Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Л.С. НИКУЛИНА
А.А. СТЕПАНОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2005

ББК 22.11
Н 65

Рецензент: В.Н. Дубинин, д-р физ.-мат. наук, профессор каф. математического анализа ДВГУ

Никулина Л.С., Степанова А.А.
Н 65 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2005. – 148 с.

Учебное пособие содержит теоретический материал по таким разделам высшей математики, как линейная алгебра, аналитическая геометрия, теория пределов, основы дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных, некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений и рядов. По всем разделам приводятся подробные решения достаточного количества типичных задач, в конце каждого раздела содержатся методически подобранные задачи для самостоятельного решения.

Для студентов дистанционной формы обучения.

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ББК 22.11

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математика превратилась в повседневный инструмент исследования практически всех наук. Вторжение математики во все области научной и практической деятельности продолжается с возрастающей интенсивностью. Идет прогрессирующий процесс математизации всех наук, чему способствует быстрое развитие и внедрение ПЭВМ в деятельность человека. Это на полном основании относится и к области экономических знаний. Здесь математика активно используется для развития навыков математического исследования экономических проблем, умения мыслить экономическими категориями в области экономики. Поэтому почти все вузовские специальности в том или ином объеме содержат математику. И, безусловно, это касается всех экономических, управленческих специальностей и специальностей, связанных с бизнесом.

Основные задачи дисциплины:

1) изучить современный язык математики;

2) ознакомиться с основными вычислительными приемами;

3) способствовать развитию логического и аналитического мышления студентов.

В процессе обучения студент должен:

1) овладеть основными вычислительными навыками, необходимыми для решения задач высшей математики;

2) ознакомиться с современным языком математики, изучить основы линейной алгебры и аналитической геометрии и использовать эти знания при знакомстве с задачами линейного программирования; ознакомиться с элементами математического анализа;

3) применять полученные знания при изучении экономических понятий и исследовать простейшие экономические модели с помощью методов линейной алгебры, дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений.

Связь высшей математики с дисциплинами учебного плана:

1) экономика и управление производством;

2) статистика;

3) математические модели экономики;

4) информатика.

ПРОГРАММА КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

I. Элементы линейной алгебры (40 часов)

1. Определители второго и третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу). Правило треугольника, вычисление определителя третьего порядка.

2. Матрицы. Действия с ними. Обратная матрица.

3. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы.

4. Системы двух и трех линейных уравнений. Правило Крамера, матричный способ решения системы линейных уравнений.

5. Система n линейных уравнений. Метод Гаусса решения систем.

II. Элементы аналитической геометрии (50 часов)

1. Векторы. Линейные операции над векторами. Базис. Разложение вектора по базису.

2. Ортонормированный базис. Прямоугольная декартова система координат. Координаты точки, координаты вектора в прямоугольной декартовой системе координат.

3. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора и угол между векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов.

4. Направляющие косинусы вектора. Единичный вектор.

5. Векторное произведение двух векторов. Условие коллинеарности.

Векторное произведение в координатной форме. Площадь параллелограмма и треугольника.

6. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл. Условие компланарности векторов.

7. Уравнение линии на плоскости. Различные уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение прямых.

8. Уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Взаимное расположение плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

9. Различные уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых. Прямая в пространстве и плоскость. Их взаимное расположение. Угол между прямой и плоскостью. Угол между прямыми.

III. Введение в математический анализ (30 часов)

1. Функция. Область ее определения. Окрестность точки. Предел функции в точке. Односторонние пределы.

2. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых. Сравнение бесконечно малых. Бесконечно большие функции.

3. Теоремы о пределах. Неопределенности. Их раскрытие.

4. Первый и второй замечательные пределы.

5. Непрерывность функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

IV. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных (70 часов)

1. Задача о касательной. Производная функции. Производная сложной функции. Таблица производных. Дифференциал.

2. Теоремы о дифференцируемых функциях: Ферма, Ролля, Лагранжа.

3. Применение производных к исследованию функций: признаки монотонности функции, необходимое и достаточное условия экстремума; точка перегиба, условие выпуклости графика функции. Асимптоты.

