z+y=2.$

12.29. $x=15\sqrt{y}, x=15y, z=0, z=15(1+\sqrt{y}).$

12.30. $x^2+y^2=50, x=\sqrt{5y}, x=0, z=0, z=\dfrac{6y}{11}.$

Задание 13. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

13.1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \dfrac{9z}{2}=x^2+y^2.$

13.2. $z=\dfrac{15\sqrt{x^2+y^2}}{2}, z=\dfrac{17}{2}-x^2-y^2.$

13.3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{255}}.$

13.4. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}, z=1, x^2+y^2=60.$

(внутри цилиндра)

13.5. $z=\sqrt{\frac{16}{9}-x^2-y^2}, 2z=x^2+y^2.$

13.6. $z=3\sqrt{x^2+y^2}, z=10-x^2-y^2.$

13.7. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}.$

13.8. $z=\sqrt{100-x^2-y^2}, z=6, x^2+y^2=51.$
(внутри цилиндра)

13.9. $z=\frac{21\sqrt{x^2+y^2}}{2}, z=\frac{23}{2}-x^2-y^2.$

13.10. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}, 6z=x^2+y^2.$

13.11. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{80}}.$

13.12. $z=\sqrt{81-x^2-y^2}, z=5, x^2+y^2=45$
(внутри цилиндра).

13.13. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \frac{3z}{2}=x^2+y^2.$

13.14. $z=6\sqrt{x^2+y^2}, z=16-x^2-y^2.$

13.15. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}.$

13.16. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}, z=4, x^2+y^2=39$
(внутри цилиндра).

13.17. $z=\sqrt{144-x^2-y^2}, 18z=x^2+y^2.$

13.18. $z=3\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}, z=\frac{5}{2}-x^2-y^2.$

13.19. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}}.$

13.20. $z=\sqrt{49-x^2-y^2}, z=3, x^2+y^2=33$
(внутри цилиндра).

13.21. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}, 9z=x^2+y^2.$

13.22. $z = 9\sqrt{x^2+y^2}, z = 22 - x^2 - y^2$.

13.23. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}$.

13.24. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, z = 2, x^2 + y^2 = 27$ (внутри цилиндра).

13.25. $z = \sqrt{\dfrac{4}{9} - x^2 - y^2}, z = x^2 + y^2$.

13.26. $z = 12\sqrt{x^2+y^2}, z = 28 - x^2 - y^2$.

13.27. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{8}}$.

13.28. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = 1, x^2 + y^2 = 21$ (внутри цилиндра).

13.29. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, 12z = x^2 + y^2$.

13.30. $z = \dfrac{9\sqrt{x^2+y^2}}{2}, z = \dfrac{11}{2} - x^2 - y^2$.

Задание 14. Вычислить криволинейные интегралы

14.1. $\int\limits_l (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где l – дуга $y = x^2$ от точки A(-1;1) до точки B(1;1).

14.2. $\int\limits_l \dfrac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где l – дуга $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$ от точки A(2;0) до точки B(0;2).

14.3. $\int\limits_l (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, где l – дуга $y = x^3$ от точки O(0;0) до точки A(1;1).

14.4. $\oint\limits_l (x + 2y)dx + (x - y)dy$, где l – окружность $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода.

14.5. $\oint\limits_l (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, где l – эллипс $x = 3\cos t, y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода.

14.6. $\oint\limits_{l}(xy-1)dx+x^2ydy$, где l – эллипс $x=\cos t, y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

14.7. $\int\limits_{l}2xydx-x^2dy$, где l – ломаная OBA; O(0;0), A(2;1), B(2;0).

14.8. $\int\limits_{l}(x^2-y^2)dx+xydy$, где l – отрезок AB; A(1;1), B(3;4)

14.9. $\int\limits_{l}\cos ydx-\sin xdy$, где l – отрезок AB; A($2\pi;-2\pi$), B($-2\pi;2\pi$).

14.10. $\int\limits_{l}\frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, где l – отрезок AB; A(1;2), B(3;6).

14.11. $\int\limits_{l}xydx+(y-x)dy$, где l – дуга $y=x^3$ от точки A(0;0) до точки B(1;1).

14.12. $\int\limits_{l}(x^2+y^2)dx+(x+y^2)dy$, где l – ломаная ABC; A(1;2), B(3;2), C(3;5).

14.13. $\int\limits_{l}xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где l – отрезок OB; O(0;0;0), B(-2;4;5).

14.14. $\int\limits_{l}ydx+xdy$, где l – дуга окружности $x=R\cos t, y=R\sin t$ от точки O(R;0) до точки A(0;R).

14.15. $\int\limits_{l}xydy+(y-x)dy$, где l – дуга $y^2=x$ от точки O(0;0) до точки A(1;1).

14.16. $\int\limits_{l}xdx+ydy+(x-y+1)dz$, где l – отрезок AB; A(1;1;1), B(2;3;4).

