Министерство образования Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Ю.Е. ШИШМАРЁВ
Е.Д. ЕМЦЕВА
К.С. СОЛОДУХИН

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Часть 1

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2000

ББК 22.1
Ш 55

Рецензент: А.А. Степанова, канд. физ.-мат. наук, доцент

Шишмарёв Ю.Е., Емцева Е.Д., Солодухин К.С.
Ш 55 ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА: Сборник задач. Ч. 1. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2000. – 76 с.

Пособие является первой частью сборника задач по дискретной математике и включает задачи (с разобранными примерами) по следующим разделам: метод математической индукции, алгебра высказываний и ее некоторые приложения, теория множеств и теория предикатов.

Для преподавателей и студентов всех форм обучения тех специальностей, на которых изучается курс дискретной математики.

ББК 22.1

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие представляет собой сборник задач с разобранными примерами по темам, которым посвящена первая часть курса лекций по дискретной математике: Ю.Е. Шишмарев. Дискретная математика: Конспект лекций. Ч. 1. – Владивосток: Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, 1997. Задачи данного сборника предлагается использовать при составлении заданий для контрольных работ и индивидуальных домашних заданий для студентов всех форм обучения тех специальностей, учебные планы которых предполагают изучение дискретной математики. Кроме того, их можно использовать при проведении практических занятий со студентами очной формы обучения данных специальностей.

Структура предлагаемого учебного пособия соответствует, хотя и не полностью идентична, структуре указанного курса лекций. Поэтому в некоторых разделах отсутствуют разобранные примеры. А именно в тех, соответствующие которым разделы курса лекций снабжены разобранными примерами достаточно полно.

Пособие может оказаться полезным всем, в том числе и студентам, кто желает или кому необходимо познакомиться со всем курсом дискретной математики или с некоторыми ее разделами и приложениями.

ВВОДНАЯ ГЛАВА
МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

§1. Доказательство равенств ММИ

1. Доказать, что сумма первых n нечетных натуральных чисел равна n^2.

2. Доказать, что сумма квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Доказать, что для любого $n \in N$

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

4. Доказать, что для любого $n \in N$

а) $-1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^n(2n-1) = (-1)^n n$;

б) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

5. Доказать, что сумма кубов n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

6. Доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}.$$

7. Доказать, что для любого $n \in N$ справедливо равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

8. Доказать, что для любого $n \in N$

а) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

9. Доказать, что для любого натурального n

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

10. Доказать, что для любых $n, p \in N$ имеет место равенство

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p(p+1) + \ldots + n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}.$$

11. Доказать, что для любого $n \in N$

а) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 4}$;

б) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

12. Доказать, что при $x \neq 1$ и $n \in N$ справедливы тождества

а) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$;

б) $x + 2x^2 + \ldots + nx^n = \dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.

13. Доказать, что для любого $n \in N$ справедливо равенство $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

14. Доказать, что $k + k \cdot k\,! + (k+1)(k+1)\,! + \ldots + n \cdot n\,! = (n+1)\,!$, где $n, k \in N$ и $n \geq k$.

15. Доказать, что для любого $n \in N$ $(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-1)$.

16. Доказать справедливость тождества $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{36} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$, где n – любое натуральное число.

17. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

18. Доказать, что для любого $n \in N$ верно равенство

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

19. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

20. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

21. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

22. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

23. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}.$$

24. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\frac{1}{7n+1}=1.$$

25. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

26. Доказать, что для любого $n \in N$

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

27. Доказать, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

28. Доказать, что для любого $n \in N$ справедливы равенства:

а) $1+3+6+10+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

б) $2+7+14+\ldots+\left(n^2+2n-1\right)=\frac{n\left(2n^2+9n+1\right)}{6}$.

29. Доказать справедливость равенств:

а) $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2^{1-n}+2(n-1)$;

б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$, где n – любое натуральное число.

30. Доказать, что для любых $a, n \in N$

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}.$$

31. Доказать, что для любых $a, n \in N$

$$\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=\frac{(a-1)\left(2^n-1\right)}{2^n}+n.$$

32. Доказать, что для любого $n \in N$ $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

33. Доказать, что для любого $n \in N$ и любого $x \in \mathrm{R}$ справедливо равенство

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^n \cdot \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=(-1)^n \cdot \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}.$$

34. Доказать справедливость равенства

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$ для любого $n \in N^0$ и $|x| \neq 1$.

35. Доказать, что для любого $n \in N^0$

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$$, где $|x| \neq 1$.

36. Доказать, что сумма членов каждой горизонтальной строки данной таблицы равна квадрату количества чисел в ней:

1
2, 3, 4
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

37. Доказать справедливость равенств, где a_i – i-й член ряда Фибоначчи:

а) $a_{n+1}=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+1$;

б) $a_0+a_2+\ldots+a_{2n}-\left(a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}\right)=a_{2n-1}-1$;

в) $a_n^2=a_{n-1} \cdot a_{n+1} \pm 1$;

г) $a_{n+p-1}=a_{n-1} \cdot a_{p-1}+a_n \cdot a_p$;

д) $a_{2k+1}=a_k^2+a_{k+1}^2$.

38. Дано: $a_{n+1}=a_1 \cdot a_n-a_0 \cdot a_{n-1}; a_0=2; a_1=3.$ Доказать: $a_n=2^n+1.$

39. Дана последовательность натуральных чисел U_n, для которой $U_1 = 1, U_k = U_{k-1} + k$. Доказать: $U_n + U_{n+1} = (n+1)^2$.

40. а) Последовательность чисел $a, b; a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n; \ldots$ задается по закону

$$a_1 = \frac{a+b}{2}; a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}; \ldots$$

$$b_1 = \frac{a_1+b}{2}; b_2 = \frac{a_2+b_1}{2}; \ldots$$

Доказать: $a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$; $b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right)$.

б) Числа последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ определяются следующими условиями: $a_0 = a, a_1 = b, a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2}$. Доказать: $a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{b-a}{3 \cdot 2^{n-1}}$.

41. а) Последовательность задана рекуррентной формулой $a_n = 2a_{n-1}\cos x - a_{n-2}$; $n \geq 3$. Найти общий член, если $a_1 = 1, a_2 = 2\cos x$.

б) Последовательность задана рекуррентной формулой $a_n = a_{n-1} \cdot \cos x + \cos(n-1)x$, $n \geq 2$. Найти общий член, если $a_1 = 1$.

42. Доказать формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a + d(n-1)$, где a – первый член, d – разность арифметической прогрессии.

43. Доказать формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$.

44. Доказать формулу n-го члена геометрической прогрессии $a_n = a \cdot q^{n-1}$, где a – первый член, q – знаменатель геометрической прогрессии.

45. Доказать формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, где a – первый член, q – знаменатель геометрической прогрессии.

46. Доказать, что для любых $m, n, k \in N$ существует число $a \in N$ такое, что $\left(\sqrt{m+n} - \sqrt{m}\right)^k = \sqrt{a+n^k} - \sqrt{a}$.

47. Доказать тождество

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)=1+x^2+\ldots+x^{2^n-1}.$$

48. Доказать:

$$(1-x)\left(1-x^2\right)\ldots\left(1-x^n\right)+x\left(1-x^2\right)\ldots\left(1-x^n\right)+x^2\left(1-x^3\right)\ldots\left(1-x^n\right)+$$

$$+\ldots+x^k\left(1-x^{k+1}\right)\ldots\left(1-x^n\right)+\ldots+x^{n-1}\left(1-x^n\right)+x^n=1$$

49. Доказать тождество

$$1+\frac{1}{a_1}+\frac{a_1+1}{a_1a_2}+\frac{(a_1+1)(a_2+1)}{a_1a_2a_3}+\ldots+\frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)}{a_1a_2\ldots a_{n+1}}=\frac{(a_1+1)\ldots(a_{n+1}+1)}{a_1a_2\ldots a_{n+1}},$$

где $a_i\neq 0, i=1,2,3,\ldots,n,n+1.$

50. Дано: $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=a$, $A_2=m-\dfrac{a}{m-1}$, $A_3=m-\dfrac{a}{m-\dfrac{a}{m-1}}$,

$A_4=m-\dfrac{a}{m-\dfrac{a}{m-\dfrac{a}{m-1}}}$,…, $A_{k+1}=m-\dfrac{a}{A_k}$ $(m\neq 1;\alpha\neq\beta;k\rangle 1)$. Доказать,

что $A_n=\dfrac{\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)-\left(\alpha^n-\beta^n\right)}{\left(\alpha^n-\beta^n\right)-\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)}$.

51. Доказать, что для $n=2k-1$, где $k\in N$ верно равенство

$$1+\frac{n-1}{n-2}+\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}+\ldots+\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n-2)(n-4)\ldots 1}=n.$$

52. Доказать, что если $\sin\alpha\neq 0$, то для любого $n\in N$ справедливо тождество $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\ldots\cos 2^n\alpha=\dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$.

53. Доказать, что для любого $n\in N$ справедлива формула

$$b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a^2+\ldots+ba^{n-2}+a^{n-1}\right).$$

54. Доказать, что $3+33+333+\ldots+\underbrace{3\ldots3}_{n}=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$.

55. Доказать, что для любых чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n)+$$

$$+2a_2(a_3+a_4+\ldots+a_n)+\ldots+2a_{n-2}(a_{n-1}+a_n)+2a_{n-1}a_n.$$

§2. Задачи на делимость чисел

1. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

2. Доказать, что для любого $n \in Z$:

а) n^3+5n делится на 6;

б) n^3+11n делится на 6;

в) $n^4+6n^3+11n^2+6n$ делится на 24;

г) $n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n$ делится на 24.

3. Доказать, что при любом $n \in N^0$ справедливы утверждения:

а) 7^n+3n-1 делится на 9;

б) $4^n+15n-1$ делится на 9;

в) $3^{2n+2}-8n-9$ делится на 16;

г) $2^{n+2}\times3^n+5n-4$ делится на 25;

д) $3^{2n+1}+40n-67$ делится на 64;

е) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11;

ж) $7\times5^{2n}+12\times6^n$ делится на 19;

з) $5^{2+n}+26\times5^n+8^{2n+1}$ делится на 59;

и) $11^{6n+3}+1$ делится на 148;

к) $2^{2n+1}+1$ делится на 3;

л) $5^{n+3}+11^{3n+1}$ делится на 17;

м) $10^{n+2}+18n+8$ делится на 27.

4. Доказать, что при любом $n \in N^0$ справедливы утверждения:

а) $7^{n+2}+8^{2n+1}$ делится на 57;

б) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133;

в) $2^{5n+3}+5^n\times3^{n+2}$ делится на 17;

г) $2^{n+5}\times3^{4n}+5^{3n+1}$ делится на 37;

д) $3^{3n+2}+5\times2^{3n+1}$ делится на 19;

е) $3^{2n+2}\times5^{2n}-3^{3n+2}\times2^{2n}$ делится на 1053;

ж) $2^{2n+2}-1$ делится на 3;

з) $7^{2n+2}-1$ делится на 48;

и) $5^{n+4}\times2^{n+1}-125$ делится на 45;

к) $9^{n+2}-18n-27$ делится на 18;

л) $5^{2n+3}+3^{n+3}\times2^n$ делится на 19;

м) $7^{2n+2}-4^{2n+2}$ делится на 33.

5. Доказать, что для любых $m=2k$ и $n=2L$, где $k \in Z$, $L \in N^0$ справедливы утверждения:

а) m^3+20m делится на 48;

б) $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323.

6. Доказать, что при любом $n \in N$ справедливы утверждения:

а) $2n^3+3n^2+7n$ делится на 6;

б) $n^2(n^4-1)$ делится на 60.

7. Доказать, что для того, чтобы число $9^n–1$ делилось на 10^k, достаточно условия: $n=10^k$, где $k\in N$ и $k>1$.

8. Доказать, что для любого $a\in Z$ $a^7–a$ делится на 42.

9. Доказать, что число $a^{4n}–a$ делится на 30 при любом целом a и целом неотрицательном n.

10. Доказать, что число, состоящее из 3^n единиц, делится на 3^n.

11. Доказать малую теорему Ферма: при любом целом a и простом p $a^p–a$ делится на p; если a и p – взаимно простые, то $a^{p-1}–1$ делится на p.

12. Зная, что число $(p–1)!+1$ делится на p тогда и только тогда, когда p – простое число (теорема Вильсона), доказать, что при $0\le n\le p-1$ $n!(p-(n+1))!+(-1)^n$ делится на p тогда и только тогда, когда p – число простое.

13. Доказать, что если число $A_k=7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}$ составлено из k семерок, то $A_k–A_p$ делится на 34300 при n и p, не меньших 2.

14. Доказать, что при любом n=4k, где $k\in N$: $7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^n$ делится на 100.

§3. Доказательство неравенств ММИ

1. Доказать, что при $a \ge -1$ и при любом $n \in N$ справедливо неравенство (неравенство Бернулли) $(1+a)^n \ge 1+na$.

2. Доказать, что для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|$.

3. Доказать, что для любого $n \in N$, $n \ge 2$ имеет место неравенство $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n)!^2}$.

4. Доказать, что при каждом натуральном n справедливо неравенство $\frac{n}{2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} \le n$.

5. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительные числа, причем $x_1x_2\ldots x_n=1$. Доказать, что $x_1+x_2+\ldots+x_n \ge n$.

6. Доказать неравенство $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительные числа.

7. Доказать неравенство $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1} >1$, $n\in N$.

8. При каких натуральных значениях n верны неравенства:

а) $n^2>n+1$; б) $n^2>2n+4$; в) $2n^2>-\frac{1}{2}n+11$; г) $3n^2>4,7n+5$; д) $n^2>-1,2n+7$; е) $1,5n^2>0,5n+4,2$; ж) $n^2>7n-2$; з) $4n^2>-n+9$; и) $2n^2>-2n+14$; к) $n^2>3n-2$; л) $3n^2>8n-5$; м) $\frac{1}{3}n^2>\frac{2}{3}n+1$; н) $6n^2>8n+4$; о) $5,3n^2>14-2n$; п) $3n+15<4n^2$; р) $19-4n<2n^2$; с) $\frac{2}{5}n^2>3n+5$; т) $2,5n^2>–n+9,1$; у) $4,3n^2>9n-3$; ф) $5n^2>12n+17$.

9. Найти все натуральные значения n, при которых справедливы неравенства:

а) $n^3>n^2+n+1$; б) $n^3>2n^2-3n+7$; в) $2n^3>n^2+4n-1$; г) $9n^3>9n^2+n+2$; д) $5n^3>3n^2+11$; е) $\frac{4}{5}n^3>\frac{1}{3}n^2+2n+4$; ж) $3n^3>3n^2-n+8$; з) $4,5n^3>2n^2+15$; и) $2n^3>1,3n^2+7$; к) $n^3>7n^2–n$; л) $3n^2+2<n^3$; м) $14n+8<3n^3$; н) $5n^2-n+12<2n^3$; о) $\frac{1}{2}n^2+17<4n^3$; п) $7n^2+2n+5<2,5n^3$; р) $3n^2–4n+6<n^3$; с) $16–5n^2<2n^3$; т) $3n+7n^2<1,5n^3$; у) $12–n^2<2,1n^3$; ф) $\frac{2}{7}n^2+n+5<n^3$.

10. Найти все натуральные значения n, для которых справедливы неравенства:

а) $2^n>n^2$; б) $2^n\geq n+1$; в) $2^n>4n^2+1$; г) $2^n>n^2+4n+5$; д) $2^n>2n+1$; е) $2^n>5n^2+n$; ж) $2^n>n^2+7$; з) $2^n>4n+3$; и) $2^n>n^2+2n+6$; к) $2^n>3n+11$; л) $2^n>17n+4$; м) $2^n>2n^2+n+3$; н) $3^n\geq 2(n+1)^n$; о) $3^n>2^n+7n$; п) $3^n>n^2+8$; р) $3^n>2^n+12$; с) $n^4<4^n$; т) $2^n+7n^2<4^n$; у) $2^n+n+2<4^n$; ф) $5^n\geq 5n^3+2$.

11. Решить неравенства на множестве натуральных чисел:

а) $2^{n^2}\geq 4^n+n$; б) $2^{n^2}>n^n$; в) $3^n n<4^n$; г) $2^n n<3^n$; д) $2^n n^2\leq 4^n$; е) $2^n n!$; ж) $e^n<n!$; з) $n^2<n!$; и) $n^2+7n<n!$; к) $n^n>n!$; л) $4^n<(2n)!$; м) $2^{n^2}>n!$; н) $3^n<n!$; о) $2^n+3^n<n!$.

12. Доказать справедливость следующих неравенств для всех натуральных n>1:

а) $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; б) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$;

в) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$; г) $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}>(n+1)!$.

13. Докажите, что если a>b и a,b – положительные числа, то $a^n>b^n$.

14. Доказать неравенство $\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}<\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

15. Доказать, что для любого $n \in N$ справедливо неравенство $2 \le (1+\frac{1}{n})^n < 3$.

16. Доказать, что для любого целого $n>6$: а) $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$;

б) $\left(\frac{n}{e}\right)^n > n! > n\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

§4. Разные задачи

1. Доказать, что при каждом $n \in N$ число $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$ является натуральным.

2. Доказать, что любое натуральное число $m>8$ можно представить в виде $m=3k+5L$, где $k, L \in N$.

3. Доказать, что при любом натуральном $n>1$ число $2^{2^n}+1$ оканчивается цифрой 7.

4. Доказать, что при каждом $n \in N$ число $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ будет целым.

5. Доказать, что при любом целом a и целом неотрицательном n числа a и a^{4n+1} оканчиваются одной и той же цифрой.

6. Даны n монет одинакового достоинства, среди которых имеется одна фальшивая, отличающаяся весом. Доказать, что если $n \le 3^k$, то достаточно k взвешиваний на чашечных весах, чтобы обнаружить фальшивую монету.

7. Доказать, что любую сумму денег, большую 7 рублей, можно разменять только трехрублевыми и пятирублевыми монетами.

8. Доказать, что функция $T_n(x)=\cos(n\times\arccos x)$ на отрезке [-1;1] совпадает с некоторым многочленом степени n, где n – неотрицательное целое число.

9. Доказать, что число подмножеств конечного n-элементного множества равно 2^n.

10. Доказать, что для всех $m \ge 2$ $n(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m)=n(X_1)+n(X_2)+\ldots+n(X_m)$, где $X_i \cap X_j=\varnothing$ при $i \ne j$, X_i – конечное множество для каждого $i=1,\ldots,m$.

11. Доказать, что для всех $s \ge 2$ $n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s)=n(X_1)\times n(X_2)\times\ldots\times n(X_s)$, где X_i – конечное множество, состоящее из $n(X_i)$ элементов, для каждого $i=1,\ldots,s$.

12. Докажите, что сумма внутренних углов любого выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$.

13. Докажите, что число диагоналей любого выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

14. Доказать, что n различных точек, лежащих на прямой, делят ее на n+1 интервалов (из которых два интервала бесконечны).

15. Концы отрезка AB занумерованы цифрами 1 и 2. Отрезок AB разбивают на части точками A_1, A_2, … A_m и ставят в соответствии каждой из этих точек одну из цифр 1 или 2. Доказать, что число получившихся при делении отрезков, концы которых имеют различные номера, нечетно.

16. Пусть на отрезке AB взяты n точек и эти точки и точки A, B занумерованы цифрами 1 и 2, причем точка A получила номер 1, а точка B – номер 2. Обозначим через r число отрезков, левый конец которых получил номер 1, а правый – номер 2, а через s – число отрезков, у которых левый конец получил номер 2, а правый – номер 1 (считаем, что точка A лежит слева от B). Докажите, что r-s=1.

17. На плоскости проведены n прямых. Докажите, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно покрасить белой и черной краской так, что соседние области (т.е. области, имеющие хотя бы одно общее ребро) будут иметь различный цвет (раскраску с таким свойством называют правильной).

18. На плоскости даны n окружностей. Докажите, что области, на которые они разбивают плоскость, можно правильно раскрасить в белый и черный цвет.

19. Пусть a и A>0 – произвольные данные числа и пусть $a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{A}{a}), a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{A}{a_1}), \cdots, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}})$.