4. Общая схема исследования функции одной переменной и построение ее графика.

5. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Предел, непрерывность функции двух переменных, свойства функции двух переменных, непрерывной в ограниченной замкнутой области.

6. Частные производные. Производная по направлению. Градиент.

7. Экстремум функции двух переменных: необходимое и достаточное условия. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой ограниченной области.

V. Элементы интегрального исчисления (40 часов)

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица.

2. Методы интегрирования: табличное интегрирование, замена переменных, по частям. Интегрирование тригонометрических функций.

3. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл. Замена переменной в определенном интеграле. Понятие несобственного интеграла по неограниченному промежутку. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

VI. Элементы теории дифференциальных уравнений (30 часов)

1. Понятие дифференциального уравнения первого порядка. Задача Коши. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные, однородные.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка однородные и неоднородные. Характеристическое уравнение. Общее решение однородного уравнения в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

3. Общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения такого уравнения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов.

VII. Элементы теории рядов (30 часов)

1. Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимое условие сходимости ряда.

2. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: сравнения, Даламбера, Коши, интегральный.

3. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося числового ряда.

4. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда, абсолютная и условная сходимость.

5. Понятие степенного ряда. Интервал сходимости степенного ряда и его отыскание по признаку Даламбера или Коши.

Глава 1
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Определители 2-го порядка

Определение. Определителем 2-го порядка называется выражение

$$D = \begin{vmatrix} \grave{a}_1 & b_1 \\ \grave{a}_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 . \qquad (1)$$

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются элементами определителя. Они расположены в двух строках и двух столбцах. Определитель 2-го порядка равен разности произведений его элементов главной и побочной диагоналей.

Пример 1. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$.

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 7(-7) - 8(-6) = -49 + 48 = -1 .$$

С помощью определителей второго порядка удобно решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Под решением такой системы понимается пара чисел (x_0, y_0), которая после подстановки ее в уравнение системы вместо неизвестных x и y обращает эти уравнения в тождества. Если существует только одна такая пара, то решение называется единственным.

Для нахождения решений системы применим метод исключения. Умножим первое уравнение системы на b_2, а второе – на $-b_1$ и сложим:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1 . \qquad (3)$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы на $-a_2$, а второе – на a_1 и складывая, получим

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1 . \qquad (4)$$

Введем определитель системы

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, а также дополнительные определители

$$Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 \text{ и } Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 .$$

Заметим, что дополнительные определители получаются из определителя системы заменой столбца коэффициентов при неизвестной x или y свободными членами системы.

Уравнения (3) и (4) примут вид

$$D \cdot x = Dx \text{ и } D \cdot y = Dy .$$

Если $D \neq 0$, то $x = \dfrac{Dx}{D}$, $y = \dfrac{Dy}{D}$. Эти формулы называют формулами Крамера решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Замечание. Если D=0, то система уравнений или не имеет решений, т.е. несовместна, или имеет бесконечно много решений.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x - 6y = 5, \\ 8x - 7y = -10. \end{cases}$$

Решение. Составим и вычислим определитель системы. Имеем

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -49 + 48 = -1 .$$

Далее $$Dx = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = -35 - 60 = -95 ,$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -70 - 40 = -110 .$$

На основании формул Крамера получаем

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-95}{-1} = 95 ,$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-110}{-1} = 110 .$$

1.2. Определители 3-го порядка

Определение. Определителем 3-го порядка называется выражение

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Числа a_{ij} называют элементами определителя. Индекс i означает здесь номер строки определителя, в которой находится этот элемент, а индекс j – номер столбца. Так, например, элемент a_{32} находится в третьей строке и втором столбце определителя.

Пример 3. Вычислить

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя формулу (5), имеем

$$D=1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot 3+2\cdot 5+2(3\cdot 3+1\cdot 5)+4(3(-2)+1\cdot 2)=28.$$

Определение. Минором элемента определителя 3-го порядка называется определитель 2-го порядка, получающийся из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij}. Например, для определителя, рассмотренного в примере (3), минором элемента $a_{23}=5$ является определитель 2-го порядка $M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-2-2=-4$.