14.17. $\int\limits_{l}(xy-1)dx+x^2ydy$, где l – дуга параболы $y^2=4-4x$ от точки A(1;0) до точки B(0;2).

14.18. $\int\limits_{l}xydx+(y-x)dy$, где l – дуга $y=x^2$ от точки O(0;0) до точки B(1;1).

14.19. $\int\limits_{l}(xy-y^2)dx+xdy$, где l – дуга $y=x^2$ от точки O(0;0) до точки B(1;1).

14.20. $\int\limits_{l}xdy-ydx$, где l – дуга $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t$ от точки A(2;0) до точки B(0;2).

14.21. $\int\limits_{l}(xy-x)dx+\frac{1}{2}x^2dy$, где l – дуга $y^2=4x$ от точки A(0;0) до точки B(1;2).

14.22. $\int\limits_{l}(xy-1)dx+x^2ydy$, где l – отрезок AB; A(1;0), B(0;2).

14.23. $\int\limits_{l}2xydx+y^2dy+z^2dz$, где l – дуга одного витка винтовой линии $x=\cos t, y=\sin t, z=2t$ от точки A(1;0;0) до точки B(1;0;4π).

14.24. $\int\limits_{l}\frac{y}{x}dx+xdy$, где l – дуга $y=\ln x$ от точки A(1;0) до точки B(l;1).

14.25. $\oint\limits_{l}ydx-xdy$, где l – эллипс $x=3\cos t, y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

14.26. $\int\limits_{l}2xydx-x^2dy$, где l – дуга $y=\frac{x^2}{4}$ от точки O(0;0) до точки A(2;1).

14.27. $\int\limits_{l}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, где l – ломаная $y=|x|$ от точки A(-1;1) до точки B(2;2).

14.28. $\int\limits_{l}2xydx-x^2dy+zdz$, где l – отрезок OA; O(0;0;0), A(2;1;-1).

14.29. $\oint\limits_{l}xdy-ydx$, где l – контур треугольника ABC; A(-1;0), B(1;0),C(0;1) при положительном направлении обхода.

14.30. $\int\limits_{l}(x^2+y^2)dx+(x+y^2)dy$, где l – ломаная ACB; A(2;1), C(2;0), B(5;3).

Задание 15. Вычислить криволинейные интегралы.

15.1. $\int\limits_l \sqrt{2-z^2}\,(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, где l – дуга $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, 0\le t\le 2\pi$.

15.2. $\oint\limits_l (x^2+y^2)dl$, где l – окружность $x^2+y^2=4$ при положительном направлении обхода.

15.3. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где l – отрезок OB; O(0;0), B(2;2).

15.4. $\int\limits_l (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$, где l – отрезок AB; A(-1;0), B(0;1).

15.5. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, где l – отрезок AB; A(0;4), B(4;0).

15.6. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где l – дуга $\rho=2(1+\cos\varphi), 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

15.7. $\int\limits_l ydl$, где l – дуга $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ между точками A(1;0) и B(0;1).

15.8. $\int\limits_l ydl$, где l – дуга $y^2=\frac{2}{3}x$ между точками O(0;0) и B($\frac{\sqrt{35}}{6}$;$\frac{\sqrt{35}}{3}$).

15.9. $\int\limits_l (x^2+y^2+z^2)dl$, где l – дуга $x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}t, 0\le t\le 2\pi$.

15.10. $\int\limits_l arctg\frac{y}{x}dl$, где l – дуга $\rho=(1+\cos\varphi), 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

15.11. $\int\limits_l \sqrt{2y}dl$, где l – первая арка циклоиды $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$.

15.12. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где l – отрезок OA; O(0;0) и A(1;2).

15.13. $\oint\limits_l (x-y)dl$, где l – окружность $x^2+y^2=ax.$

15.14. $\oint\limits_l xydl$, где l – контур прямоугольника с вершинами O(0;0), A(4;0), B(4;2), C(0;2).

15.15. $\oint\limits_l (x+y)dl$, где l – контур треугольника с вершинами A(1;0), B(0;1), O(0;0).

15.16. $\int\limits_l \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, где l – первый виток винтовой линии $x=2\cos t, y=2\sin t, z=2t$.

15.17. $\oint\limits_l (x+y)dl$, где l – контур треугольника с вершинами O(0;0),A(-1;0), B(0;1).

15.18. $\int\limits_l (x+y)dl$, где l – дуга $\rho^2=\cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

15.19. $\oint\limits_l \sqrt{x^2+y^2}dl$, где l – -окружность $x^2+y^2=2y$.

15.20. $\oint\limits_l xydl$, где l – контур прямоугольника с вершинами O(0;0), A(5;0), B(5;3), C(0;3).

15.21. $\oint\limits_l \sqrt{x^2+y^2}dl$, где l – окружность $x^2+y^2=4y$.

15.22. $\int\limits_l (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y})dl$, где l – дуга $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ между точками A(1;0) и B(0;1).

15.23. $\int\limits_l xydl$, где l – контур квадрата со сторонами $x=\pm 1, y=\pm 1$.