Доказать $\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}}$.

20. Пусть пары чисел $(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ образуются по следующему закону: $a_1 = \frac{a+b}{2}; b_1 = \frac{a_1 + b}{2}; a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}; b_2 = \frac{a_2 + b_1}{2}; \dots$

Доказать $a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$, $b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2 \times 4^n}\right)$.

21. Упростить выражение: $(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)+x(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)+$ $+x^2(1-x^3)\dots(1-x^n)+\dots+x^k(1-x^{k+1})\dots(1-x^n)+\dots+x^{n-1}(1-x^n)+x^n$.

22. Доказать справедливость тождества

$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\frac{(a+1)(b+1)}{abc}+\ldots+\frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)(p+1)}{abc\ldots spq}=$$

$$=\frac{(a+1)(b+1)\ldots(p+1)(q+1)}{abc\ldots pq}.$$

23. Пусть $\frac{q}{1-q}(1-z)+\frac{q^2}{1-q^2}(1-z)(1-qz)+\ldots+\frac{q^n}{1-q^n}(1-z)(1-qz)\ldots$ $\ldots(1-q^{n-1}z)=F_n(z)$. Доказать тождество $1+F_n(z)-F_n(qz)=$ $=(1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^nz)$.

24. Доказать тождества:

а) $\sum\limits_{x=1}^{n} x(x+1)\ldots(x+q)=\frac{1}{q+2}n(n+1)\ldots(n+q+1)$;

б) $\sum\limits_{x=1}^{n}\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+q)}=\frac{1}{q}\left\{\frac{1}{q!}-\frac{1}{(n+1))n+2)\ldots(n+q)}\right\}$.

25. На сколько треугольников n-угольник (не обязательно выпуклый) может быть разбит своими непересекающимися диагоналями?

26. Дано n произвольных квадратов. Доказать, что их можно разрезать на части так, что из полученных частей можно сложить новый квадрат.

27. Дан треугольник ABC. Через его вершину C проведено n-1 прямых CM_1, CM_2, ..., $См_{n-1,}$ разбивающих треугольник на n меньших треугольников ACM_1, M_1CM_2, ..., $M_{n-1}CB$. Обозначим через r_1, r_2, ..., r_n и ρ_1, ρ_2, …, ρ_n соответственно радиусы вписанных и вневписанных окружностей этих треугольников (все вневписанные окружности вписаны в угол C треугольника), и пусть r и ρ – радиусы вписанной и вневписанной окружностей самого треугольника ABC. Доказать, что $\frac{r_1}{p_1}\cdot\frac{r_2}{p_2}\cdot\ldots\cdot\frac{r_n}{p_n}=\frac{r}{p}$.

28. Дано n окружностей C_1, C_2, ..., C_n, проходящих через точку O; вторые точки пересечения окружностей C_1 и C_2, C_2 и C_3, …, C_n и C_1 обозначим соответственно через A_1, A_2, …, A_n (рис. 2). Пусть B_1 – произвольная точка окружности C_1, отличная от O и от A_1. Проведем секущую B_1A_1, пересекающую окружность C_2 в точке B_2, затем секущую B_2A_2, пересекающую окружность C_3 в точке B_3, и т.д. (в случае, если, например, точка B_2 совпадает с A_2, вместо секущей через точку A_2 проводим касательную к окружности C_2). Доказать, что полученная в конце концов на окружности C_1 точка B_{n+1} совпадает с $B_{1.}$

ГЛАВА I. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§1. Формализация высказываний

Запишите символически следующие сложные предложения, употребляя буквы для обозначения простых компонентов предложения.

Примеры

a) Если посылка истинна, и заключение ложно, то импликация ложна.

Решение

Пусть A="посылка истинна", B="заключение ложно", C="импликация ложна". Тогда данное предложение символически можно записать в виде $A \wedge B \to C$.

b) Если цепь C состоит из двух параллельно подключенных переключателей A и B, то по C идет ток в том и только в том случае, когда включен переключатель A или включен переключатель B.

Решение

Пусть X="цепь C состоит из двух параллельно подключенных переключателей A и B", Y="по C идет ток", Z="включен A", V="включен B". Тогда данное предложение символически можно записать в виде $X \to (Y \leftrightarrow Z \vee V)$.

1. 3 есть простое число и 4 есть составное число.
2. Идет дождь или кто-то не выключил душ.
3. Если идет дождь, то улицы мокрые.
4. Иван сядет, и он или Сергей будут ждать.
5. Иван сядет и будет ждать или Сергей будет ждать.
6. Я поеду на автобусе или на такси.
7. Ни Север, ни Юг не победили в гражданской войне.
8. Человека не подкупит лесть, если ум у человека есть.
9. Если учитель ест стоя, то ученики едят на ходу.
10. Если не можешь признать похвал заслуженными, то считай их лестью.
11. Если будет хорошая погода, то я позвоню друзьям, и мы поедем к морю.
12. Если я устал или голоден, я не могу заниматься.
13. Натуральное число n делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа n делится на 3.

14. Если утром будет ливень, то я или останусь дома, или вынужден буду взять такси.

15. Сегодня наша команда не выиграла и, следовательно, не вышла в финал.

16. Если я сегодня встану и пойду на занятия, моя мама будет довольна, а если я не встану, то мама не будет довольна.

17. Если он хочет достигнуть цели, он должен много знать и быть удачливым.

18. Сегодня ясно, следовательно, сегодня не идёт ни дождь, ни снег.

19. Вчера было пасмурно, а сегодня тепло и ясно.

20. Если сегодня облачно, значит, завтра будет дождь, или ветер разгонит тучи.

21. Ты успешно сдашь экзамен тогда и только тогда, когда хорошо подготовишься; если ты не сдашь экзамен успешно, то лишишься стипендии.

22. Математические сведения могут применяться умело и быть полезными только в том случае, если они усвоены творчески.

23. Если в пылу страсти разум сомневается, то когда страсть остынет, он осудит твой поступок.

24. Если главный определитель системы линейных уравнений не равен нулю, то система уравнений определенная, то есть имеет единственное решение.

25. Другом можно считать того и только того, кто счастлив, если счастлив его друг, и печален, если тот печален.

26. Если я успешно окончу школу и поступлю в институт, то я смогу сдать экзамен по математике тогда и только тогда, когда я буду много заниматься или преподаватель будет снисходителен.

27. Ты поймешь эту тему, если придешь сегодня на занятия или прочтешь учебник, иначе тебе сможет помочь друг тогда и только тогда, когда поймет эту тему сам.

28. Если "Пираты" или "Щенки" проиграют и "Великаны" выиграют, то "Увертыши" потеряют первое место и, кроме того, я проиграю пари.

29. Если рабочие или администрация упорствуют, то забастовка будет урегулирована тогда и только тогда, когда правительство добьётся судебного запрещения, но войска не будут посланы на завод.

30. Хлеба уцелеют тогда и только тогда, когда будут вырыты ирригационные канавы; если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят фермы.

31. Я пойду домой или останусь здесь и выпью стаканчик, я не пойду домой, следовательно, я останусь и выпью.

32. Если Олег ляжет сегодня поздно, он будет утром в отупении, если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что не стоит жить, следовательно, или Олег будет завтра в отупении, или ему будет казаться, что не стоит жить.

33. Заработная плата возрастёт только, если будет инфляция, если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни; заработная плата возрастёт, следовательно, увеличится стоимость жизни.

34. Если 2 – простое число, то это наименьшее простое число, если 2 – наименьшее простое число, то 1 не есть простое число; число 1 не есть простое число, следовательно, 2 – простое число.

35. Игорь или переутомился, или болен, если он переутомился, то он раздражается; он не раздражается, следовательно, он болен.

36. Если завтра будет холодно, я надену теплое пальто, если рукав будет починен; завтра будет холодно, а рукав не будет починен, следовательно, я не надену теплое пальто.

37. Если исход скачек будет предрешён сговором или в игорных домах будут орудовать шулеры, то доходы от туризма упадут, и город пострадает; если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна; полиция никогда не бывает довольна, следовательно, исход скачек не предрешён сговором.

38. Если "Доджеры" выиграют, то Лос-Анджелес будет торжествовать, а если выиграет "Уайт-Сокс", то торжествовать будет Чикаго; выиграют или "Доджеры", или "Уайт-Сокс", однако если выиграют "Доджеры", то Чикаго не будет торжествовать, а если выиграет "Уайт-Сокс", то не будет торжествовать Лос-Анджелес; итак, Чикаго будет торжествовать тогда и только тогда, когда не будет торжествовать Лос-Анджелес.

39. Или Катя и Дима одного возраста, или Катя старше Димы; если Катя и Дима одного возраста, то Инна и Дима не одного возраста, если Катя старше Димы, то Дима старше Миши, следовательно, или Инна и Дима не одного возраста, или Дима старше Миши.

40. Если 6 – составное число, то 12 – составное число, если 12 – составное число, то существует простое число, большее, чем 12; если существует простое число, большее, чем 12, то существует составное число, большее 12; если 6 делится на 2, то 6 – составное число; число 12 – составное, следовательно, 6 – составное число.

41. Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание, если я пропущу назначенное свидание и начну

огорчаться, то мне не следует ехать домой; если я не получу эту работу, то я начну огорчаться и мне следует поехать домой, следовательно, если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я получу эту работу.

42. Если Смит победит на выборах, он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в предвыборной кампании, но если он провалится на выборах, то потеряет доверие партии; он плохой борец в предвыборной кампании, если он потеряет доверие партии, и, если он плохой борец в предвыборной кампании, ему следует выйти из партии; Смит или победит на выборах, или провалится, следовательно, ему нужно выйти из партии.

43. Контракт будет выполнен тогда и только тогда, когда дом будет закончен в феврале, если дом будет закончен в феврале, то мы можем переезжать 1-го марта, если мы не сможем переехать 1-го марта, то мы должны внести квартирную плату за март; если контракт не будет выполнен, то мы должны внести квартирную плату за март, но мы не будем вносить квартирную плату за март.

44. Книга будет издана тогда и только тогда, когда закончит работу рецензент, если книга будет издана к установленному сроку, то экземпляры будут быстро раскуплены и авторы будут довольны; рецензент не закончит работу к установленному сроку, следовательно, авторы не будут довольны.

45. Мы закончим ремонт, если мы найдем подходящие обои, и нам хватит денег на их покупку, на дорогие обои нам не хватит денег, а подходящие не стоят дешево, следовательно, мы не закончим ремонт.

46. Я запомню дословно эту информацию тогда и только тогда, когда прочту её или неоднократно услышу, если я запомню эту информацию дословно, то я смогу передать её другу, и он выполнит задание шефа и, следовательно, получит большую сумму денег; друг не выполнил задание шефа, следовательно, неверно, что я прочёл или неоднократно услышал эту информацию, или я не смог передать её другу.

§2. Таблицы истинности высказываний

Построить таблицы истинности для следующих высказываний.

Пример

Построить таблицу истинности для высказывания $A \vee \overline{C} \to \overline{B \leftrightarrow A}$.

Решение

Пусть $F(A,B,C) = A \vee \overline{C} \to \overline{B \leftrightarrow A}$.

Заполним столбец таблицы, соответствующий $\overline{C}$, пользуясь тем, что $\overline{0}=1$, $\overline{1}=0$.

A	B	C	$\overline{C}$	$A\vee\overline{C}$	$B\leftrightarrow A$	$\overline{B\leftrightarrow A}$	F
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

Затем, на основе столбцов A и $\overline{C}$ заполним столбец $A\vee\overline{C}$, пользуясь тем, что $0\vee1=1$, $0\vee0=0$, $1\vee1=1$, $1\vee0=1$. На основе столбцов B и A заполним столбец $B\leftrightarrow A$, используя правило: $0\leftrightarrow0=1$, $0\leftrightarrow1=0$, $1\leftrightarrow0=1$, $1\leftrightarrow1=1$. Заполним столбец $\overline{B\leftrightarrow A}$, причем будем ставить в некоторой строке 1, если в той же строке столбца $B\leftrightarrow A$ стоит 0, и наоборот. Наконец, заполним последний столбец, используя данные столбцов $A\vee\overline{C}$ и $\overline{B\leftrightarrow A}$ и зная, что $1\to0=0$, а в остальных случаях импликация истинна.

1. $\overline{A}\vee B\to B\to AB$;
2. $A\wedge\overline{B}\leftrightarrow A\vee B$;
3. $AC\to A\vee\overline{CA}$;
4. $\overline{B}\to CB\vee(\overline{C}\to B)$;
5. $\overline{C\vee\overline{C}A}\leftrightarrow\overline{A}$;
6. $\overline{AB}\vee A\to B\vee\overline{A}$;
7. $BA\vee(\overline{A}\leftrightarrow B\to A)$;
8. $\overline{B}C\leftrightarrow\overline{CB\to B\vee\overline{C}}$;
9. $AC\leftrightarrow A\vee C\to\overline{AC}$;
10. $\overline{\overline{A}\vee B}\leftrightarrow B\to AB$;
11. $AC\vee A\to\overline{C\to A}\vee\overline{C}$;
12. $CB\vee\overline{B}C\to\overline{CB}\vee\overline{C}$;
13. $B\overline{A}\leftrightarrow AB\vee\overline{A\to AB}$;
14. $CB\vee\overline{\overline{B}C\to B\vee C}\leftrightarrow C$;
15. $AB\vee B\to\overline{A\overline{B}\leftrightarrow\overline{A}\to B\overline{A}}$;
16. $B\overline{C}\vee\overline{\overline{B}\to CB\leftrightarrow B}$;
17. $\overline{\overline{AB}\vee A\leftrightarrow B}\vee\overline{A}$;
18. $\overline{\overline{A\wedge\overline{B}}\leftrightarrow A\vee\overline{BA}}$;

19. $\overline{A\vee\overline{C}A}\leftrightarrow\overline{\overline{A}C\to C}$;

20. $\overline{A}\vee B\to(B\to\overline{AB})$;

21. $\overline{AB}\vee(CBA\to\overline{A\overline{C}\leftrightarrow BC)}\wedge\overline{A}CB\vee A$;

22. $(ABC\leftrightarrow\overline{AB\vee CB)}\vee C\to AB\to\overline{B}C$;

23. $CB\vee\overline{AB\to(\overline{BC}A\leftrightarrow AB)}\to CA\vee\overline{A}$;

24. $B\overline{DE}\vee DE\to B\overline{E}\to\overline{D\vee BD\leftrightarrow B\overline{E}D}$;

25. $\overline{AB}\vee(\overline{CBA}\leftrightarrow\overline{A\overline{C}\to AC)}\wedge\overline{BC}A$;

26. $CA\vee\overline{CAB\to(\overline{B}A\leftrightarrow CB)}\leftrightarrow CA\vee B\overline{A}$;

27. $C\overline{B}\vee AB\to\overline{B\overline{AC}\leftrightarrow BC\to A\overline{C}}\vee BA$;

28. $BA\vee CAB\vee\overline{\overline{A\to BC}\leftrightarrow(AB\vee C)\to CB}$;

29. $(A\overline{BC}\leftrightarrow BC\vee\overline{A\to B})A\vee\overline{BC\to A}$;

30. $(\overline{DC\vee BD}\to\overline{(DB\leftrightarrow DC)}\vee DB\to C$;

31. $DA\to(AD\leftrightarrow\overline{D\vee AC})A\vee\overline{DC\to AC}$;

32. $(DC\vee\overline{C\to DB})B\vee\overline{DC\leftrightarrow C\vee BC}\to B$;

33. $\overline{AB}\to BC\vee(\overline{AC\leftrightarrow B\overline{C}}\wedge B)\to A\vee B\overline{C}$;

34. $\overline{BC\vee AB}\vee(AB\to\overline{B}C)\vee\overline{\overline{AC\leftrightarrow CB}\wedge AB}$;

35. $\overline{ABC\vee AC}\to\overline{(AB\leftrightarrow C)\vee AC}\vee B\to CA$;

36. $\overline{AB\vee CA}\to\overline{ACD\vee C}\wedge(AD\leftrightarrow AB\vee\overline{B})$;

37. $\overline{AC\leftrightarrow B}\vee(CD\to\overline{D\wedge AC)}A\leftrightarrow BD\vee\overline{D}$;

38. $XYZ\vee XZ\to(\overline{X\vee YW}\leftrightarrow WY)\wedge YX\vee Z\overline{W}$;

39. $\overline{B}F\vee(\overline{DF\to DC}\vee F)\wedge DBC\leftrightarrow\overline{\overline{C}\vee DF}$;

40. $A\vee\overline{BC}\leftrightarrow(AC\vee\overline{BD\to C)}\wedge D\overline{C}\vee ABC$;

41. $\overline{D}C\to\overline{B\vee E}\vee\overline{DE\leftrightarrow B}\to DB\wedge(C\vee\overline{D})$;

42. $FB\vee\overline{E\overline{D}\to EF}\leftrightarrow\overline{FEB\vee F}\to(E\vee FB)$;

43. $SDG\vee(S\to\overline{DG})\vee T\leftrightarrow\overline{STD\vee G}\to S\overline{D}$;

44. $\overline{AB\to A}\to\overline{ACD\vee C}\wedge(A\to\overline{ACD\vee\overline{C}})$;

45. $X\overline{W}\vee(Y\to XYW)\leftrightarrow\overline{ZX\wedge W\to X}\vee Z$;

46. $\overline{SK \vee T \to L} \wedge (ST \leftrightarrow L) \to \overline{S\overline{L} \vee TSL} \wedge K;$

47. $\overline{AB \vee D} \wedge CD \to BC \wedge \overline{(AB \leftrightarrow C) \vee DC};$

48. $S\overline{D}G \vee S \to \overline{DG}) \vee T \to \overline{STD \vee G} \leftrightarrow S\overline{D};$

49. $FB \vee (\overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F)} \to (E \vee FB);$

50. $\overline{D}C \to (\overline{B \vee E} \vee \overline{DE \leftrightarrow B)} \to DB \wedge (C \vee \overline{D});$

51. $(A \vee \overline{BC} \leftrightarrow AC \vee \overline{BD \to C}) \wedge D\overline{C} \vee ABC;$

52. $X(YZ \vee XZ \to \overline{X \vee YW} \leftrightarrow WY) \wedge YX \vee Z\overline{W}\ ;$

53. $(\overline{DF \to DC} \vee B)F \vee DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DF} \to B\ ;$

54. $S \vee \overline{DG}(S \vee \overline{DG}) \to T \to \overline{ST \vee G} \leftrightarrow S\overline{D} \vee S\ ;$

55. $(X\overline{W} \vee Y \to XYW \leftrightarrow \overline{ZXW \to X}) \wedge Z\ ;$

56. $\overline{AB \to A} \to (\overline{ACD \vee C} \wedge A \to \overline{ABD \vee \overline{C}})\ ;$

57. $\overline{ST \vee K \leftrightarrow KL}(ST \leftrightarrow L \to \overline{S\overline{L} \vee TSL}) \wedge \overline{K}\ ;$

58. $\overline{A \vee BD} \wedge C \to (BC \wedge \overline{AB \leftrightarrow C \vee DA} \vee A)\ ;$

59. $ED \to \overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow (\overline{FEB \to F} \to E \vee \overline{FB})\ ;$

60. $\overline{D}A(\overline{B \vee E} \vee \overline{DE \to B}) \to DB \leftrightarrow \overline{(A \vee \overline{D}E)}\ ;$

61. $(\overline{YZ} \vee X\overline{Z} \leftrightarrow \overline{X \vee YW} \to \overline{WY}) \leftrightarrow Y \vee Z\overline{YW}\ ;$

62. $\overline{B \to CA} \to A\overline{D} \wedge (\overline{D \leftrightarrow AB} \vee \overline{B}) \leftrightarrow CB \vee \overline{CD}\ ;$

63. $\overline{A\overline{C} \vee B} \to (\overline{CD} \to \overline{\overline{D} \wedge BC}) \leftrightarrow BAD \vee \overline{AD}\ ;$

64. $XW\overline{Z} \vee \overline{XZ} \leftrightarrow (\overline{X \vee ZW} \to \overline{W}X) \wedge \overline{ZX \vee Z\overline{W}}\ ;$

65. $F \vee (A \wedge \overline{DA} \to \overline{A \vee DF}) \leftrightarrow AF \vee A \to \overline{DF}\ ;$

66. $A \vee \overline{\overline{B}C} \leftrightarrow (C \vee \overline{D \to AC}) \leftrightarrow \overline{D\overline{C} \vee AB \leftrightarrow C}\ ;$

67. $X \vee (\overline{YZ \vee XZ} \to \overline{YX \vee W} \to \overline{WY})YX \leftrightarrow Z\overline{W}\ ;$

68. $AB \vee \overline{E\overline{D} \to EA} \leftrightarrow \overline{AEB \vee A} \to (E \vee AB)\ ;$

69. $S \wedge \overline{DG \vee (S \to TS \leftrightarrow DG)} \vee T \wedge \overline{STD \vee G} \to S\overline{D}\ ;$

70. $\overline{SB \to SC} \to \overline{SCD \vee C} \wedge (S \to \overline{SCD \vee \overline{C}})\ .$

§3. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)

Привести данные высказывания к ДНФ.