Определение. Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент, четная, и минус, если нечетная.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначают A_{ij}. Таким образом, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Знаки, приписываемые минорам определителя 3-го порядка, можно задать таблицей

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Определитель 3-го порядка можно теперь записать следующим образом:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Для определителя 3-го порядка имеет место **теорема разложения**. Определитель 3-го порядка равен сумме произведений элементов какого-либо ряда определителя на их алгебраические дополнения.

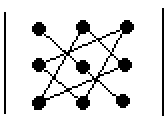
Таким образом, справедливы шесть разложений:

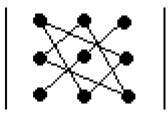
$$\begin{gathered} D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \\ D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \\ D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, \\ D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \\ D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \\ D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \end{gathered} \tag{6}$$

Замечание. Раскрывая определители 2-го порядка в формуле (5) и собирая члены с одинаковыми знаками, получим

$$D = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23}).$$

Этот способ вычисления определителей 3-го порядка называется правилом треугольника. Элементы, входящие в определитель со знаком + и со знаком –, выбираются из определителя, как показано на рисунках.

(+) 

(-) 

Пример 4. Вычислить $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ по правилу треугольника.

Решение.

$$D = (1 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot (-3)) - (-1 \cdot (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 0) =$$
$$= -18 - 12 - 4 = -34.$$

Свойства определителей справедливы для определителей любого порядка:

а) определитель не меняет своего значения, если строки и столбцы поменять местами;

б) при перестановке двух строк или двух столбцов определитель меняет знак;

в) определитель, у которого две строки или два столбца одинаковы, равен нулю;

г) общий множитель элементов какой-либо строки или столбца определителя можно выносить за знак определителя.

Например, $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$;

д) если все элементы какой-либо строки или столбца определителя равны нулю, то определитель равен нулю;

е) если элементы какой-либо строки или столбца определителя пропорциональны элементам другой строки или столбца, то такой определитель равен нулю, например, определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 14 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$, так как элементы первой и второй строк пропорциональны;

ж) если элементы какой–либо строки или столбца определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель можно разложить на сумму двух соответствующих определителей;

з) величина определителя не изменяется, если к элементам какой–либо строки или столбца прибавить (или отнять) элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.

Пример 5.

Определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ вычислить, получив в первом столбце два нуля и раскладывая его по элементам этого столбца.

Решение. Умножим первую строку на –2 и прибавим ко второй строке, а затем первую строку умножим на –3 и прибавим к третьей. Получим

$$Д = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}^{(-2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}^{(-3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 1(-1)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 24 - 16 = 8.$$

1.3. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (7)$$

Система трех уравнений может быть решена по правилу Крамера, рассмотренному выше для системы двух уравнений.

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Назовем его определителем системы. Если D≠0, то система совместна. Далее составим три вспомогательных определителя:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, Dx_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Решение системы (7) находим по формулам:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, x_2 = \frac{Dx_2}{D}, x_3 = \frac{Dx_3}{D}, \qquad (8)$$

которые называют формулами Крамера.

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 30. \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы.

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Система совместна, так как D≠0.

Вычислим теперь вспомогательные определители:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 20 & 1 & 1 \\ 30 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 30, \ Dx_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 20 & 1 \\ 1 & 30 & 1 \end{vmatrix} = 20, Dx_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 30 \end{vmatrix} = -60.$$

Тогда $x_1 = 30$, $x_2 = 20$, $x_3 = -60$.

1.4. Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, где $i = 1,2,..,m$, $j = 1,2,..,n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Определение. Суммой $A + B$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц *A* и *B:* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,2,..,m$, $j = 1,2,..,n$.

Определение. Произведением αA матрицы $A = (a_{ij})$ на число α называется матрица $B = (b_{ij})$, элементы которой $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Пример 7. Вычислить 3A+2B, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим $3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$. Тогда

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & 9-4 \\ -3+6 & 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Произведением AB матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n \times k$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times k$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-ого столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj},$$

$$i = 1,2,\dots,m, \ \ j = 1,2,\dots,k.$$

Так как строки и столбцы матриц участвуют в произведении AB неравноправно, то AB≠BA.