15.24. $\int\limits_l y^2 dl$, где l – первая арка циклоиды $x=t-\sin t, y=1-\cos t$.

15.25. $\oint\limits_l xydl$,где l – контур прямоугольника с вершинами A(2;0), B(4;0),C(4;3),D(2;3).

15.26. $\int\limits_l \frac{dl}{x-y}$, где l – отрезок AB;A(1;2),B(6;1).

15.27. $\int\limits_l (x^2+y^2)dl$, где l – первая четверть окружности $\rho = 2$.

15.28. $\int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где l – отрезок AB;A(1;1;1),B(2;2;2).

15.29. $\oint\limits_l (x-y)dl$, где l – окружность $x^2+y^2=2x$.

15.30. $\int\limits_l (x+y)dl$, где l – первый виток лемнискаты $\rho^2 = 7\cos 2\varphi$.

Задание 16. Даны векторное поле $\overline{F} = F_X\,\overline{i} + F_Y\,\overline{j} + F_Z\,\overline{k}$ и плоскость $(p): Ax+By+Cz+D=0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду. Найти:

1) поток векторного поля через полную поверхность пирамиды в направлении внешней нормали непосредственно и по теореме Остроградского-Гаусса;

2) циркуляцию векторного поля вдоль замкнутого контура, ограничивающего часть плоскости (p), вырезаемую координатными плоскостями, применив теорему Стокса.

16.1. $\overline{F} = (x+y+z)\overline{i}$; $2x-y+z-4=0$.

16.2. $\overline{F} = (x+y+2z)\overline{j}$; $2x+y+z-2=0$.

16.3. $\overline{F} = (x+2y-z)\overline{k}$; $2x-2y+z-4=0$.

16.4. $\overline{F} = (x-y+3z)\overline{i}$; $2x-y+2z-2=0$.

16.5. $\overline{F} = (x+y+z)\overline{j}$; $2x+2y+z-4=0$.

16.6. $\overline{F} = (x+z)\overline{k}$; $x-3y+z-3=0$.

16.7. $\overline{F} = (x+y+z)\overline{i}$; $2x-y+z-4=0$.

16.8. $\overline{F} = (2x+y+2z)\overline{j}$; $x+y+2z-6=0$

16.9. $\overline{F} = (3x+3y+z)\overline{k}$; $2x-2y+z-6=0$.

16.10. $\overline{F} = (x+y+z)\overline{i}$; $2x-y+z-4=0$.

16.11. $\overline{F} = (x+z)\overline{i}$; $x+y+z-2=0$.

16.12. $\overline{F} = (-x+y+z)\overline{j}$; $2x-y+2z-2=0$.

16.13. $\overline{F} = (x+7z)\overline{k}$; $2x+y+z-4=0$.

16.14. $\overline{F}=(x+2y-z)\overline{i}$; $\quad x-2y-2z+4=0$.

16.15. $\overline{F}=(2x+3y-3z)\overline{j}$; $\quad 2x-3y+2z-6=0$.

16.16. $\overline{F}=(2x+4y+3z)\overline{k}$; $\quad 3x+2y+3z-6=0$.

16.17. $\overline{F}=(x-y+z)\overline{i}$; $\quad 3x-y+z-3=0$.

16.18. $\overline{F}=(3x+4y+2z)\overline{j}$; $\quad x+y+2z-4=0$.

16.19. $\overline{F}=(5x+2y+3z)\overline{k}$; $\quad 2x+y+z-4=0$.

16.20. $\overline{F}=(x-3y+6z)\overline{i}$; $\quad x-y+2z+4=0$

16.21. $\overline{F}=(x+4y+z)\overline{j}$; $\quad 2x-4y+z-4=0$.

16.22. $\overline{F}=(x+y+z)\overline{k}$; $\quad 2x-y+4z-4=0$.

16.23. $\overline{F}=(x+y+6z)\overline{i}$; $\quad 3x-y+6z-6=0$.

16.24. $\overline{F}=(x+y-4z)\overline{j}$; $\quad 2x-y+4z-4=0$.

16.25. $\overline{F}=(3x+2y+z)\overline{k}$; $\quad 2x+2y+z-2=0$.

16.26. $\overline{F}=(3x+y-2z)\overline{i}$; $\quad 2x+y-2z-4=0$.

16.27. $\overline{F}=(x+3y+4z)\overline{j}$; $\quad 2x-y+z-4=0$.

16.28. $\overline{F}=(x+5y+4z)\overline{k}$; $\quad x+y+4z-4=0$.

16.29. $\overline{F}=(4x-5y+z)\overline{i}$; $\quad 2x+2y+z-2=0$.

16.30. $\overline{F}=(4x+y+3z)\overline{j}$; $\quad 2x-2y+3z-6=0$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Никулина Людмила Сергеевна
Дубинина Любовь Яковлевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практикум

Часть 2

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 12.10.09. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. .
Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано: множительный участок ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57