Пример

Привести к ДНФ высказывание $F = (\overline{A}B \to C \vee A) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B})$.

Решение

$$F = (\overline{\overline{A}B} \vee C \vee A) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) = (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B} \vee C \vee A) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) =$$
$$(A \vee \overline{B} \vee C \vee A) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) = (A \vee \overline{B} \vee C) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) =$$
$$= (A \vee \overline{B} \vee C)(\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) \vee \overline{A \vee \overline{B} \vee C} \wedge \overline{\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}} =$$
$$= A\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{C} \vee C\overline{C} \vee A\overline{A} \vee \overline{B}\,\overline{A} \vee C\overline{A} \vee A\overline{B} \vee \overline{B}\,\overline{B} \vee$$
$$\vee C\overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cdot CAB = A\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{A} \vee C\overline{A} \vee A\overline{B} \vee \overline{B} \vee \overline{C}B \vee 0 =$$
$$= A\overline{C} \vee C\overline{A} \vee \overline{B}.$$

Высказывание приведено к ДНФ.

1. $\overline{AB} \vee (CBA \to \overline{A\overline{C} \leftrightarrow BC}) \wedge \overline{A}CB \vee A;$
2. $BA \vee CAB \vee \overline{\overline{A \to BC} \leftrightarrow (AB \vee C) \to CB};$
3. $(A\overline{BC} \leftrightarrow BC \vee \overline{A \to B})A \vee \overline{BC \to A};$
4. $(\overline{DC \vee BD} \to \overline{(DB \leftrightarrow DC)} \vee DB \to C;$
5. $DA \to (AD \leftrightarrow \overline{D \vee AC})A \vee \overline{DC \to AC};$
6. $(DC \vee \overline{C \to DB})B \vee \overline{DC \leftrightarrow C \vee BC} \to B;$
7. $\overline{AB} \to BC \vee (\overline{AC \leftrightarrow B\overline{C}} \wedge B) \to A \vee B\overline{C};$
8. $\overline{BC \vee AB} \vee (AB \to \overline{B}C) \vee \overline{\overline{AC \leftrightarrow CB} \wedge AB};$
9. $A\overline{BC \vee AC} \to \overline{(AB \leftrightarrow C) \vee AC} \vee B \to CA;$
10. $\overline{AB \vee CA} \to \overline{ACB \vee C} \wedge (AC \leftrightarrow AB \vee \overline{B});$
11. $XYZ \vee XZ \to (\overline{X \vee YZ} \leftrightarrow ZY) \wedge YX \vee Z\overline{X};$
12. $\overline{B}C \vee (\overline{DB \to DC} \vee B) \wedge DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DB};$
13. $A \vee \overline{BC} \leftrightarrow (AC \vee \overline{BA \to C}) \wedge B\overline{C} \vee ABC;$
14. $\overline{D}C \to \overline{B \vee C} \vee \overline{DC \leftrightarrow B} \to DB \wedge (C \vee \overline{D});$
15. $FB \vee \overline{E\overline{B} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F} \to (E \vee FB);$
16. $SDG \vee (S \to \overline{DG}) \vee G \leftrightarrow \overline{SGD \vee G} \to S\overline{D};$
17. $\overline{AB \to A} \to \overline{ACB \vee C} \wedge (A \to \overline{ACB \vee \overline{C}});$
18. $\overline{SK \vee T \to K} \wedge (ST \leftrightarrow K) \to \overline{S\overline{K} \vee TSK} \wedge K;$
19. $\overline{AB \vee C} \wedge CB \to BC \wedge \overline{(AB \leftrightarrow C) \vee AC};$
20. $(S\overline{D}G \vee S \to \overline{DG}) \vee D \to \overline{SD \vee G} \leftrightarrow S\overline{D};$

21. $FB \vee (\overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F}) \to (E \vee FB)$;

22. $\overline{D}C \to (\overline{B \vee E} \vee \overline{DE \leftrightarrow B}) \to DB \wedge (C \vee \overline{D})$;

23. $(A \vee \overline{BC} \leftrightarrow AC \vee \overline{BD \to C}) \wedge D\overline{C} \vee ABC$;

24. $X\overline{W} \vee (Y \to XYW) \leftrightarrow \overline{ZX \wedge W \to X} \vee Z$;

25. $C\overline{B} \vee AB \to \overline{B\overline{AC} \leftrightarrow BC \to A\overline{C}} \vee BA$;

26. $(ABC \leftrightarrow \overline{AB \vee CB}) \vee C \to AB \to \overline{B}C$;

27. $CB \vee \overline{AB \to (\overline{BC}A \leftrightarrow AB)} \to CA \vee \overline{A}$;

28. $B\overline{DE} \vee DE \to B\overline{E} \to \overline{D \vee BD \leftrightarrow B\overline{E}D}$;

29. $\overline{AB} \vee (\overline{CBA} \leftrightarrow \overline{A\overline{C} \to AC}) \wedge \overline{BC}A$;

30. $CA \vee \overline{CAB \to (\overline{B}A \leftrightarrow CB)} \leftrightarrow CA \vee B\overline{A}$;

31. $\overline{AC \leftrightarrow B} \vee (CD \to \overline{D \wedge AC})A \leftrightarrow BD \vee \overline{D}$;

32. $X(YZ \vee XZ \to \overline{X \vee YW} \leftrightarrow WY) \wedge YX \vee Z\overline{W}$;

33. $(\overline{DF \to DC} \vee B)F \vee DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DF} \to B$;

34. $S \vee \overline{DG}(S \vee \overline{DG}) \to T \to \overline{ST \vee G} \leftrightarrow S\overline{D} \vee S$;

35. $(X\overline{W} \vee Y \to XYW \leftrightarrow \overline{ZXW \to X}) \wedge Z$;

36. $\overline{AB \to A} \to (\overline{ACD \vee C} \wedge A \to \overline{ABD \vee \overline{C}})$;

37. $\overline{ST \vee K \leftrightarrow KL}(ST \leftrightarrow L \to \overline{S\overline{L} \vee TSL}) \wedge \overline{K}$;

38. $\overline{A \vee BD} \wedge C \to (BC \wedge \overline{AB \leftrightarrow C \vee DA} \vee A)$;

39. $ED \to \overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow (\overline{FEB \to F} \to E \vee \overline{FB})$;

40. $\overline{D}A(\overline{B \vee E} \vee \overline{DE \to B}) \to DB \leftrightarrow \overline{(A \vee \overline{D}E)}$;

41. $(\overline{YZ} \vee X\overline{Z} \leftrightarrow \overline{X \vee YW} \to \overline{WY}) \leftrightarrow Y \vee Z\overline{YW}$;

42. $\overline{B \to CA} \to A\overline{D} \wedge (\overline{D \leftrightarrow AB} \vee \overline{B}) \leftrightarrow CB \vee \overline{CD}$;

43. $\overline{A\overline{C} \vee B} \to (\overline{CD} \to \overline{\overline{D} \wedge BC}) \leftrightarrow BAD \vee \overline{AD}$;

44. $XY\overline{Z} \vee \overline{XZ} \leftrightarrow (\overline{X \vee YW} \to \overline{W}Y) \wedge \overline{YX \vee Z\overline{W}}$;

45. $F \vee (A \wedge \overline{DA} \to \overline{A \vee DF}) \leftrightarrow AF \vee A \to \overline{DF}$;

46. $A \vee \overline{\overline{B}C} \leftrightarrow (C \vee \overline{D \to AC}) \leftrightarrow \overline{D\overline{C} \vee AB \leftrightarrow C}$;

47. $X \vee (\overline{YZ \vee XZ} \to \overline{YX \vee W} \to \overline{WY})YX \leftrightarrow Z\overline{W}$;

48. $AB \vee \overline{E\overline{D} \to EA} \leftrightarrow \overline{AEB \vee A} \to (E \vee AB)$;

49. $S \wedge \overline{DG \vee (S \to TS \leftrightarrow DG)} \vee T \wedge \overline{STD \vee G} \to S\overline{D}$;

50. $\overline{SB \to SC} \to \overline{SCD \vee C} \wedge (S \to \overline{SCD \vee \overline{C}})$;

51. $YZ \to WX \vee (\overline{WX \leftrightarrow Z} \vee XZ \to YW) \leftrightarrow YX \vee WY$;

52. $(A \vee D \vee C)ABD \leftrightarrow \overline{DC \to A\overline{C \vee B}} \to ABCD$; ;

53. $S \vee D \to \overline{FE \leftrightarrow D \to \overline{S}} \wedge (ES \vee DF \leftrightarrow ESF) \leftrightarrow \overline{SD}$;

54. $WE \vee \overline{RT} \to \overline{ERT} \wedge TW \leftrightarrow ET \to (TW \to \overline{EWT(W \vee R)})$;

55. $ASDF \vee \overline{FD \to SF(ASD \vee D\overline{S}) \leftrightarrow SF \vee \overline{D}} \vee SA \leftrightarrow F$;

56. $ZVX \leftrightarrow \overline{CX} \to CZ \vee CVZ \to \overline{ZX \vee \overline{C\overline{VZ}}} \wedge (ZCX \vee V \to Z)$;

57. $LH \to \overline{JG \vee HG \leftrightarrow GJL \to \overline{H}} \wedge (LHJ \to GH\overline{L})$;

58. $\overline{PI \vee OU \leftrightarrow IU \to \overline{OP} \leftrightarrow (IO \vee IP \vee IU \vee OPU)} \leftrightarrow UIP \vee \overline{O}$;

59. $\overline{NM \vee KL \vee N \leftrightarrow LN} \wedge (NK \vee ML \to NMKL)\overline{MNLK} \vee N$;

60. $ASDF \vee \overline{A \to S \to F\overline{DA}(SA \leftrightarrow DFA) \vee F} \leftrightarrow SDF \to (A \vee \overline{S})$;

61. $XC \leftrightarrow \overline{CZ \to VX \vee XZV} \leftrightarrow (Z \vee XC \vee \overline{VX}) \wedge ZXV\overline{C}$;

62. $RTE \vee \overline{WT(E \vee R \vee WT\overline{R}) \wedge RT \to E \leftrightarrow W\overline{ER}} \leftrightarrow RT \vee E$;

63. $(ASDF \to D \to F \to \overline{ASDF}) \leftrightarrow A \to DF \leftrightarrow D$;

64. $L\overline{H \leftrightarrow KJ} \leftrightarrow \overline{KH} \to HLJ \to J \vee L \vee K(HJ \vee LK \vee \overline{HJ})$;

65. $O \vee U \vee \overline{PIO} \leftrightarrow UP \to P \leftrightarrow (U \vee OI \vee \overline{IO \vee U \leftrightarrow PU \to UOP})$;

66. $ABC \vee \overline{DC \to AB \leftrightarrow CD\overline{A}(D \vee A)} \leftrightarrow (DC \vee A(\overline{A} \vee B))$;

67. $Z \leftrightarrow C \to CX \leftrightarrow \overline{ZCV \vee X\overline{C} \vee CVX \leftrightarrow Z} \wedge XC \to CV \vee Z$;

68. $T \to \overline{ER(W \leftrightarrow \overline{R \vee \overline{E}(ERT \vee W \to WT)}))} \leftrightarrow WER \vee ERT \vee WRT$;

69. $KLM \vee \overline{N \to K} \wedge M \vee N(\overline{KL} \to N \leftrightarrow MK \vee KLN) \leftrightarrow N$.

§4. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ)

Привести данные высказывания к СДНФ, по возможности упростить.

Пример

Привести к СДНФ высказывание $F = \overline{A \vee B \to AC}$. По возможности упростить ее.

Решение

Построим таблицу истинности высказывания F.

A	B	C	$A \vee B$	AC	$A \vee B \to AC$	F
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

$F = A^0B^1C^0 \vee A^0B^1C^1 \vee A^1B^0C^0 \vee A^1B^1C^0 =$
$\overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}\overline{C} \vee AB\overline{C}$.

Высказывание приведено к СДНФ. Полученную СДНФ можно упростить, приведя ее к более простой ДНФ.

$F = \overline{A}B(\overline{C} \vee C) \vee A\overline{C}(\overline{B} \vee B) = \overline{A}B \cdot 1 \vee A\overline{C} \cdot 1 = \overline{A}B \vee A\overline{C}$.

1. $(\overline{DC \vee BD} \to \overline{(DB \leftrightarrow DC)} \vee DB \to C$;
2. $(DC \vee \overline{C \to DB})B \vee \overline{DC \leftrightarrow C \vee BC} \to B$;
3. $\overline{BC \vee AB} \vee (AB \to \overline{B}C) \vee \overline{\overline{AC \leftrightarrow CB} \wedge AB}$;
4. $\overline{AB \vee CA} \to \overline{A \vee C} \wedge (AD \leftrightarrow AB \vee \overline{B})$;
5. $XYZ \vee XZ \to (\overline{X \vee Y} \leftrightarrow XY) \wedge YX \vee Z\overline{X}$;
6. $\overline{B}C \vee (\overline{DB \to DC} \vee B) \wedge DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DB}$;
7. $A \vee \overline{BC} \leftrightarrow (AC \vee \overline{B \to C}) \wedge B\overline{C} \vee ABC$;
8. $FB \vee \overline{E\overline{B} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F} \to (E \vee FB)$;

9. $\overline{AD \to A} \to \overline{ACD \vee C} \wedge (A \to \overline{ACD \vee \overline{C}});$

10. $\overline{S \vee T \to L} \wedge (ST \leftrightarrow L) \to \overline{S\overline{L} \vee TSL};$

11. $\overline{CB \vee D} \wedge CD \to BC \wedge \overline{(DB \leftrightarrow C) \vee DC};$

12. $(S\overline{D}G \vee S \to \overline{DG}) \vee G \to \overline{SD \vee G} \leftrightarrow S\overline{D};$

13. $FB \vee (\overline{E\overline{B} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F}) \to (E \vee FB);$

14. $(A \vee \overline{BC} \leftrightarrow AC \vee \overline{BA \to C}) \wedge A\overline{C} \vee ABC;$

15. $X\overline{W} \vee (Z \to XW) \leftrightarrow \overline{ZX \wedge W \to X} \vee Z;$

16. $CA \vee \overline{CAB \to (\overline{B}A \leftrightarrow CB)} \leftrightarrow CA \vee B\overline{A};$

17. $\overline{AC \leftrightarrow D} \vee (CD \to \overline{D \wedge AC})A \leftrightarrow AD \vee \overline{D};$

18. $(\overline{DF \to DC} \vee C)F \vee DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DB} \to B;$

19. $S \vee \overline{DG}(S \vee \overline{DG}) \to S \to \overline{SD \vee G} \leftrightarrow S\overline{D} \vee S;$

20. $(X\overline{W} \vee Y \to XYW \leftrightarrow \overline{XW \to X}) \wedge Y;$

21. $\overline{AB \to A} \to (\overline{ACD \vee C} \wedge A \to \overline{ABD \vee \overline{C}});$

22. $\overline{ST \vee K \leftrightarrow KL}(ST \leftrightarrow L \to \overline{S\overline{L} \vee TSL}) \wedge \overline{K};$

23. $(\overline{YZ} \vee X\overline{Z} \leftrightarrow \overline{X \vee YW} \to \overline{WY}) \leftrightarrow Y \vee Z\overline{YW};$

24. $\overline{B \to CA} \to A\overline{D} \wedge (\overline{D \leftrightarrow AB} \vee \overline{B}) \leftrightarrow CB \vee \overline{CD};$

25. $\overline{A\overline{C} \vee B} \to (\overline{CD} \to \overline{\overline{D} \wedge BC}) \leftrightarrow BAD \vee \overline{AD};$

26. $XY\overline{Z} \vee \overline{XZ} \leftrightarrow (\overline{X \vee YW} \to \overline{W}Y) \wedge \overline{YX \vee Z\overline{W}};$

27. $F \vee (A \wedge \overline{DA} \to \overline{A \vee DF}) \leftrightarrow AF \vee A \to \overline{DF};$

28. $AB \vee \overline{E\overline{D} \to EA} \leftrightarrow \overline{AEB \vee A} \to (E \vee AB);$

29. $S \wedge \overline{DG \vee (S \to TS \leftrightarrow DG)} \vee T \wedge \overline{STD \vee G} \to S\overline{D};$

30. $\overline{SB \to SC} \to \overline{SCD \vee C} \wedge (S \to \overline{SCD \vee \overline{C}});$

31. $YZ \to WX \vee (\overline{WX \leftrightarrow Z} \vee XZ \to YW) \leftrightarrow YX \vee WY;$

32. $(A \vee D \vee C)ABD \leftrightarrow \overline{DC \to A\overline{C \vee B}} \to ABCD;$

33. $S \vee D \to \overline{FE \leftrightarrow D \to \overline{S}} \wedge (ES \vee DF \leftrightarrow ESF) \leftrightarrow \overline{SD}.$

§5. Построение СДНФ для высказываний, заданных таблицами истинности

Привести данные высказывания к СДНФ, по возможности упростить.

1.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

4.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

6.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

7.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

8.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

9.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

11.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

13.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

15.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

10.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

17.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

12.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

14.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

16.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

19.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

20.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

21.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

22.

a	b	C	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

18.

a	b	c	F(a,b,c)

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

23.

a	b	c	F(a,b,c)

25.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

27.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

24.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

29.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

26.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

28.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

31.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

33.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

30.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0

35.

a	b	c	F(a,b,c)

0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

32.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

34.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

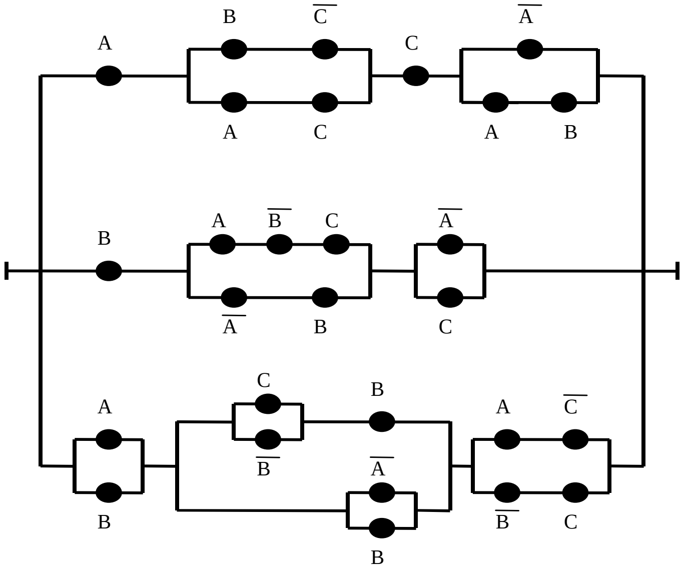
36.