Пример 8. Вычислить $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Умножим элементы первой строки первой матрицы на соответствующие элементы первого столбца второй матрицы и сложим все произведения. Полученный элемент поставим в первую строку и первый столбец матрицы-произведения. Далее вычислим остальные элементы произведения матриц.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3+8\cdot 4-4\cdot 9 & 5\cdot 2-8\cdot 1-4\cdot 6 \\ 6\cdot 3+9\cdot 4-5\cdot 9 & 6\cdot 2-9\cdot 1-5\cdot 6 \\ 4\cdot 3+7\cdot 4-3\cdot 9 & 4\cdot 2-7\cdot 1-3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 9 & -27 \\ 13 & -17 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ называют единичной. Легко проверить, что $AE = A$, если, конечно, число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы E, и $EA=A$.

Если матрица A имеет одинаковое число строк и столбцов, то ее называют квадратной.

Определение. Определителем квадратной матрицы A называется определитель, составленный из ее элементов.

Обозначают определитель матрицы A либо $det\,A$ (от слова детерминант, т.е. определитель), либо $|A|$, либо D.

Определение. Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрицу называют вырожденной.

Определение. Матрица A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, называется обратной матрице A.

Если A – невырожденная матрица, то существует и при этом единственная матрица, обратная к матрице A. При этом $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам исходной матрицы.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения к элементам строк матрицы A располагают в столбцах с теми же номерами, что и строки данной матрицы A.

Пример 9. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1(5-21) - 2(-3-6) +$$

$$+1(21+10) = -16 - 2(-9) + 31 = 33.$$

Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 21 = -16, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-7) = 9,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3-6) = 9, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 10 = 31, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(7-4) = -3,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11.$$

Имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33} \\ \frac{9}{33} & -\frac{3}{33} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{3}{33} & -\frac{11}{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1.5. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Составим из коэффициентов при неизвестных матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и назовем ее матрицей системы.

Матрицу $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ называют матрицей-столбцом из свободных членов, а матрицу $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрицей-столбцом из неизвестных.

Используя введенные обозначения, запишем систему уравнений в виде матричного уравнения $AX = B$. Умножая обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получим:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow EX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B .$$

Таким образом, если матрица А системы невырожденная, т.е. существует A^{-1}, то решение системы линейных уравнений можно найти по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Замечание. Метод матричного исчисления обычно применяют для решения систем трех уравнений с тремя неизвестными. Решать этим методом системы с большим числом уравнений и неизвестных неудобно, так как он приводит к громоздким выкладкам.

Пример 10. Средствами матричного исчисления решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$. Она невырожденная и имеет обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}$ (см. пример 9 предыдущего пункта).

Тогда $X = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

1.6. Ранг матрицы. Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим матрицу А размера $m \times n$. Выберем в этой матрице произвольно k строк и k столбцов, где k ≤ m и k ≤ n. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называют минорами k-го порядка матрицы А.

Пример 11. Из матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ можно составить 12 миноров 1-го порядка – это сами элементы матрицы А. Если выбрать какие-либо две строки и два столбца матрицы, то можно составить миноры 2-го порядка, например $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Минорами 3-го порядка являются определители

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что все миноры 3-го порядка данной матрицы А равны нулю, а миноры 2-го порядка не все равны нулю, во всяком случае, минор $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

Определение. Наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы называется ее рангом. В нашем примере ранг матрицы равен 2.

Для вычисления ранга матрицы ее сначала приводят к более простому виду с помощью так называемых элементарных преобразований, к которым относятся:

1) перестановка строк матрицы;

2) умножение какой-либо строки на одно и то же отличное от нуля число;

3) прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, предварительно умноженных на некоторое число.

Можно показать, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Если с помощью элементарных преобразований получить нули ниже главной диагонали матрицы, то ранг исходной матрицы будет равен числу ненулевых строк преобразованной матрицы.

Пример 12. С помощью элементарных преобразований вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим первую строку матрицы на –2 и прибавим ко второй строке:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 9 & 6 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь умножим первую строку на –3 и сложим ее с третьей строкой, а затем вычтем из последней строки первую. Имеем

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножая вторую строку получившейся матрицы на –2 и складывая ее с третьей строкой, а затем складывая вторую строку с последней, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная матрица имеет две ненулевые строки, следовательно, ранг матрицы A равен двум: r(A)=2.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Назовем матрицей системы матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных. Матрицу, полученную из A добавлением столбца свободных членов, называют расширенной матрицей:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ясно, что $r(\overline{A}) \geq r(A)$, так как каждый минор матрицы A будет и минором матрицы $\overline{A}$, но не наоборот.

Теорема Кронекера–Капелли (критерий совместности системы линейных уравнений). Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. $r(A) = r(\overline{A})$.

Замечание. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если же ранг меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений.

Пример 13. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований вычислим одновременно ранги обеих матриц.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right)^{\cdot(-2)}_{+} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right)^{\cdot(-3)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right)^{\cdot(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)\cdot(-2).$$

Далее умножим вторую строку на -2 и сложим с третьей, а затем сложим третью строку с последней. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)_{+} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен трем, так как матрица имеет три ненулевых строки, а ранг расширенной матрицы равен четырем. Тогда согласно теореме Кронекера-Капелли система не имеет решений.

1.7. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Формулы Крамера и матричный метод решения систем линейных уравнений не имеют серьезного практического применения, так как связаны с громоздкими выкладками. Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных по следующей схеме. Для того чтобы решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

выписывают расширенную матрицу этой системы

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

и над строками этой матрицы производят элементарные преобразования, приводя ее к виду, когда ниже главной диагонали, содержащей элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$, будут располагаться нули. Разрешается: 1) изменять порядок строк матрицы, что соответствует изменению порядка уравнений; 2) умножать строки на любые отличные от нуля числа, что соответствует умножению соответствующих уравнений на эти числа; 3) прибавлять к любой строке матрицы другую, умноженную на отличное от нуля число, что соответствует прибавлению к одному уравнению системы другого, умноженного на число. С помощью этих преобразований каждый раз получается расширенная матрица новой системы, равносильной исходной, т. е. такой системы, решение которой совпадает с решением исходной системы.

Рассмотрим метод Гаусса на примерах.

Пример 14. Установить совместность и решить систему

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и поменяем местами первую и вторую строки для того, чтобы элемент a_{11} равнялся единице (так удобнее производить преобразования матрицы).

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right)\approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & | & -7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $r(A) = r(\overline{A}) = 4$. Ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы совпали с числом неизвестных. Согласно теореме Кронекера-Капелли система уравнений совместна и решение ее единственно.

Выпишем систему уравнений, расширенную матрицу которой мы получили в результате преобразований: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ x_4 = -1. \end{cases}$

Итак, имеем $x_4 = -1$. Далее, подставляя x_4 в третье уравнение, найдем x_3. $x_3 + 1 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$. Подставляя $x_3 = 1$ и $x_4 = -1$ во второе уравнение, получим $x_2 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ и, наконец, подставляя в первое уравнение найденные x_2, x_3, x_4, получим $x_1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = 1 - 5 + 2 = -2$. Таким образом, имеем решение системы $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$.

1.8. Общее решение системы линейных уравнений

Определение. Если ранг матрицы A равен r, то любой отличный от нуля минор порядка r этой матрицы называется базисным.

Пример 15. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к виду, когда ниже главной диагонали будут стоять нули. $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & | & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & | & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & | & 3 \end{pmatrix}$. Получим нули в первом столбце матрицы, для чего умножим первую строку на -2 и прибавим ко второй, а затем первую строку умножим на -1 и прибавим к последней строке. Имеем

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Прибавим теперь вторую строку к третьей и к четвертой. Тогда $\overline{A} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

$r(A) = r(\overline{A}) = 2.$ Система совместна. Выпишем укороченную систему, полученную после преобразований: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ \quad 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Эта система имеет бесчисленное множество решений, так как ранг матрицы меньше числа неизвестных. Выберем в преобразованной матрице базисный минор. Это $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. Тогда неизвестные x_1 и x_2 будут базисными, а остальные – свободными. Свободные неизвестные перенесем в правую часть уравнений системы: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4, \\ \quad 2x_2 = 1 + 3x_3 - x_4. \end{cases}$