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0

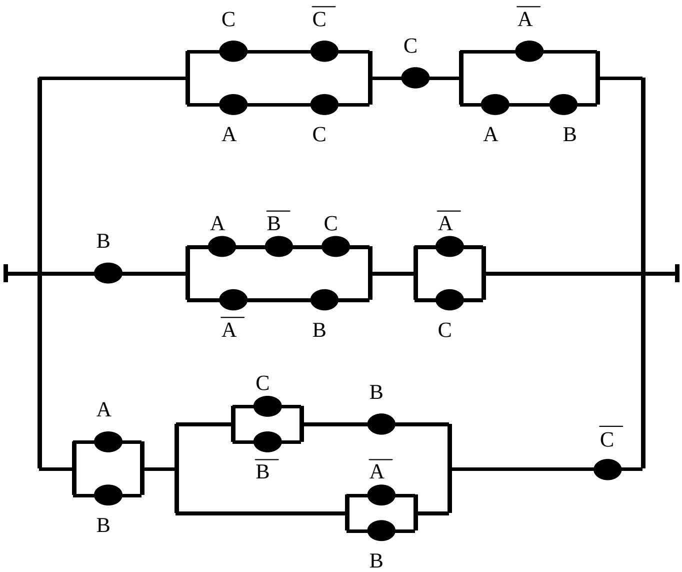
§6. Приложение алгебры высказываний к исследованию параллельно-последовательных двухполюсников

Упростить следующие последовательно-параллельные двухполюсники:

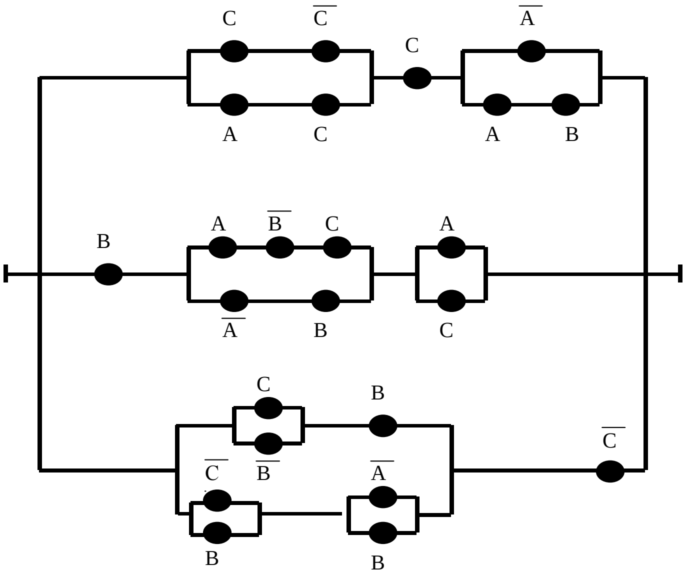
1.



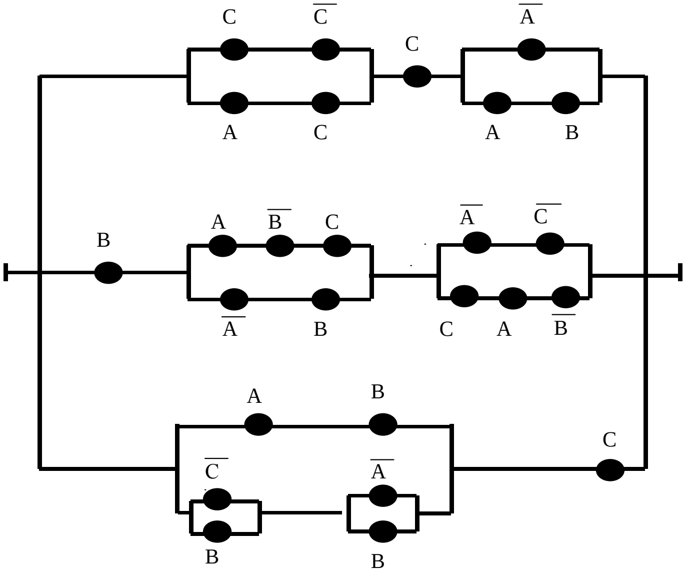
2.


C $\overline{C}$ C $\overline{A}$
A C A B
B A $\overline{B}$ C $\overline{A}$
$\overline{A}$ B C
C B A $\overline{C}$
$\overline{B}$ $\overline{A}$
B B

3.

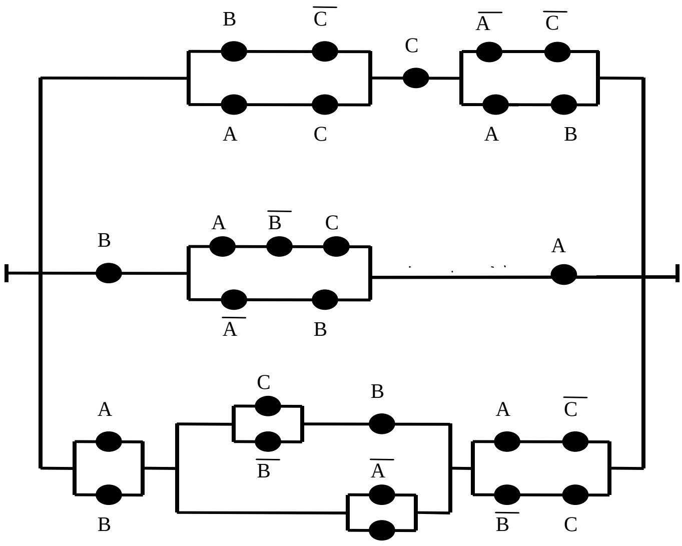

C $\overline{C}$ C $\overline{A}$
A C A B
B A $\overline{B}$ C A
$\overline{A}$ B C
C B $\overline{C}$
$\overline{C}$ $\overline{B}$ $\overline{A}$
B B

4.



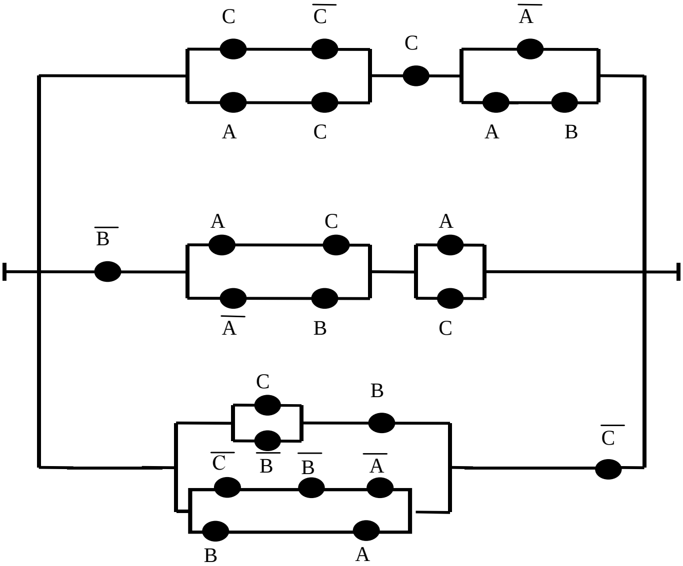
C $\overline{C}$ C $\overline{A}$
A C A B
B A $\overline{B}$ C $\overline{A}$ $\overline{C}$
$\overline{A}$ B C A $\overline{B}$
A B C
$\overline{C}$ $\overline{A}$
B B

5.

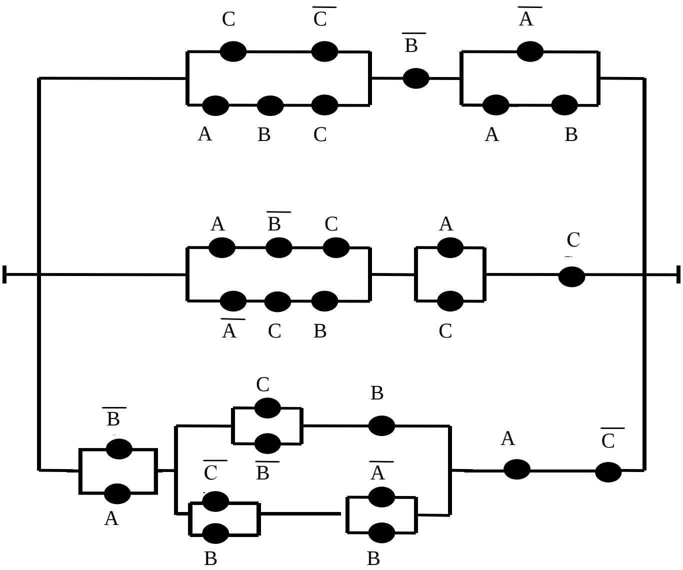


B $\overline{C}$ C $\overline{A}$ $\overline{C}$
A C A B
B A $\overline{B}$ C A
$\overline{A}$ B
C B A $\overline{C}$
A
$\overline{B}$ $\overline{A}$
B $\overline{B}$ C
B

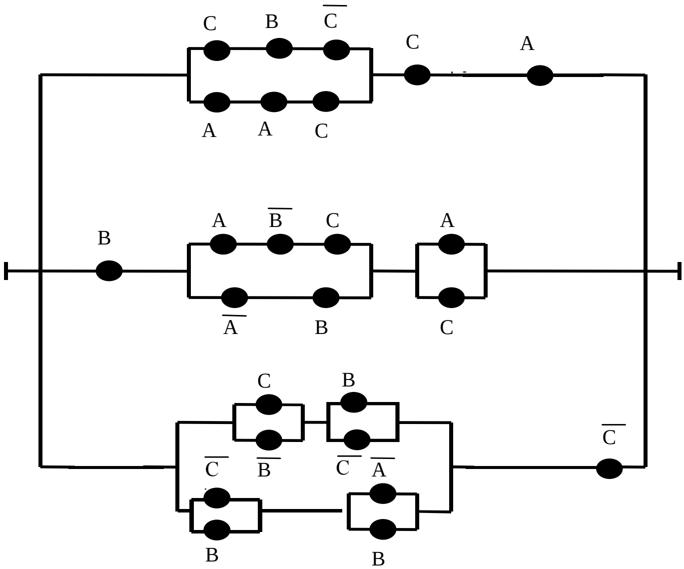
6.


C $\overline{C}$ C $\overline{A}$
A C A B
$\overline{B}$ A C A
$\overline{A}$ B C
C B
$\overline{C}$
$\overline{C}$ $\overline{B}$ $\overline{B}$ $\overline{A}$
B A

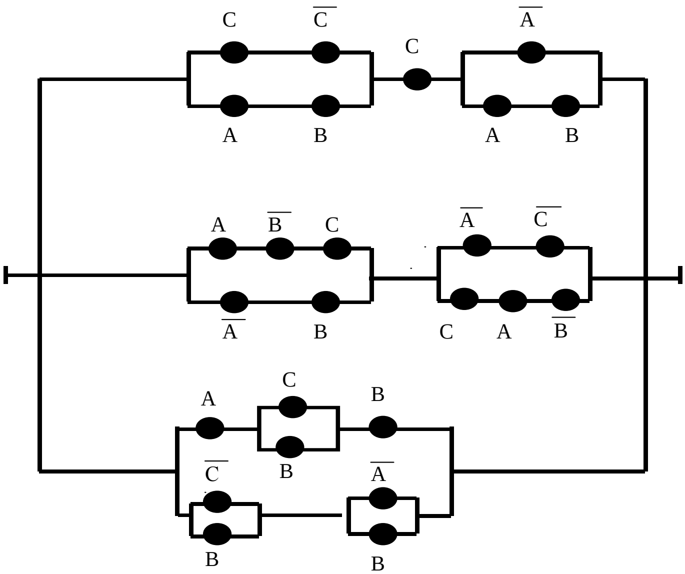
7.


C $\overline{C}$ $\overline{B}$ $\overline{A}$
A B C A B
A $\overline{B}$ C A C
$\overline{A}$ C B C
C B
$\overline{B}$ A $\overline{C}$
$\overline{C}$ $\overline{B}$ $\overline{A}$
A B B

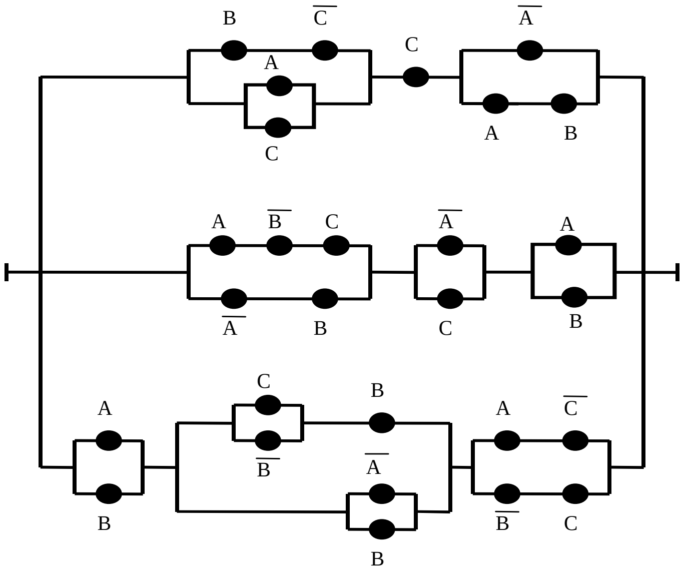
8.


C B $\overline{C}$ C A
A A C
B A $\overline{B}$ C A
$\overline{A}$ B C
C B
$\overline{C}$ $\overline{B}$ $\overline{C}$ $\overline{A}$ $\overline{C}$
B B

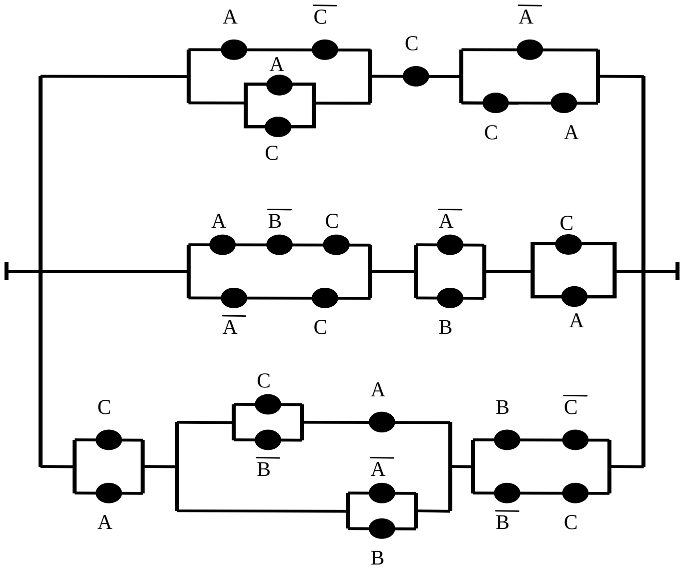
9.


C $\overline{C}$ C $\overline{A}$
A B A B
A $\overline{B}$ C $\overline{A}$ $\overline{C}$
$\overline{A}$ B C A $\overline{B}$
A C B
B
$\overline{C}$ $\overline{A}$
B B

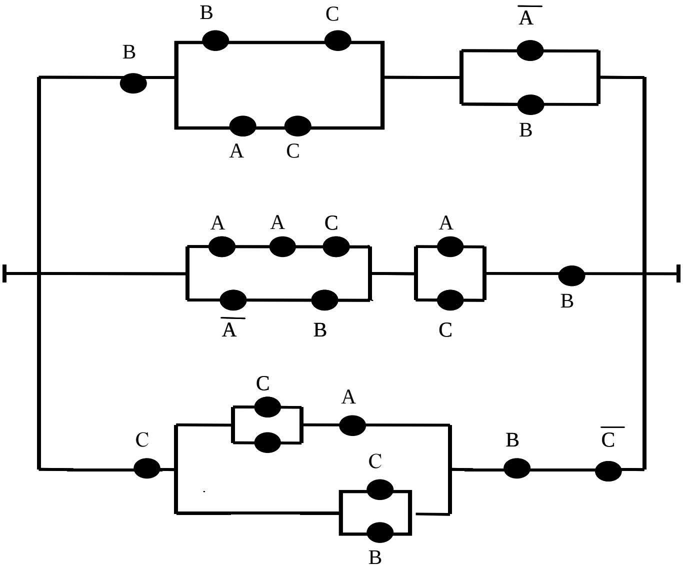
10.


B $\overline{C}$ C $\overline{A}$
A
C A B
A $\overline{B}$ C $\overline{A}$ A
$\overline{A}$ B C B
C B
A A $\overline{C}$
$\overline{B}$ $\overline{A}$
B $\overline{B}$ C
B

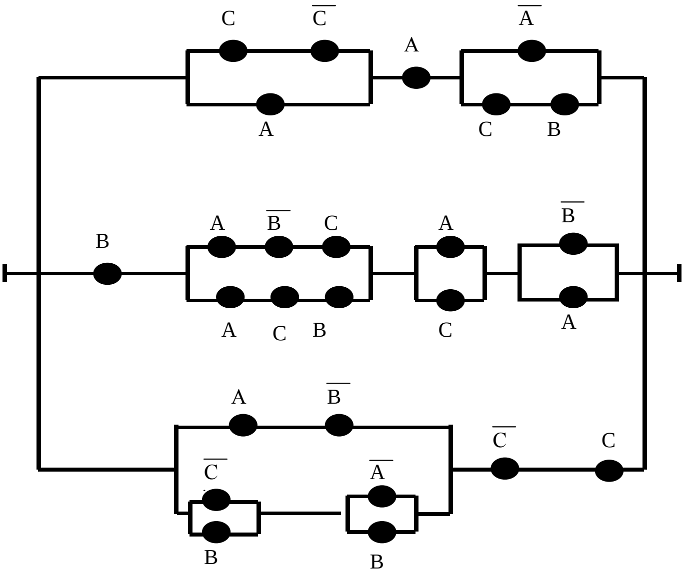
11.


A $\overline{C}$ C $\overline{A}$
A
C C A
A $\overline{B}$ C $\overline{A}$ C
$\overline{A}$ C B A
C A
C B $\overline{C}$
$\overline{B}$ $\overline{A}$
A $\overline{B}$ C
B

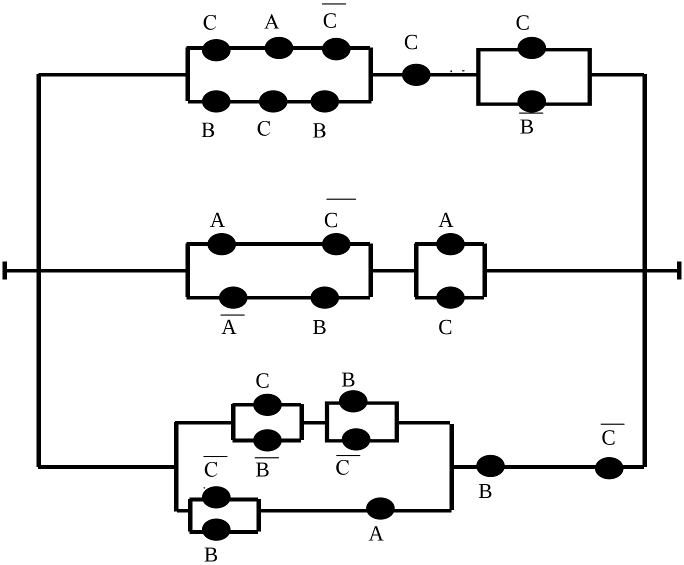
12.


B C $\overline{A}$
B
B
A C
A A C A
B
$\overline{A}$ B C
C
A
C B $\overline{C}$
C
B

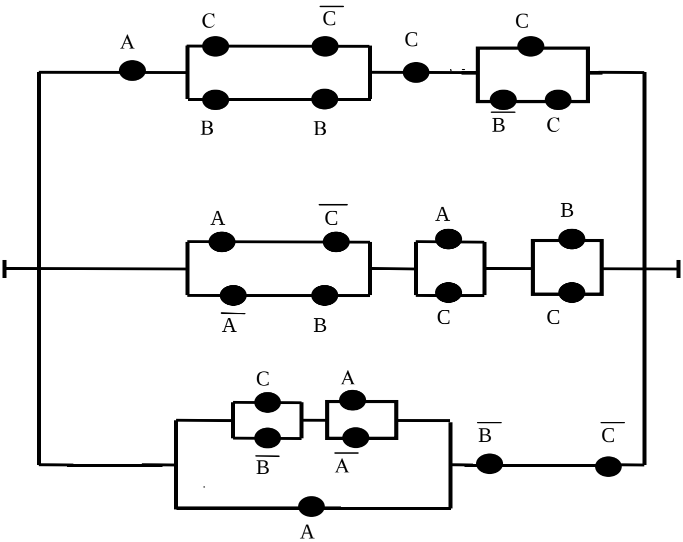
13.