Ясно, что базисные неизвестные зависят от того, какие значения имеют свободные неизвестные x_3 и x_4. Обозначим $x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2$, где C_1 и C_2 – это произвольные значения свободных неизвестных, т. е. любые числа. Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + C_1 + 3C_2, \\ \quad 2x_2 = 1 + 3C_1 - C_2. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x_2 = \dfrac{1 + 3C_1 - C_2}{2}$. Подставим найденное x_2 в первое уравнение: $2x_1 = 2 + C_1 + 3C_2 - \dfrac{1 + 3C_1 - C_2}{2}$ и

$$x_1 = 1 + \frac{C_1}{2} + \frac{3}{2} \cdot C_2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot C_1 + \frac{C_2}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4} - \frac{C_1}{4} + \frac{7}{4} \cdot C_2.$$

Таким образом, решение системы, которое в данном случае называют общим, имеет вид

$$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot C_1 + \frac{7}{4} \cdot C_2, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot C_1 - \frac{1}{2} \cdot C_2, \quad x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2.$$

Замечание. Решение системы (общее или единственное) можно записать либо в виде матрицы-столбца $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, либо в виде матрицы-строки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так что решение системы мы запишем в виде $x = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot C_1 + \frac{7}{4} \cdot C_2, \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot C_1 - \frac{1}{2} \cdot C_2, C_1, C_2\right)$.

1.9. Промежуточные задания

Дана система линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

С помощью теоремы Кронекера-Капелли доказать ее совместность и решить двумя способами: 1) пользуясь правилом Крамера; 2) средствами матричного исчисления.

1.1.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.1.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

1.1.3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 24, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12. \end{cases}$

1.1.4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$

1.1.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

1.1.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

1.1.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

1.1.8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

1.1.9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

1.1.10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

1.2.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

1.2.2. $\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

1.2.3. $\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

1.2.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.2.5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

1.2.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 6. \end{cases}$

1.2.7. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

1.2.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$

1.2.9. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

1.2.10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

Глава 2
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Линейные операции над векторами

Определение. Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление.

Обозначают векторы символами $\overline{a}$ или $A\overline{B}$, где A – начало, а B – конец направленного отрезка AB.

Определение. Длиной вектора $A\overline{B}$ называется длина отрезка AB.

Для обозначения длины вектора $A\overline{B}$ вводят символ $|\overline{a}| = |A\overline{B}| = a$.

Вектор нулевой длины называют нулевым вектором и обозначают $\overline{0}$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, имеющие одинаковую длину и направление, считаются равными друг другу, т. е. $\overline{a} = \overline{b}$.

Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Построим равные им векторы $A\overline{B}$ и $B\overline{C}$, т. е. совместим начало вектора $\overline{b}$ с концом вектора $\overline{a}$ (рис. 1). Вектор $A\overline{C}$ будем называть суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (правило треугольника).

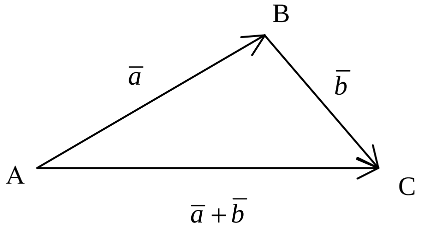
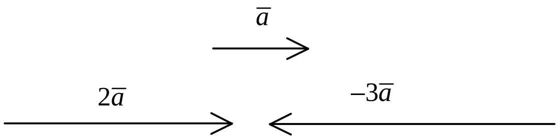


Рис. 1

Определение. Произведением вектора $\overline{a}$ на число α называется вектор $\alpha \cdot \overline{a}$, удовлетворяющий условиям: 1) вектор $\alpha \cdot \overline{a}$ коллинеарен (параллелен) вектору $\overline{a}$; 2) длина вектора $\alpha \cdot \overline{a}$ равна $|\alpha| \cdot |\overline{a}|$; 3) векторы $\alpha \cdot \overline{a}$ и $\overline{a}$ сонаправлены, т. е. имеют одинаковое направление, при $\alpha > 0$ и противоположно направлены при $\alpha < 0$.

Пример 1. По данному вектору $\overline{a}$ найдем векторы $2\overline{a}$ и $-3\overline{a}$. Изобразим $\overline{a}$, затем $2\overline{a}$ и $-3\overline{a}$.



Определение. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ такой, что $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$ (рис. 2).

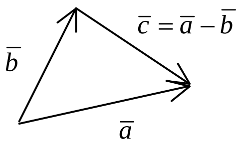


Рис. 2

Легко проверить, что $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$, где $-\overline{b}$ – это вектор, противоположный вектору $\overline{b}$, т. е. такой, что $\overline{b} + \left(-\overline{b}\right) = \overline{0}$.

Заметим, что для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ справедливы свойства:

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;

$\overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.

Проиллюстрируем первое свойство, построив поочередно $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{b} + \overline{a}$ по правилу треугольника на одном чертеже (рис. 3).

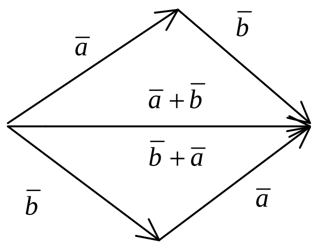


Рис. 3

Отсюда получаем правило параллелограмма сложения векторов: если на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить как на сторонах параллелограмм, то сумма $\overline{a} + \overline{b}$ является диагональю параллелограмма, исходящей из общей точки приложения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Если же построить вторую диагональ параллелограмма, то мы получим разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 4).

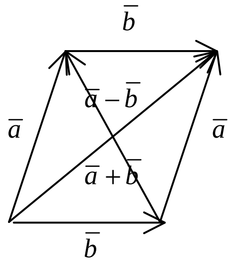


Рис. 4

2.2. Базис.
Декартова прямоугольная система координат

Определение. Три вектора $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ называются компланарными, если они параллельны некоторой плоскости в широком смысле (т. е. или лежат в одной плоскости, или в параллельных плоскостях).

После приведения к одному началу компланарные векторы лежат в одной плоскости.

Определение. Базисом в пространстве называются три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке; базисом на плоскости называют два неколлинеарных вектора, взятых в определенном порядке; базисом на прямой называют любой ненулевой вектор на этой прямой.

Теорема. Каждый вектор в пространстве, плоскости или на прямой может быть разложен по базису пространства, плоскости или прямой соответственно, причем это разложение единственно.

Таким образом, если $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ – базис пространства, $\overline{a}$ – вектор пространства, то $\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{e}_2 + \alpha_3 \cdot \overline{e}_3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Аналогичные разложения имееют место на плоскости и прямой.

При сложении векторов складываются соответствующие координаты, при умножении вектора на число все координаты вектора умножаются на это число.

Взаимно перпендикулярные и имеющие единичную длину векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ образуют ортонормированный базис.

Определение. Совокупность точки – начала координат и ортонормированного базиса называют декартовой прямоугольной системой координат.

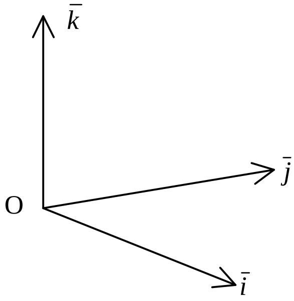


Рис. 5

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называют осями координат, а плоскости, проходящие через оси координат – координатными плоскостями.

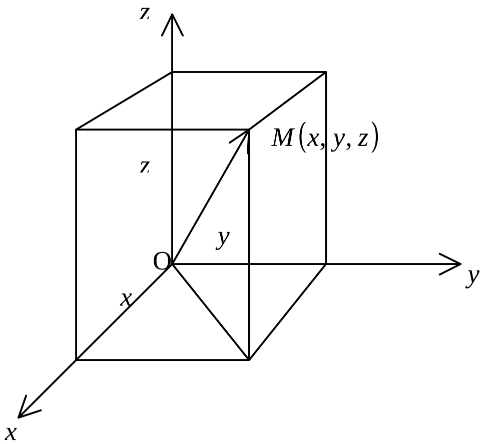


Рис. 6

Для каждой точки M пространства существует ее радиус – вектор $\bar{r} = O\overline{M}$. Под декартовыми координатами точки M понимаются координаты ее радиус – вектора в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т. е. $O\overline{M} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ и $M(x, y, z)$.