C $\overline{C}$ $\overline{A}$
A
A C B
A $\overline{B}$ C A $\overline{B}$
B
A C B C A
A $\overline{B}$
$\overline{C}$ C
$\overline{C}$ $\overline{A}$
B B

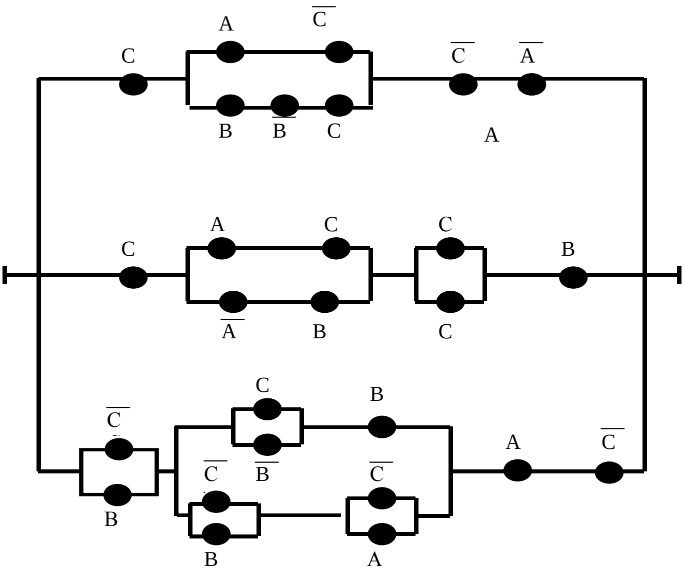
14.


C A $\overline{C}$
C
C
B C B
$\overline{B}$
A $\overline{C}$ A
$\overline{A}$ B C
C B
$\overline{C}$
$\overline{C}$ $\overline{B}$ $\overline{C}$
B
A
B

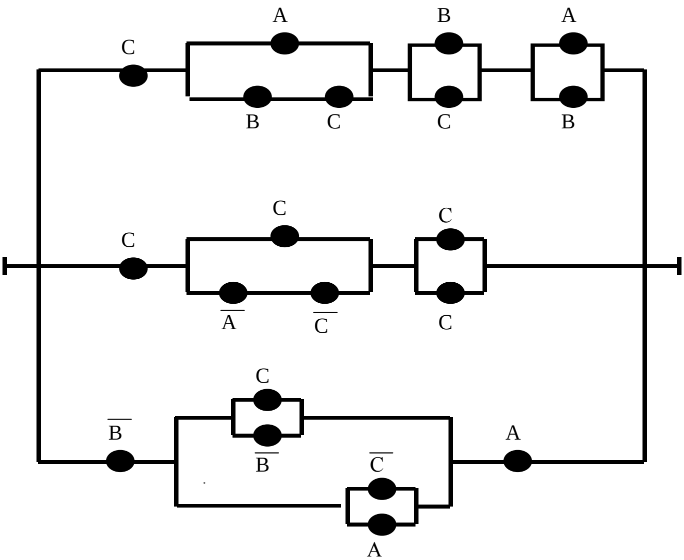
15.


A
C $\overline{C}$
C
C
B B
$\overline{B}$ C
A $\overline{C}$ A B
$\overline{A}$ B C C
C A
$\overline{B}$ $\overline{C}$
$\overline{B}$ $\overline{A}$
A

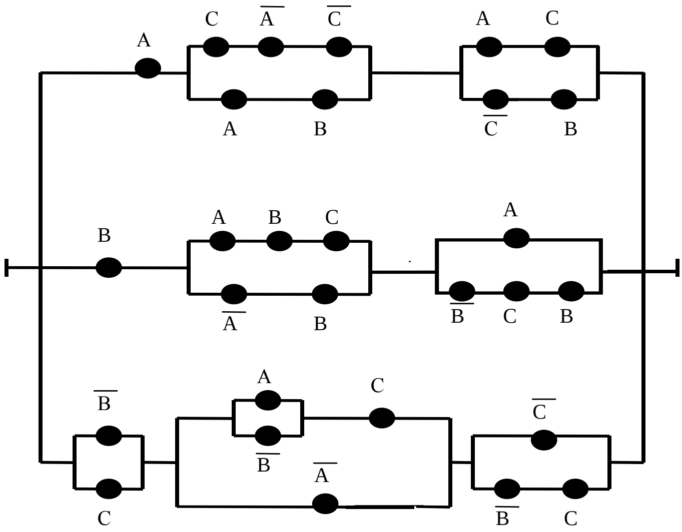
16.


A $\overline{C}$
C $\overline{C}$ $\overline{A}$
B $\overline{B}$ C A
A C C
C B
$\overline{A}$ B C
C B
$\overline{C}$ $\overline{B}$ A $\overline{C}$
$\overline{C}$ $\overline{C}$
B
B A

17.


A B A
C
B C C B
C C
C
$\overline{A}$ $\overline{C}$ C
C
$\overline{B}$ A
$\overline{B}$
$\overline{C}$
A

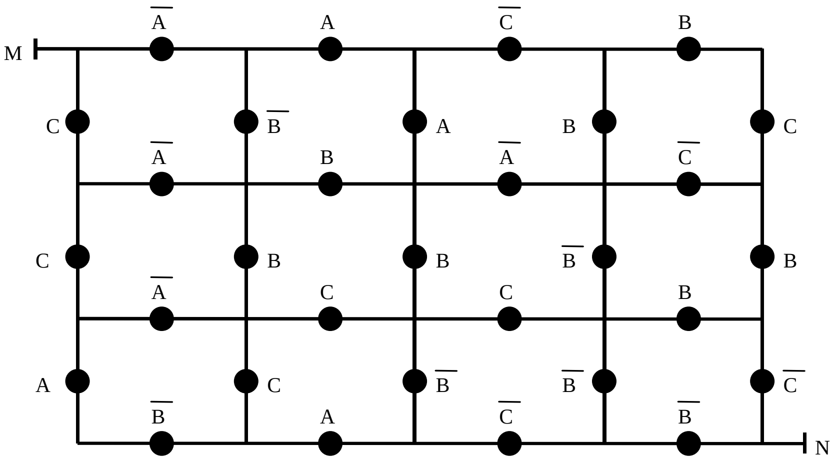
18.



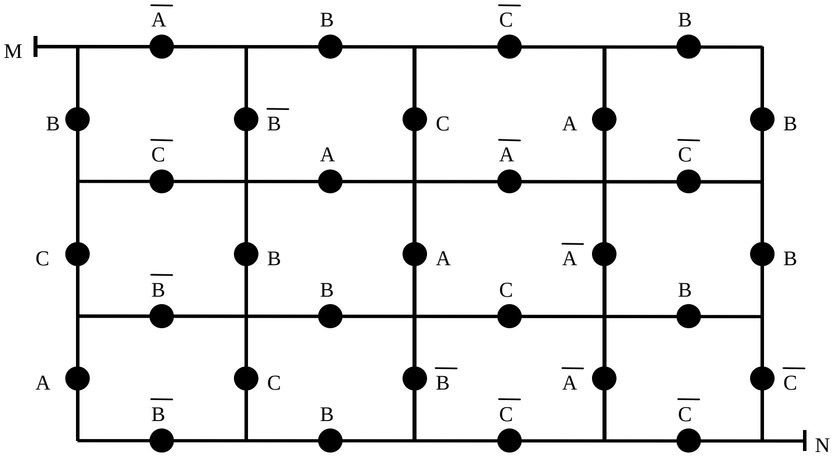
§7. Приложение алгебры высказываний к исследованию произвольных двухполюсников

Упростить следующие произвольные двухполюсники:

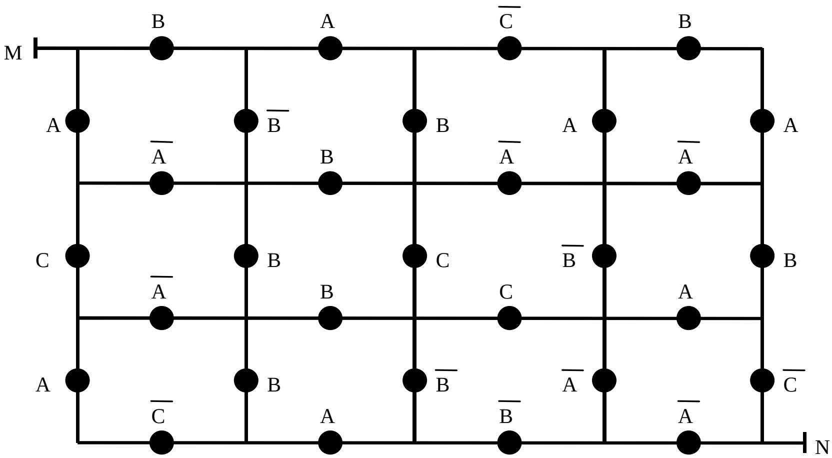
1.



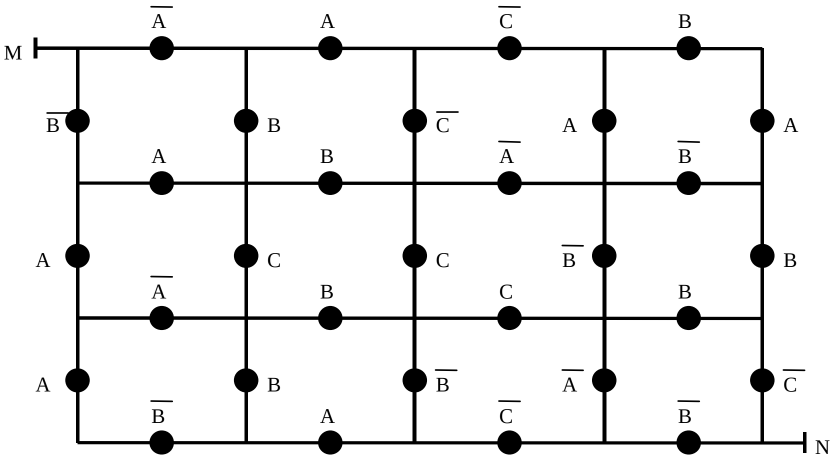
2.


M
$\overline{A}$ B $\overline{C}$ B
B $\overline{B}$ C A B
$\overline{C}$ A $\overline{A}$ $\overline{C}$
C B A $\overline{A}$ B
$\overline{B}$ B C B
A C $\overline{B}$ $\overline{A}$ $\overline{C}$
$\overline{B}$ B $\overline{C}$ $\overline{C}$
N

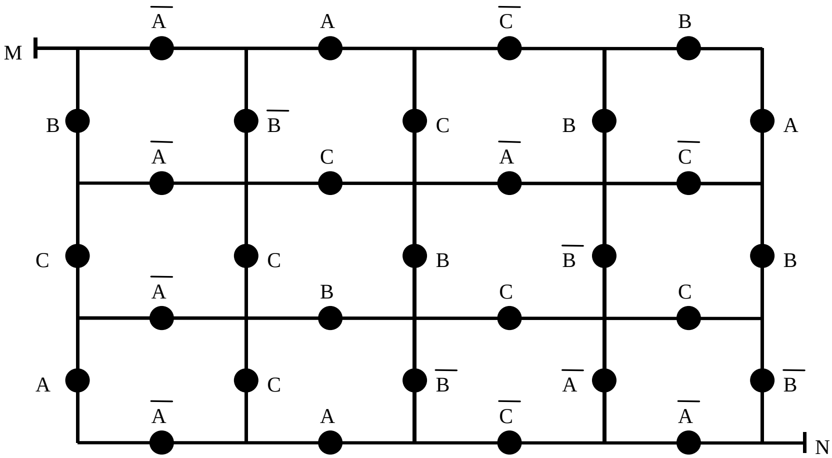
3.


M
B A $\overline{C}$ B
A $\overline{B}$ B A A
$\overline{A}$ B $\overline{A}$ $\overline{A}$
C B C $\overline{B}$ B
$\overline{A}$ B C A
A B $\overline{B}$ $\overline{A}$ $\overline{C}$
$\overline{C}$ A $\overline{B}$ $\overline{A}$
N

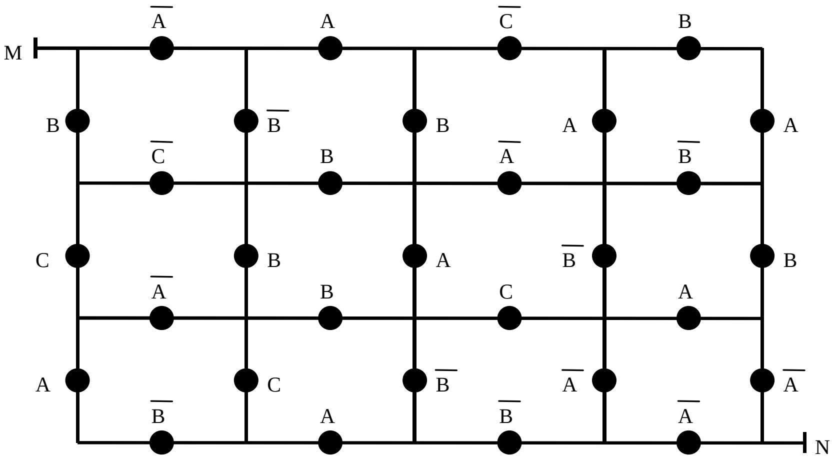
4.



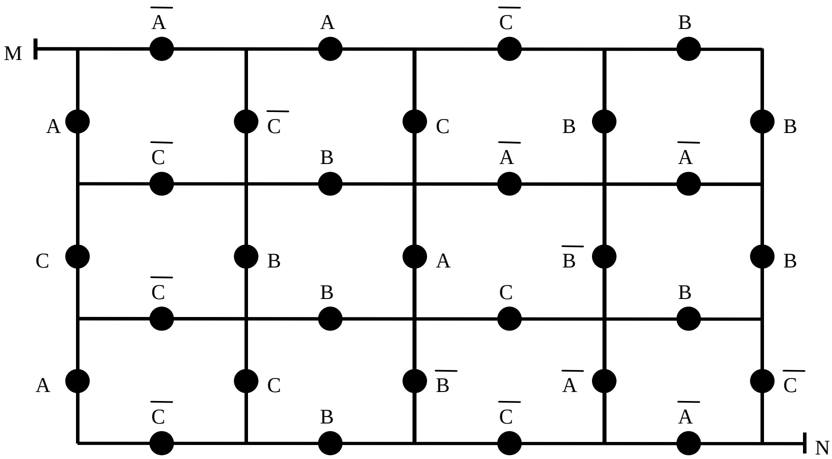
5.



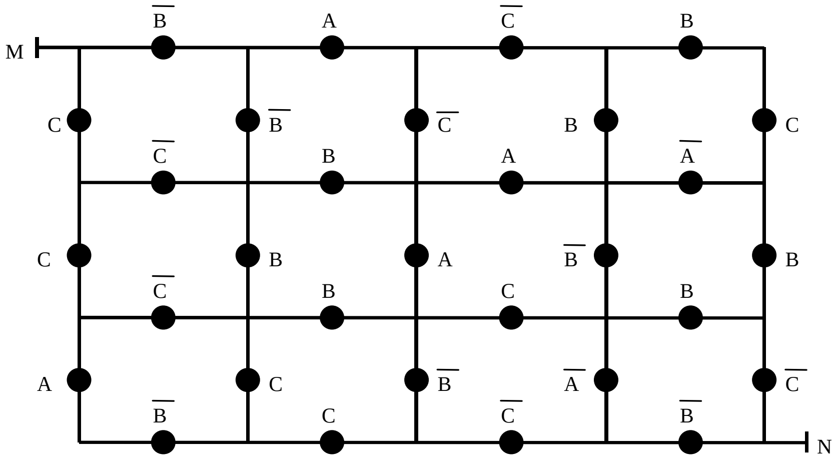
6.



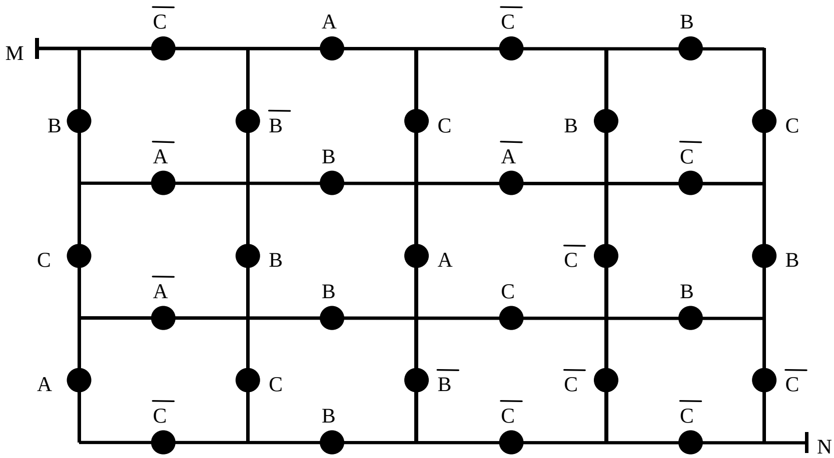
7.



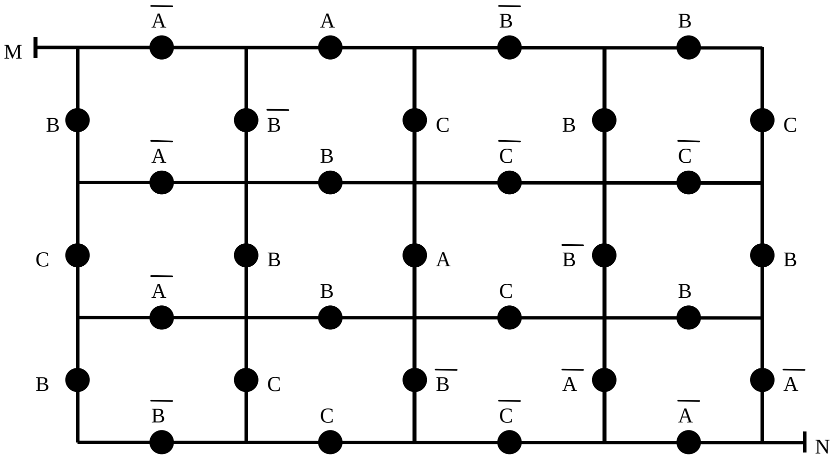
8.


M
$\overline{B}$ A $\overline{C}$ B
C $\overline{B}$ $\overline{C}$ B C
$\overline{C}$ B A $\overline{A}$
C B A $\overline{B}$ B
$\overline{C}$ B C B
A C $\overline{B}$ $\overline{A}$ $\overline{C}$
$\overline{B}$ C $\overline{C}$ $\overline{B}$
N

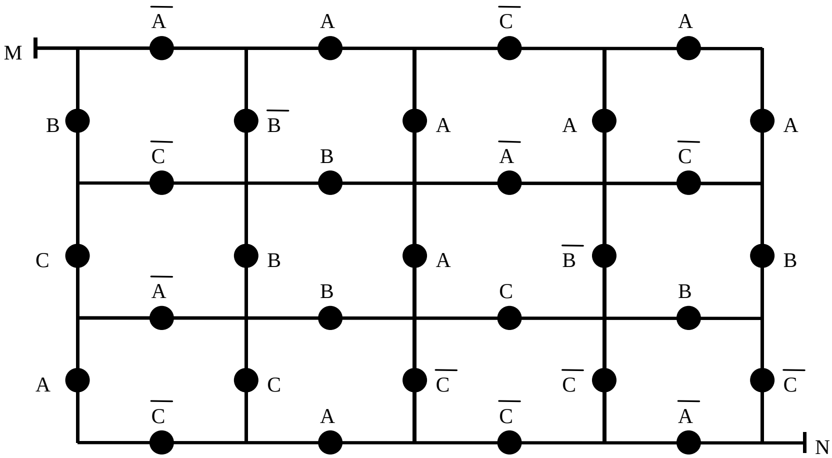
9.


M
$\overline{C}$ A $\overline{C}$ B
B $\overline{B}$ C B C
$\overline{A}$ B $\overline{A}$ $\overline{C}$
C B A $\overline{C}$ B
$\overline{A}$ B C B
A C $\overline{B}$ $\overline{C}$ $\overline{C}$
$\overline{C}$ B $\overline{C}$ $\overline{C}$
N

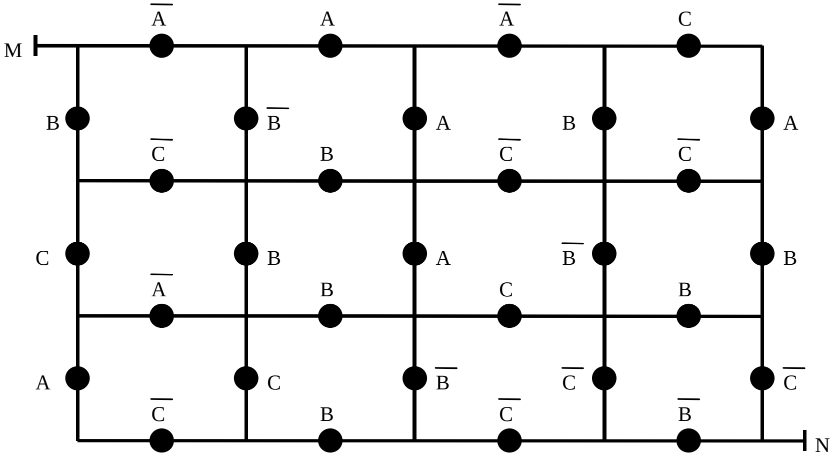
10.


M
$\overline{A}$ A $\overline{B}$ B
B $\overline{B}$ C B C
$\overline{A}$ B $\overline{C}$ $\overline{C}$
C B A $\overline{B}$ B
$\overline{A}$ B C B
B C $\overline{B}$ $\overline{A}$ $\overline{A}$
$\overline{B}$ C $\overline{C}$ $\overline{A}$
N

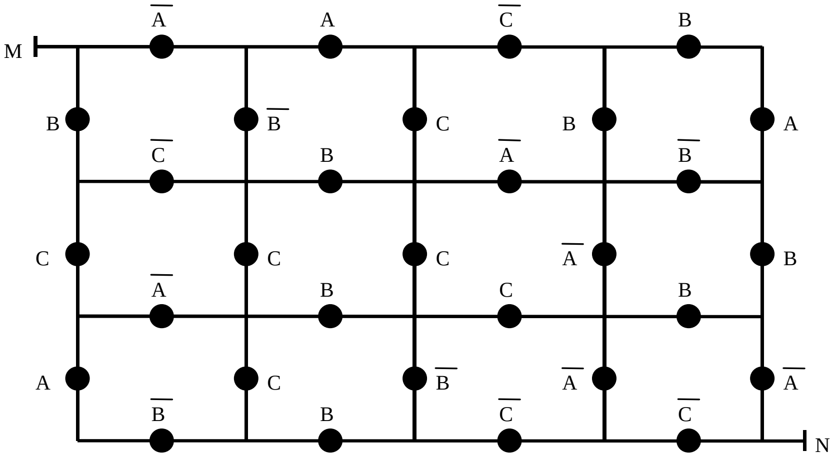
11.


M
$\overline{A}$ A $\overline{C}$ A
B $\overline{B}$ A A A
$\overline{C}$ B $\overline{A}$ $\overline{C}$
C B A $\overline{B}$ B
$\overline{A}$ B C B
A C $\overline{C}$ $\overline{C}$ $\overline{C}$
$\overline{C}$ A $\overline{C}$ $\overline{A}$
N

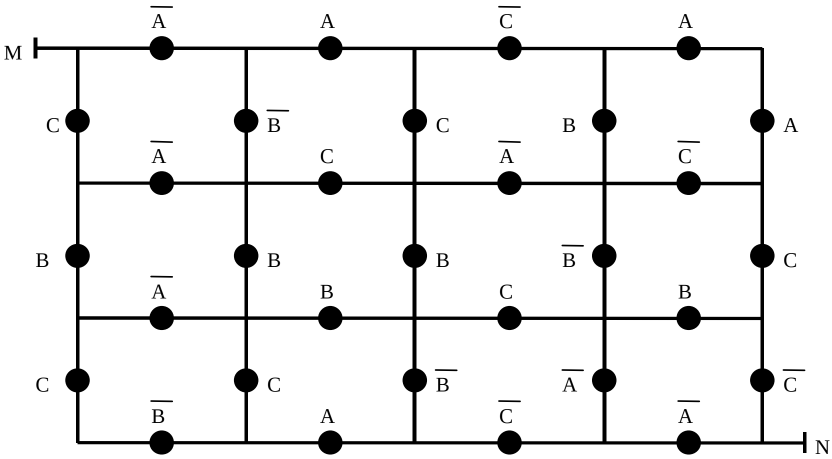
12.


M
N
$\overline{A}$ A $\overline{A}$ C
B $\overline{B}$ A B A
$\overline{C}$ B $\overline{C}$ $\overline{C}$
C B A $\overline{B}$ B
$\overline{A}$ B C B
A C $\overline{B}$ $\overline{C}$ $\overline{C}$
$\overline{C}$ B $\overline{C}$ $\overline{B}$

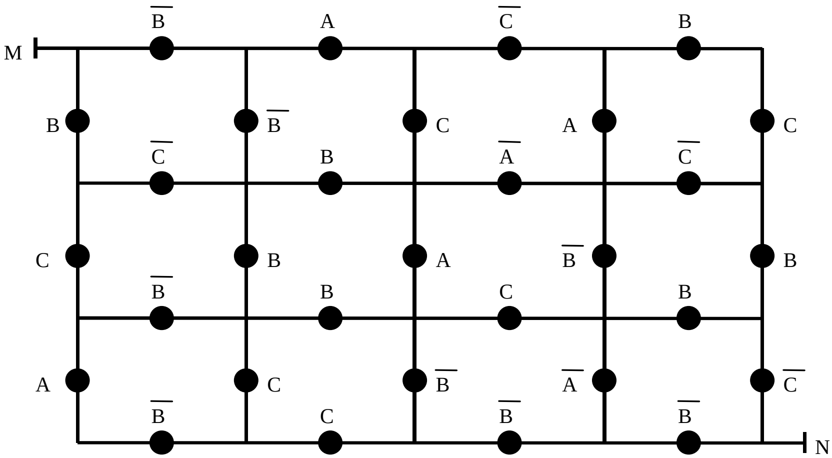
13.


M
N
$\overline{A}$ A $\overline{C}$ B
B $\overline{B}$ C B A
$\overline{C}$ B $\overline{A}$ $\overline{B}$
C C C $\overline{A}$ B
$\overline{A}$ B C B
A C $\overline{B}$ $\overline{A}$ $\overline{A}$
$\overline{B}$ B $\overline{C}$ $\overline{C}$

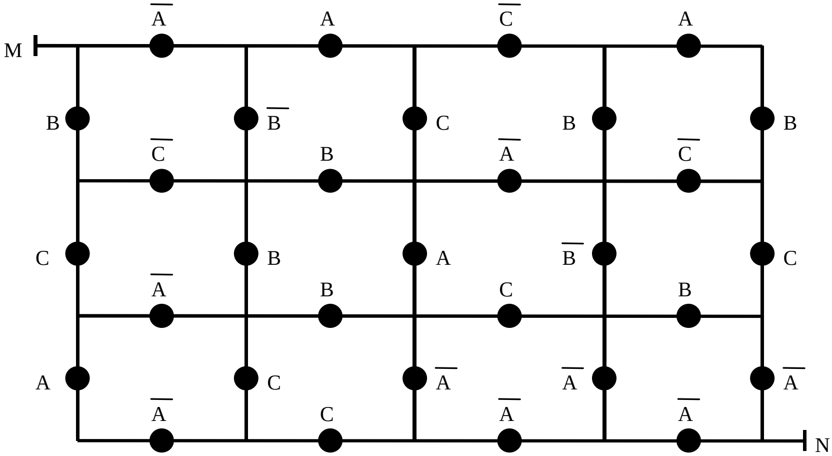
14.


M
N
$\overline{A}$ A $\overline{C}$ A
C $\overline{B}$ C B A
$\overline{A}$ C $\overline{A}$ $\overline{C}$
B B B $\overline{B}$ C
$\overline{A}$ B C B
C C $\overline{B}$ $\overline{A}$ $\overline{C}$
$\overline{B}$ A $\overline{C}$ $\overline{A}$

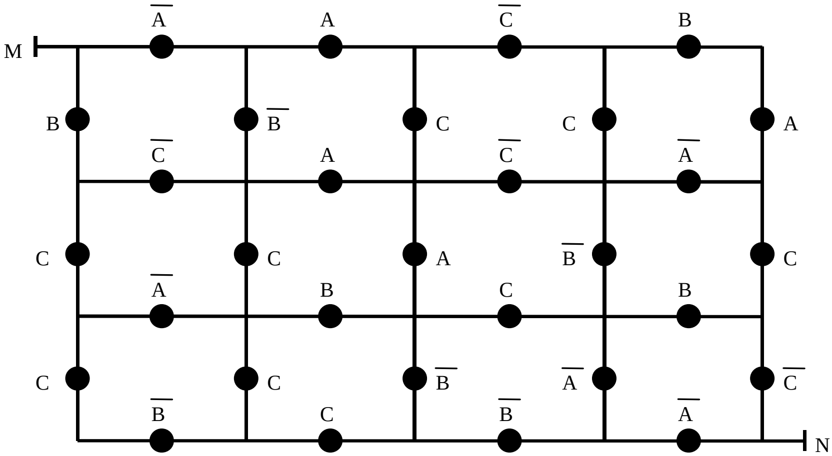
15.


M
N
$\overline{B}$ A $\overline{C}$ B
B $\overline{B}$ C A C
$\overline{C}$ B $\overline{A}$ $\overline{C}$
C B A $\overline{B}$ B
$\overline{B}$ B C B
A C $\overline{B}$ $\overline{A}$ $\overline{C}$
$\overline{B}$ C $\overline{B}$ $\overline{B}$

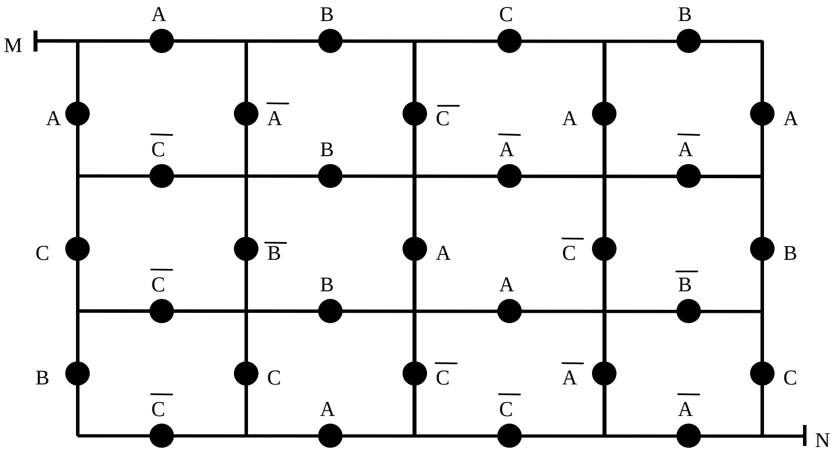
16.



17.



18.



§8. Задачи на голосование

Составить схемы результатов голосования для следующих задач.

Пример

Голосуют три человека А, В, С. Предложение принимается большинством голосов, причём В – председатель, обладающий правом вето, т. е. Если он голосует «против», то предложение не принимается.

Решение

Все возможные варианты голосования этих людей сведем в следующую таблицу, в которой тот факт, что соответствующий человек (А, В или С) проголосовал «против», будем обозначать нулем в соответствующей ячейке и единицей, – если «за».

A	B	C	F
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

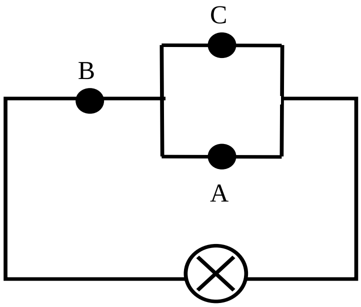
В столбце F будем ставить "0" в строках, соответствующих вариантам голосования, при которых предложение не принимается и "1" в строках, соответствующих вариантам голосования, при которых предложение принимается. Так как B – председатель, обладающий правом вето, то если в некоторой строке B=0, то и F=0 в этой строке. Если в некоторой строке B=1, т.е. председатель – "за", то и F=1 в этой строке в том и только том случае, когда хотя бы еще один человек проголосовал "за", то есть A=1 или (и) C=1.

Данную таблицу можно рассматривать как таблицу истинности некоторого высказывания F, СДНФ которого легко по этой таблице построить: $F= A^0B^1C^1 \vee A^1B^1C^0 \vee A^1B^1C^1 = \overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee ABC$.

Полученную СДНФ можно упростить:

$$F = \overline{A}BC \vee AB(\overline{C} \vee C) = \overline{A}BC \vee AB = B(\overline{A}C \vee A) = B(C \vee A)\,.$$

Данное высказывание описывает следующую схему, в которой сигнал зажигается, если предложение принято:



1. Голосуют три человека A, B, C. Предложение принимается большинством голосов.
2. Голосуют три человека A, B, C. Предложение принимается большинством голосов, причём A – председатель, обладающий правом вето, т. е. если он голосует "против", то предложение не принимается.
3. Голосуют три человека A, B, C. Предложение принимается большинством голосов, причём C – председатель, обладающий правом вето, т. е. если он голосует "против", то предложение не принимается.
4. Голосуют три человека A, B, C. Предложение принимается большинством голосов, причём выполняются следующие условия:

а) если C голосует "за", то B голосует "против";

б) C голосует "против" тогда и только тогда, когда B голосует "за";

в) если C голосует "за" или B голосует "за", то A голосует "против";

г) A и B – коалиция, т. е. голосуют одинаково, а C им противоречит;

д) C подозревает A и B в коалиции, т. е. если A и B голосуют одинаково, то C им противоречит;

е) если C голосует "за", то A голосует "за" тогда и только тогда, когда B голосует "против";

ж) если B голосует "за", то C голосует "против" тогда и только тогда, когда A голосует "против";

з) A или B голосуют "против" тогда и только тогда, когда C голосует "за";

и) C и A голосуют "за" тогда и только тогда, когда B голосует "против";

к) если A голосует "за" или B голосует "против", то C голосует "за".

5. Голосуют три человека A, B, C. Предложение принимается большинством голосов, причём A обладает правом вето. Кроме того, выполняются следующие условия:

а) если B голосует "за", то C голосует "против";

б) B голосует "против" тогда и только тогда, когда C голосует "за";

в) если C голосует "за" или A голосует "за", то B голосует "против";

г) A и C – коалиция, т. е. голосуют одинаково, а B им противоречит;

д) A подозревает C и B в коалиции, т. е. если C и B голосуют одинаково, то A им противоречит;

е) если A голосует "за", то C голосует "за" тогда и только тогда, когда B голосует "против";

ж) если C голосует "за", то A голосует "против" тогда и только тогда, когда B голосует "против";

з) B или C голосуют "против" тогда и только тогда, когда A голосует "за";

и) C и B голосуют "за" тогда и только тогда, когда A голосует "против";

к) если B голосует "за" или C голосует "против", то A голосует "за".

6. Голосуют четыре человека A, B, C, D. Предложение принимается большинством голосов. Если голоса разделились поровну, то предложение принимается, если A голосует "за".

7. Голосуют четыре человека A, B, C, D. Предложение принимается большинством голосов. Если голоса разделились поровну, то предложение принимается, если B голосует "за".

8. Голосуют четыре человека A, B, C, D. Предложение принимается большинством голосов. Если голоса разделились поровну, то предложение принимается, если C голосует "за".

9. Голосуют четыре человека A, B, C, D. Предложение принимается большинством голосов. Если голоса разделились поровну, то предложение принимается, если D голосует "за".

10. Голосуют четыре человека A, B, C, D. A обладает правом вето. Предложение принимается, если за него проголосовало не меньше половины.

11. Голосуют четыре человека A, B, C, D. B обладает правом вето. Предложение принимается, если за него проголосовало не меньше половины.

12. Голосуют четыре человека A, B, C, D. C обладает правом вето. Предложение принимается, если за него проголосовало не меньше половины.

13. Голосуют четыре человека A, B, C, D. D обладает правом вето. Предложение принимается, если за него проголосовало не меньше половины.

14. Голосуют четыре человека A, B, C, D. Предложение принимается большинством голосов. Если голоса разделились поровну, то предложение принимается, если A голосует "за", причём выполняются следующие условия:

а) если B и C голосуют "за", то A и D голосуют одинаково;

б) если A голосует "за", то B или C голосует "за" тогда и только тогда, когда D голосует "против";

в) если C голосует "за", то A или B голосует "за";

г) если B голосует "против", то A и D голосуют "за";

д) если B и C друг другу противоречат, то C и D голосуют одинаково;

е) если A голосует "за" или C голосует "против", то B голосует "за" тогда и только тогда, когда D голосует "за";

ж) если A голосует "за", то B голосует "против", если A голосует "против", то B – "за", если B голосует "за", то C – "против", если C голосует "против", то D – "за";

з) если кто-то голосует "за", то остальные голосуют "против";

и) выполняется схема "попарного противоречия"; т. е. если какие-либо двое проголосовали "за", то другие двое – "против;

к) выполняется схема "круговой поруки", т. е. если A голосует "за", то B – "за", если B голосует "за", то C – "за", если C голосует "за", то D – "за", если D голосует "за", то A – "за".

15. Голосуют четыре человека A, B, C, D. A – председатель; если он голосует "против", то решение не принимается, если голоса разделились поровну, то решение принимается, когда A голосует "за". Во всех остальных случаях решение принимается большинством голосов, причём выполняются следующие условия:

а) если A и C голосуют "за", то B и D голосуют одинаково;

б) если C голосует "за", то A или D голосуют "за" тогда и только тогда, когда B голосует "против";

в) если D голосует "за", то A или C голосуют "за";

г) если C голосует "против", то B и D голосуют "за";

д) если A и C друг другу противоречат, то A и D голосуют одинаково.

ГЛАВА II. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

§1. Вычисление множеств

Вычислить указанное множество, если U={1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14}, A={1;2;3;4;7;9}, B={3;4;5;6;11;12;13}, C={2;3;4;7;8;12;13;14}, D={1;7;14}.

Пример

Пусть U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A={1, 2, 3, 4, 5}, B={2, 4, 6, 8}, C={1, 3, 5, 7}, D={1, 2, 4, 5, 7, 8}. Найти $(D \setminus A) \cap (B \cup C) \cup (C \dot{-} D)$.

Решение

$D \setminus A = \{7, 8\}$,
$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$(D \setminus A) \cap (B \cup C) = \{7, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{7, 8\}$,
$C \dot{-} D = \{2, 3, 4, 8\}$,
$(D \setminus A) \cap (B \cup C) \cup (C \dot{-} D) = \{7, 8\} \cup \{2, 3, 4, 8\} = \{2, 3, 4, 7, 8\}$.

1. $(A \cup B) \cap (D \setminus C)$;
2. $((A \cap \overline{C}) \cap D) \cup (B \cup \overline{A})$;
3. $(\overline{C} \cap D) \cap (D \cup (\overline{A} \cup \overline{B}))$;
4. $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cap D)$;
5. $(A \dot{-} D) \cup (B \cap C)$;
6. $(A \cup C) \cup (\overline{B} \setminus C)$;
7. $(((A \cup B) \cup C) \cap (B \cup \overline{A}))$;
8. $((A \cap B) \cup C) \cup D$;
9. $(\overline{A} \cup B) \cup (B \cup D)$;
10. $(A \cup \overline{B}) \cap (C \setminus D\ )$;
11. $((\overline{A \cap \overline{D}}) \cup (B \cup C)) \cap \overline{A}$;
12. $(A \cap B) \cup (\overline{\overline{C} \cap D})$;
13. $(A \dot{-} B) \cap (C \dot{-} D)$;
14. $(A \setminus B \setminus \overline{C}) \cup D$;
15. $(\overline{A \cup D}) \setminus (B \setminus C)$;
16. $(A - C) \cup (B \cup D)$;

17. $(A \cap B) \setminus (\overline{C \cup D})$;

18. $(\overline{B \cup C}) \cap (\overline{A \cup D}) \cap \overline{A}$;

19. $((A - B) \cup D) \setminus (C \cup D)$;

20. $((A \cap \overline{C}) \cap D) \cup \overline{B}$;

21. $((\overline{A \cap B}) \cap (A \cup C)) \cap D$;

22. $((A \setminus B) \cup (\overline{B \cap D})) \setminus C$;

23. $((A \setminus B) \cup (\overline{C \cap A}) \cup (D \cup \overline{B})$;

24. $(\overline{A} \cup B) \cup (B \cap C)$;

25. $(A \cap B) \cup (\overline{D} \dot{-} C)$;

26. $(A \cup \overline{D}) \cap (\overline{B \cup C})$;

27. $((\overline{B \cap D}) \setminus (C \cup D)) \cup \overline{A}$;

28. $\overline{(A \cup B) \cup (\overline{B \cap C}})\cup (\overline{A} \cup D)$;

29. $(\overline{A \cup D}) \cap (B \cup C)$;

30. $(F \cup B) \cup (D \setminus \overline{C})$;

31. $((A \setminus C) \dot{-} (B \rightarrow D)) \cup A$;

32. $(\overline{B} \cup C) \cup (D \dot{-} A)$;

33. $(\overline{\overline{A} \cup B}) \cup (\overline{C} \cap \overline{D})$;

34. $(A \cap D) \cap (B \cap \overline{\overline{C}})$;

35. $(A \cap B) \cup (C \cap \overline{\overline{D}})$;

36. $(B \cap (\overline{D \cap C})) \cup A$;

37. $(A \cap B) \cap (A \dot{-} (\overline{\overline{C \cap D}}))$;

38. $(A \cup (B \cup C)) \cap \overline{D}$;

39. $((A \cap B) \cup (\overline{C \cap D})) \cap \overline{A}$;

40. $((B \cup D) \cap A) \cup \overline{C}$;

41. $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{\overline{C} \cap \overline{D}})$;

42. $((A \cup C) \setminus (B \cap D)) \cup (\overline{A \cap D})$;

43. $(B \cup C) \cup (C \cap (A \setminus \overline{D}))$;

44. $((A \cup D) \cup C) \cup B$;

45. $((\overline{B \cap C}) \cup \overline{D}) \cap (A \cap D)$;

46. $((A \setminus \overline{C}\ ) \cap (B \cap D)) \cup D$;

47. $(\overline{A \cup B}) \cup (A \cap D) \cup (\overline{\overline{A} \cup \overline{C}})$;

48. $(A \cap B) \setminus (C \cup (D \cup \overline{A}))$;

49. $((A \cup B) \cap (C \cup D)) \cup (\overline{A} \cap B)$;

50. $(A \dot{-} D) \cup (\overline{B} \cup C)$;

51. $((A \cap B) \cup C) \cup (\overline{\overline{D \cap A}})$;

52. $(C \cup (\overline{A} \cup B)) \dot{-} A \cap D)$;

53. $(\overline{\overline{C} \cap A}) \cap (B \cup D)$;

54. $((A \dot{-} B) \cup C) \cap \overline{\overline{D}}$;

55. $((\overline{\overline{A \cup B}}) \cup (C \cap D)) \cup (A \cap B)$;

56. $A \cap (D \cup (\overline{\overline{B}} \cap C))$;

57. $(A \cup (\overline{\overline{B} \cup A})) \cup (D \cap \overline{C})$;

58. $(A \setminus D) \cap (B \cap (C \cup \overline{A}))$;

59. $(D \cup C) \cup (A \cap B) \cup \overline{D}$;

60. $(A \cup B) \cup (\overline{C \cap \overline{D}})$.

§2. Выражение множеств

Пусть U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A={1, 2, 3, 4, 5, 9}, B={2, 4, 6, 8}, C={1, 3, 5, 7}, D={1, 2, 4, 5, 7, 8, 9}. Выразить через известные множества A, B, C, D следующие множества или доказать, что это сделать невозможно.

Пример

Пусть U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A={1, 2, 3, 4, 5}, B={2, 4, 6, 8}, C={1, 3, 5, 7}, D={1, 2, 4, 5, 7, 8}. Выразить через известные множества A, B, C, D множество {1, 5}.

Решение

$A \cap C$={1, 3, 5},
$C \setminus D$={3},
$(A \cap C) \setminus (C \setminus D)$={1, 3, 5}\{3}={1, 5}.

1. {5; 6; 3; 4; 7; 1; 8};

2. {7; 1; 4; 3; 8; 5; 9; 6};
3. {9; 8; 6; 4};
4. {5; 7; 1; 6};
5. {3; 1; 6; 2; 7};
6. {8; 6; 1; 2; 3; 7; 9; 5};
7. {2; 9; 7; 1; 6};
8. {1; 9; 2; 7};
9. {3; 1; 2; 6; 7; 9; 4};
10. {1; 2; 6};
11. {4; 7; 3; 6};
12. {2; 6};
13. {5; 8; 4; 6; 3};
14. {3; 8; 5; 9; 7; 6; 4; 1};
15. {7; 9; 8; 1; 5; 6};
16. {7; 1; 4; 5};
17. {4; 3; 1; 2};
18. {1; 4; 8; 5; 2; 9; 3; 6; 7};
19. {9; 6};
20. {4; 1; 8; 5; 7};
21. {8; 4; 2; 7; 1; 3};
22. {1; 5};
23. {5; 8; 1; 2; 7; 4};
24. {2; 7; 9; 5};
25. {7; 5; 9; 2; 8};
26. {5; 4; 2; 3};
27. {6; 9; 3; 7; 1};
28. {9; 1};
29. {4; 8; 7; 3};
30. {3; 4; 1; 7; 8; 9; 5};
31. {3; 4; 1; 5; 2};
32. {6; 7; 9; 3; 5; 1; 2; 4};
33. {1; 9; 6; 4; 7; 5; 8; 2};
34. {4; 7; 1; 6; 3};
35. {9; 5; 4; 3; 8};
36. {7; 9; 4; 5; 6; 1; 2};
37. {5; 8; 3; 4};
38. {3; 6; 5; 7; 8};
39. {3; 4; 2; 5};
40. {6; 4; 8};
41. {2; 3; 7; 6; 8};
42. {8; 2};
43. {1; 6; 8; 4; 5; 3; 2; 1};

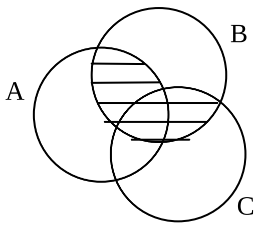
44. {5; 6; 2; 3; 7; 8; 4};
45. {7; 3; 9};
46. {7; 4; 1; 3; 2};
47. {4; 1; 2; 3; 5; 9};
48. {5; 9; 2; 7; 4};
49. {5; 2; 3};
50. {1; 9; 6; 3; 7}.

§3. Круги Эйлера (диаграммы Венна)

Выразить через данные множества закрашенную область.

Примеры

а) Выразить через множества A, B, C множество E, которому соответствует заштрихованная область.



Решение

Так как заштрихованное множество на рис. 1 соответствует множеству $A \cap B$, а множество на рис. 2 соответствует множеству $B \cap C$, то множество E есть объединение этих множеств.

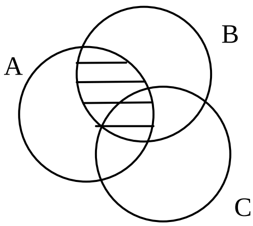


Рис. 1

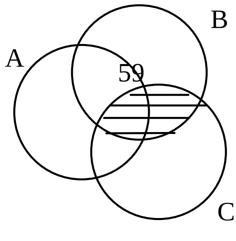
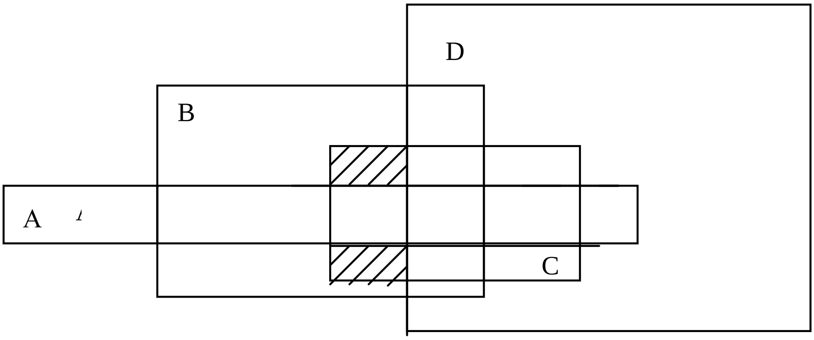


Рис. 2

То есть $E=(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

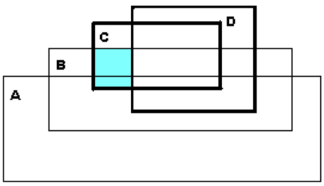
b) Выразить через множества A, B, C, D множество E, которому соответствует заштрихованная область.

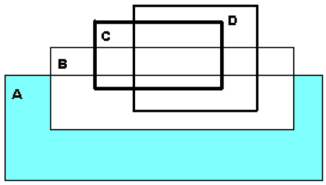


Решение

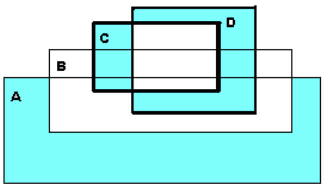
$E=(A \dot{-} C) \setminus D$. (По определению, напомним, $X \dot{-} Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$)

1.

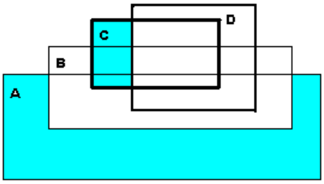




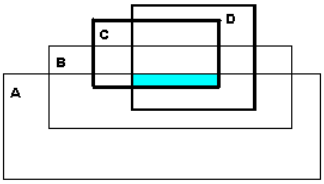
2.
3.



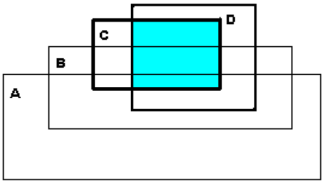
5.



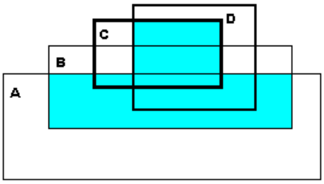
6.



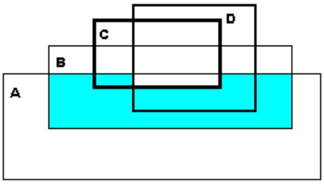
7.



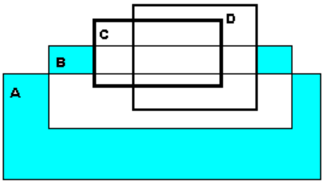
8.



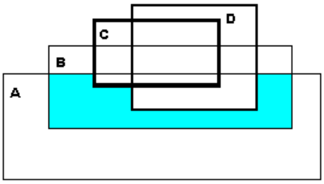
9.



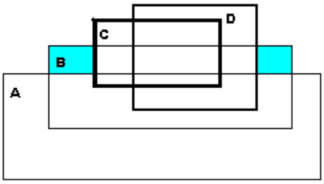
10.



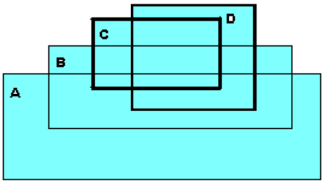
11.



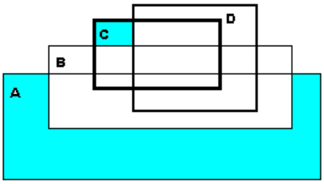
12.



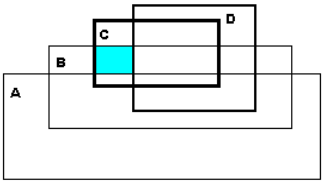
4.



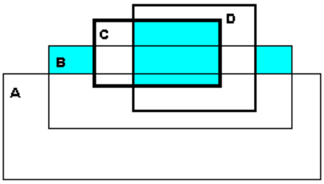
13.



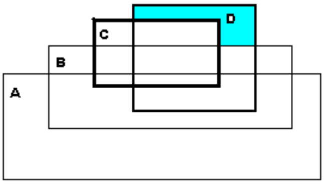
15.



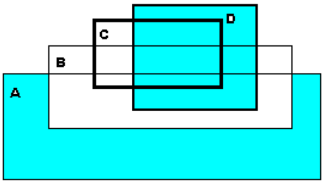
17.



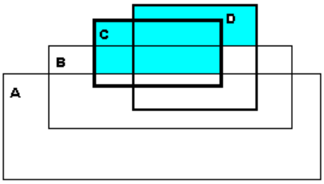
19.



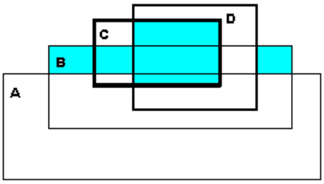
21.



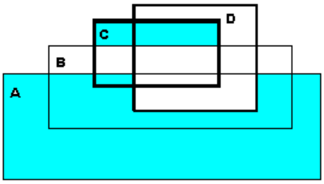
14.



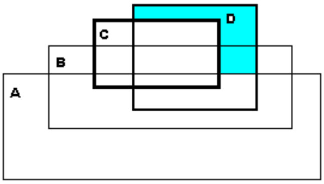
16.



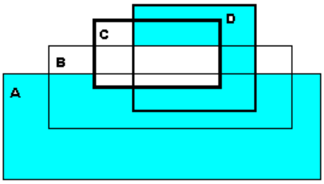
18.



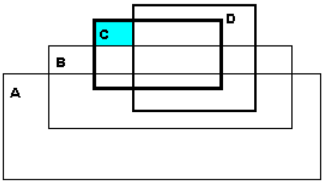
20.



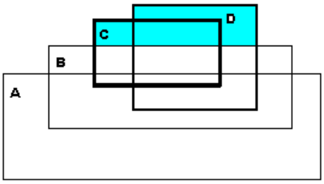
22.



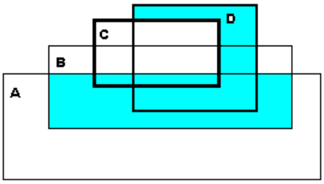
23.



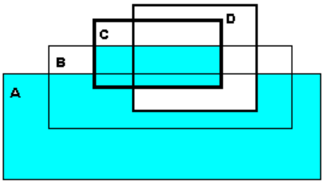
24.



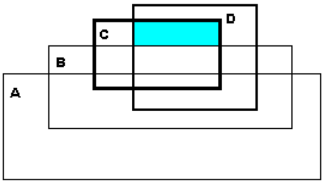
25.



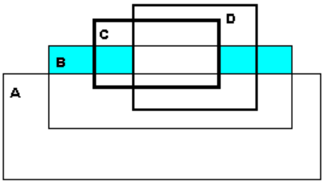
26.



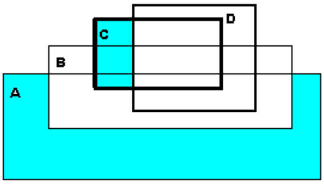
27.



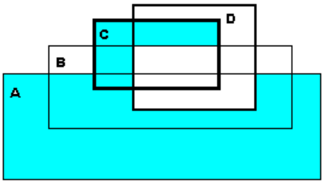
28.



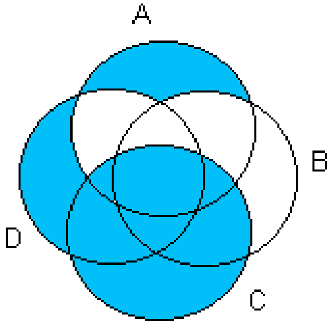
29.



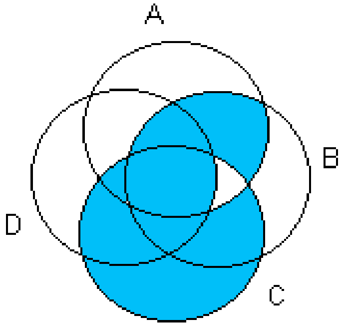
30.



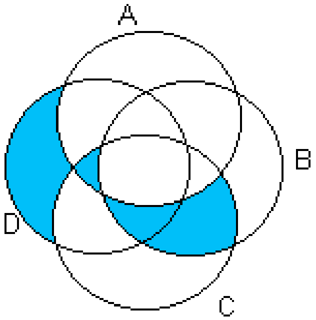
31.



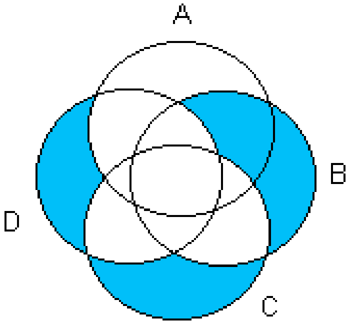
32.



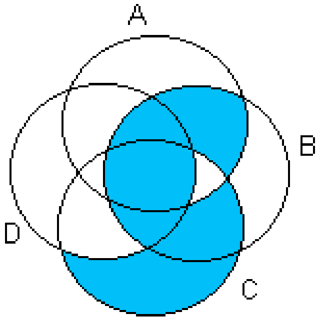
33.



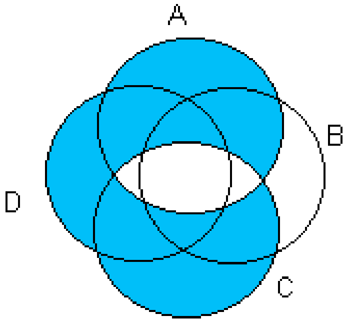
34.



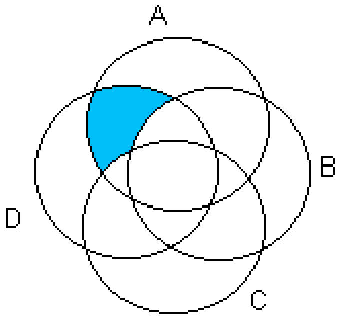
35.

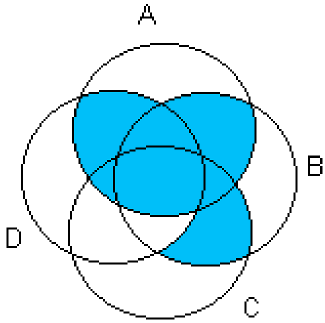


36.



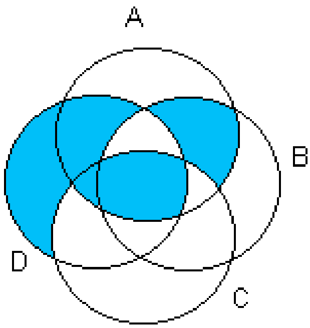
37.

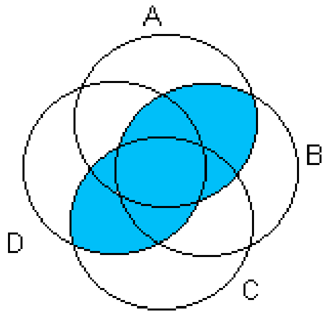




40.

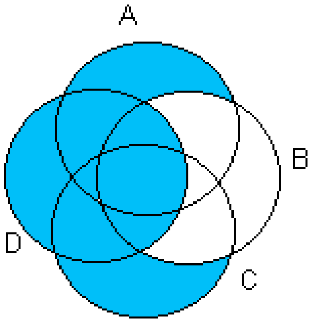
39.

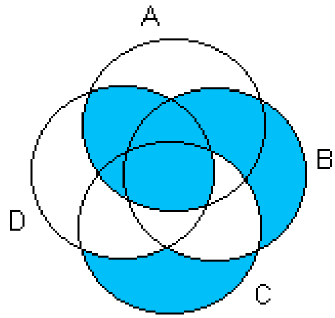




42.

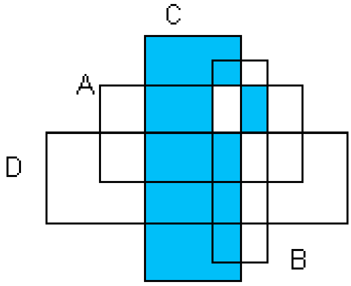
41.



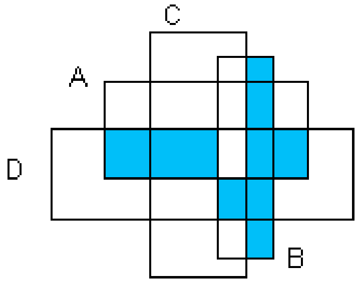


38.

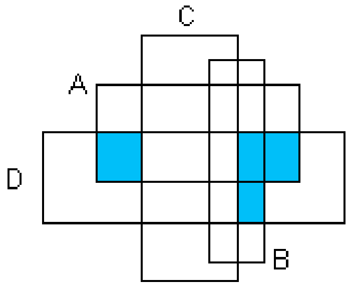
43.



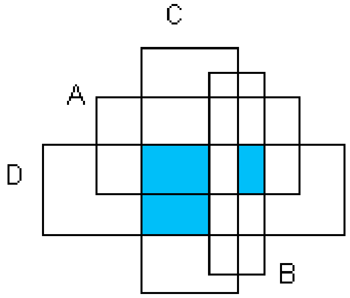
44.



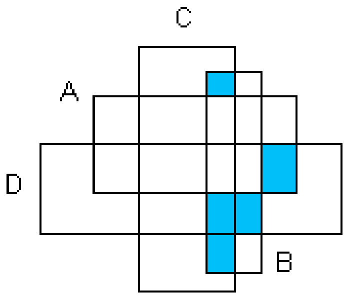
45.



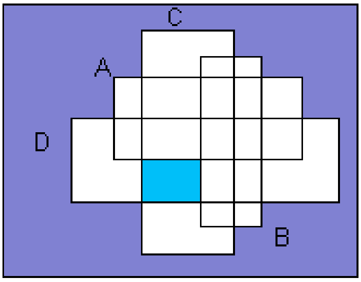
46.



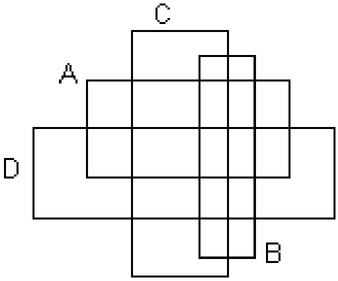
47.

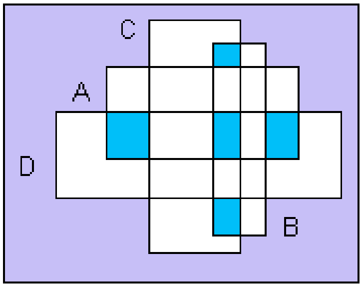


48.



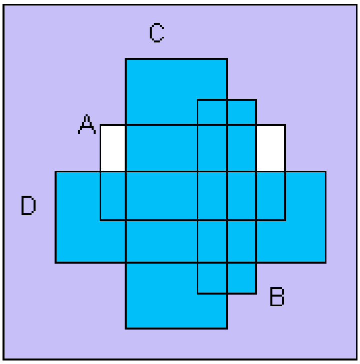
49.

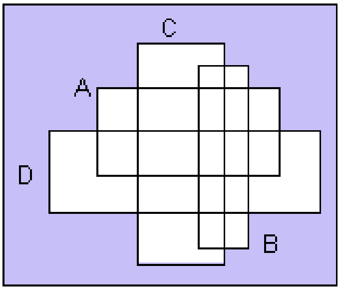




50.

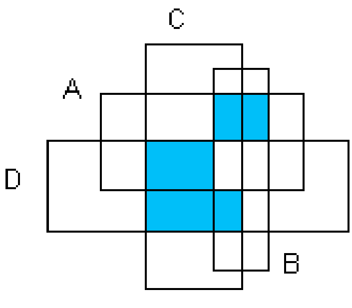
51.



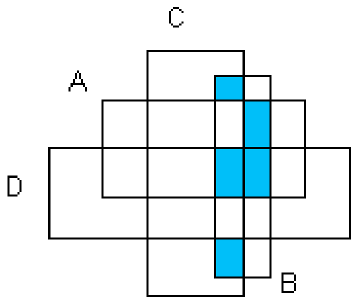


52.

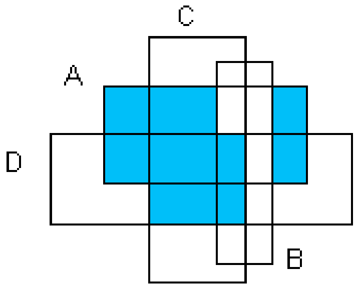
53.

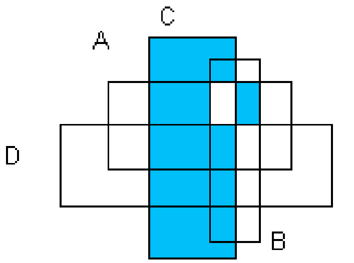


54.

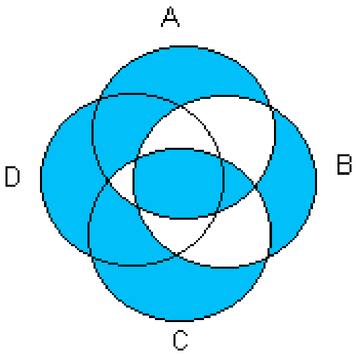


55.

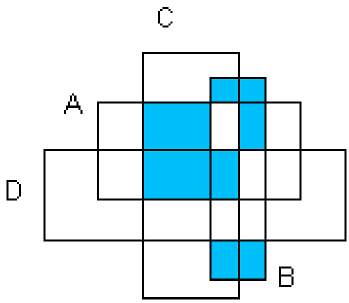




56.

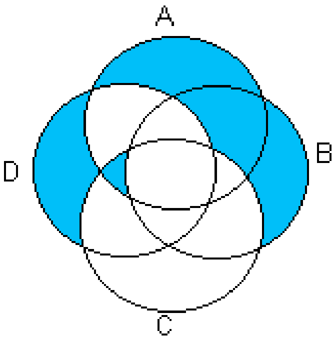


57.

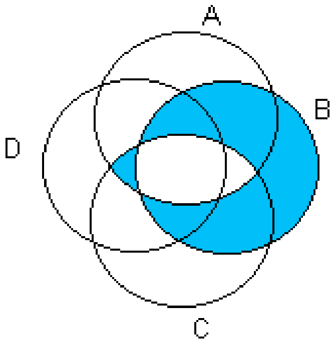


58.

59.



60.



§4. Доказательство теоретико-множественных тождеств и утверждений

Доказать следующие тождества:

1. $A \cup A = A \cap A = A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $A \cup B = B \cup A$;
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
8. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;
9. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$;
10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
11. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
12. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
13. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
14. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
15. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
16. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;
17. $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;
18. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
19. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
20. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

Доказать,что:

1. $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;
2. $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;
3. $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;
4. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;
5. $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;
6. $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;
7. $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$;
8. $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$;
9. $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.

ГЛАВА III. ПРЕДИКАТЫ

§1. Представление свойств в явном виде

Записать свойство P путем перечисления его элементов, если $P \subseteq A$, $A=\{-3;-2{,}5;-1;0;1{,}2;1{,}5;e;\pi\}$.

Пример

Записать свойство P путем перечисления его элементов, если $P \subseteq A$, $A=\{-3; -2; -1; 0; 4; 16\}$, $P=\{x: x \geq x^3\}$.

Решение

Очевидно, что неравенство $x \geq x^3$ не может выполняться для положительных чисел, больших 1. В то же время для чисел 0; -1 и отрицательных чисел, меньших -1, оно выполняется. Поэтому, $P=\{-3; -2; -1; 0\}$.

1. $P = \{x: x \geq 2\}$;
2. $P = \{x: x < x^2\}$;
3. $P = \{x: x^2+2x-3=0\}$;
4. $P = \{x: \ln x = 1\}$;
5. $P = \{x: x \geq \sqrt{2}\}$;
6. $P = \{x: 6 \leq x\}$;
7. $P = \{x: 3x > 4\}$;
8. $P = \{x: (x-1{,}2)/(2x-3) \geq 0\}$;
9. $P = \{x: \sin x = 0\}$;
10. $P = \{x: x \in Z\}$;
11. $P = \{y: y$ – иррациональное число$\}$;
12. $P = \{y: y \in N\}$;
13. $P = \{y: \cos y = 0\}$;
14. $P = \{y: \sin y \leq 0\}$;
15. $P = \{y: \ln y = 2\}$;
16. $P = \{z: z > \sqrt{9}\}$;
17. $P = \{z: z \geq 3\}$;
18. $P = \{z: z \leq 2z^3\}$;
19. $P = \{x: x^2 +4x-5=0\}$;
20. $P = \{x: x \in R\}$;
21. $P = \{x: (x+1)^3=0\}$;
22. $P = \{x: 3x^3+2x-6 \leq 0\}$;
23. $P = \{x: 2x^2 =18\}$;
24. $P = \{z: (z-2)/(2z-4) \leq 0\}$;

25. P = {x: $\sqrt{x}$ >0};
26. P = {x: 7x<0};
27. P = {z: $z>z^2$};
28. P = {z: $z^2+1>½$};
29. P = {x: 8<x};
30. P = {x: $2x^2+8x-3<0$}.

§2. Представление отношений в явном виде

Записать отношение P путем перечисления его элементов, если P $\subseteq$ A×B.

Пример

Записать отношение P путем перечисления его элементов, если P $\subseteq$ A $\times$ B, A=Z, B={-2; -1; 0; 1; 2}, P={(x, y): $|x| \le \frac{y}{2}$ }.

Решение

Так как y$\in$ B, то $\frac{y}{2} \in$ {-1; -1/2; 0; 1/2; -1}. Если $\frac{y}{2}$ <0, то нет таких x, что $|x| \le \frac{y}{2}$. Если $\frac{y}{2} \in$ {0; 1/2}, то у неравенства $|x| \le \frac{y}{2}$ относительно x одно целое решение x=0. Если $\frac{y}{2}$ =1, то из того, что $|x| \le 1$ следует, что x=1 и x=0. Таким образом, P={(0; 0); (0; 1); (1; 1)}.

1. P = {(x, y): x≤y}, A=B={1; 2; 3; 6; 8; 9;72};
2. P = {(x, y): x $\ge$ y}, A={1; 2; 3}, B=N;
3. P = {(x, y): $x^2+y^2=1$}, A=B={-1; 2; ¼; -1; 1;0};
4. P = {(x, y): x =-y}, A={-1;2;0;4}, B=Z;
5. P = {(x, y): 1/x=y}, A={1; -½; 0; 3; 4; -5}, B={1; 0; 2; -¼ };
6. P = {(x, y): 2x $\ge$ ¼ y}, A ={-1; 2; 0; 5; -2}, B={0; 1; 2; -3};
7. P = {(x, y): y = x/2}, A={½;-½;1;0}, B=R;
8. P = {(x, y): y $\ge$-x}, A$\in$N, B={0;-2; $\sqrt{2}/2$;1;-1};
9. P = {(x, y): $x^2+1=y$}, A=B= {0;1;3; ½;4;-1};
10. P = {(x, y): 1+2y=x}, A={1;2;3;5;8}, B={-2;-4; 1};
11. P = {(x, y): $2x^2/3 \le y$}, A={0; -2; ⅛; 4}, B={5;7; ½};
12. P = {(x, y): $2x+x^2=-y$}, A={-1; 0; 3; 8}, B=Z;
13. P = {(x, y): $(x-1)^2=y$}, A={4;0;2;3}, B=N;
14. P = {(x, y): x≤y}, A=B={0; -1; 1; 2; 8; 4; 3; -2};
15. P = {(x, z): $x^2 =z$}, A$\in$N, B={0; -1; 1; 2; 8; 4; 3;-2};

16. P = {(x, z): $\frac{1}{2}$z=x}, A={0;-1;1;-2;4}, B={1; 4; 3; 0;-2};
17. P = {(x, y): $x \le y^2$}, A={2; 4; 8; 16}, B={0; 1;-1; 2;4};
18. P = {(x, y): $\sqrt{2x} \ge y$}, A=B={-1; 0; 1; 3; 8; $\sqrt{2}$; ½; 4};
19. P = {(x, y): $x \le y$}, A={-1; -2; 0; 4; 8}, B=N;
20. P = {(x, y): $x^2/2 = -y$}, A={1; 2; 3; 4; 5}, B={-1; -2; 3; 4};
21. P = {(x, y): $-x \le y^2$}, A={0;1;2;4;-1}, B={1;2;5;4;0};
22. P = {(x, y): $x^2+y^2=2$}, A={-2; -8; 1; 4}, B={0;2;1;4};
23. P = {(x, y): 2x = -y}, A={0; 8; 2; 1}, B={-1;0;2;-3;1};
24. P = {(x, y): $x\sqrt{x} = y$}, A={2;-2;1;0;4}, B={-1;2;0;4;-2};
25. P = {(x, y): $\sqrt{y} < x$}, A=N, B={4;0;-1;8;2;1};
26. P = {(x, y): x=1/y}, A={0; 1; 8; 3; 6}, B={4;0;1;-2;3};
27. P = {(x, y): $\sqrt{x} > 2y$}, A={-2;1;8;0;3}, B=Z;
28. P = {(x, y): $4x^2 = y$}, A=B={4;0;1;-1;2;3};
29. P = {(x, y): $x^2-8 \le y$}, A={0;1;2;-3;-2;}, B={-1;-2; 2;1;3};
30. P = {(x, y): $x \ge 3y^2$}, A={1;2;3;0;6}, B={1;3;8;-9}.

§3. Обратный предикат. Суперпозиция и пересечение предикатов

Найти R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$, $R \cap R^{-1}$.

Пример

Найти R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$, $R \cap R^{-1}$, если $R \subseteq N \times N$, R={(x,y):x=yn, n∈ N}.

Решение

R^{-1}={(x, y): y=xn, n∈ Z}.

$R \circ R$ (x, y)=1 $\Leftrightarrow \exists z \in N$ $R(x,z)=1 \wedge R(z, y)=1 \Leftrightarrow \exists z \in N$ x=nz, z=my, n, m∈ N $\Leftrightarrow$ $x=n_1y$, $n_1 \in N$ (n_1=nm). Значит, $R \circ R = R$.

$R \circ R^{-1}$ (x, y)=1 $\Leftrightarrow \exists z \in N$ $R(x,z)=1 \wedge R^{-1}(z, y)=1 \Leftrightarrow \exists$ z∈ N x=nz, y=mz, n, m∈ N. В качестве такого z для любых x, y можно взять 1. Значит, $R \circ R^{-1}$=N.

$R^{-1} \circ R$ (x, y)=1 $\Leftrightarrow \exists$ z∈ N $R^{-1}(x, z)=1 \wedge R(z, y)=1$ $\Leftrightarrow \exists$ z∈ N z=xn, z=ym, n, m∈ N. В качестве такого z для любых x, y можно взять xy. То есть $R^{-1} \circ R$=N.

$R \cap R^{-1}$={(x, y): x=y}.

1. R = {(x, y): x, y ∈ N, $x \ge y$};
2. R = {(x, y): x, y ∈ N, $x \le y$};

3. $R = \{(x, y): x, y \in R, x + y \leq 0\}$;
4. $R = \{(x, y): x, y \in R, 2x \geq 3y\}$;
5. $R = \{(x, y): x, y \in [-\pi/2;\pi/2], y \geq \sin x\}$;
6. $R = \{(x, y): x, y \in R, y \leq x\}$;
7. $R = \{(x, y): x, y \in R, y = 2x^2\}$;
8. $R = \{(x, y): x, y \in N, x=2y^2\}$;
9. $R = \{(x, y): x, y \in Z, x + y > 2\}$;
10. $R = \{(x, y): x, y \in Z, x - y \geq 3\}$;
11. $R = \{(x, y): x, y \in R, y = \ln x\}$;
12. $R = \{(x, y): x, y \in Z, y \leq x^2\}$;
13. $R = \{(x, y): x, y \in N, x^2 + y > 4\}$;
14. $R = \{(x, y): x, y \in Z, y = 2x\}$;
15. $R = \{(x, y): x, y \in R, y \leq 0\}$;
16. $R = \{(x, y): x, y \in [-\pi;\pi], y = \sin x^2\}$;
17. $R = \{(x, y): x, y \in [-\pi/2;\pi], y = \cos x\}$;
18. $R = \{(x, y): x, y \in R, y = \log_4 16\}$;
19. $R = \{(x, y): x, y \in Z, y + x^2 = 0\}$;
20. $R = \{(x, y): x, y \in Z, yx \geq 3\}$;
21. $R = \{(x, y): x, y \in R, y = x^3\}$;
22. $R = \{(x, y): x, y \in R, 2x - y \geq 2\}$;
23. $R = \{(x, y): x, y \in N, 3y \geq x^2\}$;
24. $R = \{(x, y): x, y \in R, x \geq y\}$;
25. $R = \{(x, y): x, y \in Z, y = x^2\}$;
26. $R = \{(x, y): x, y \in Z, x + 2y = 0\}$;
27. $R = \{(x, y): x, y \in N, x \leq 3y\}$;
28. $R = \{(x, y): x, y \in R, y = -x\}$;
29. $R = \{(x, y): x, y \in N, x = \frac{1}{2}\sqrt{y}\}$;
30. $R = \{(x, y): x, y \in Z, y = 2x - 4x^2 + 1\}$.

РУКОВОДСТВО К ВЫБОРУ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Контрольная работа № 1

Если последние две цифры номера вашей зачетной книжки составляют число от 01 до 20, то задания под этим номером вы должны выполнить в параграфах 1–5 главы I и параграфах 1–4 главы II. В случае, если это число больше 20, то следует вычесть из него 20, 40, 60 или 80, чтобы получилось число от 1 до 20.

Например, если две последние цифры номера вашей зачетной книжки составляют число 56, то следует решать задания под номером 16 (56–40). Если две последние цифры номера вашей зачетной книжки составляют число 82, то следует решать задания под номером 2 (82–80).

Если две последние цифры номера вашей зачетной книжки равны 0, то следует решать задания под номером 20.

Контрольная работа № 2

Если последние две цифры номера вашей зачетной книжки составляют число от 01 до 30, то задание под этим номером вы должны выполнить в параграфах 1 и 2 главы III. В случае, если это число больше 30, то следует вычесть из него 30, 60 или 90, чтобы получилось число от 1 до 30.

Например, если две последние цифры номера вашей зачетной книжки составляют число 56, то следует решать задания под номером 26 (56–30). Если две последние цифры номера вашей зачетной книжки составляют число 82, то следует решать задания под номером 22 (82–60).

Если две последние цифры номера вашей зачетной книжки равны 0, то следует решать задания под номером 30.

Студенты специальностей ВМ и СБ должны, кроме того, выполнить в рамках контрольной работы № 2 еще два задания – из параграфов 6 и 7 главы I, под номером, равным сумме двух последних цифр номера вашей зачетной книжки.

Например, если две последние цифры номера вашей зачетной книжки составляют число 56, то следует решать задания под номером 11 (5+6).

Если две последние цифры номера вашей зачетной книжки равны 0, то следует решать задания под номером 18.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Юрий Евгеньевич Шишмарёв
Елена Дмитриевна Емцева
Константин Сергеевич Солодухин

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Часть 1

Редактор Л.И. Александрова
Корректор Л.З. Анипко
Компьютерная верстка С.Ю. Заворотной

Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 021014 от 03.11.1995

Подписано в печать 2.10.2000. Формат 60×84/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,4.
Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 100 экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в лаборатории множительного участка ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57