И вообще $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ или $\bar{a} = (x, y, z)$.

Если точка $A(x_1, y_1, z_1)$ – начало, а точка $B(x_2, y_2, z_2)$ – конец вектора $A\overline{B}$, то $AB = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$.

Пример. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(1,2,1)$ и $B(3,4,8)$.

Решение. $\overline{AB} = (3-1)\cdot \bar{i} + (4-2)\cdot \bar{j} + (8-1)\cdot \bar{k} \Rightarrow \overline{AB} = (2,2,7)$.

Коллинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличаются длиной и направлением (сонаправлены или направлены противоположно), поэтому координаты таких векторов пропорциональны, т.е. векторы $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Например, векторы $\bar{a} = (2,1,-3)$ и $\bar{b} = (-4,-2,6)$ коллинеарны.

2.3. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними, т. е. $\bar{a}\cdot\bar{b} = a\cdot b\cdot\cos\varphi$, где a и b – длины векторов, а φ – угол между ними.

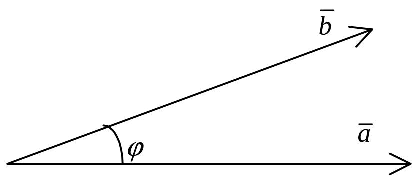


Рис. 7

Если $\bar{a} = x_1\cdot\bar{i} + y_1\cdot\bar{j} + z_1\cdot\bar{k}, \bar{b} = x_2\cdot\bar{i} + y_2\cdot\bar{j} + z_2\cdot\bar{k}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$.

Длина вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ вычисляется по формуле $a = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Косинус угла φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a\cdot b} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 = 0.$$

Если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то длина отрезка AB равна $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$

Пример 1. Найти величину угла при вершине A треугольника с вершинами $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$, $C(3,-2,1)$.

Решение. Изобразим треугольник ABC (рис. 8).

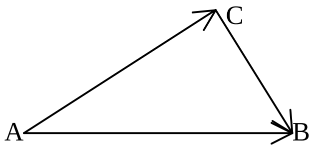


Рис. 8

$cos\,\widehat{A} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \cdot AC}.$ $\qquad \overline{AB} = (-4+1;-2+2;0-4) = (-3;0;-4)$,

$\overline{AC} = (3+1;-2+2;1-4) = (4;0;-3)$. $cos\,\widehat{A} = \dfrac{-3 \cdot 4 + 0 + (-4) \cdot (-3)}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{16+9}} = 0$, поэтому $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$.

Замечание. При решении задач векторной алгебры, аналитической геометрии и других иногда приходится искать координаты середины отрезка AB, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Координаты середины отрезка ищут по формулам: $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, z_c = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Рассмотрим в заключение этого пункта вопрос определения направления вектора и нахождение орта этого вектора, т. е. единичного вектора того же направления, что и сам вектор.

Пусть α, β, γ – углы между вектором $\overline{a}$ и координатными осями Ox, Oy, Oz.

Косинусы углов α, β, γ называют направляющими косинусами вектора $\overline{a} = (x, y, z)$. Находят $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ причем } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пример 2. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (2,-1,-2)$.

Решение. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+1+2^2}} = \dfrac{2}{3};$

$$\cos\beta = -\frac{1}{3}; \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Пример 3. Найти единичный вектор того же направления, что и вектор $\bar{a} = (2,-1,-2)$.

Решение. Единичный вектор находят по формуле $\bar{e} = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Так как длина вектора $\bar{a}$ равна 3, то единичный вектор $\bar{e} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$, т.е. его координаты получают делением координат вектора $\bar{a}$ на его длину.

Замечание. Очевидно, $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

2.4. Векторное произведение

Определение. Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен и вектору $\bar{a}$ и вектору $\bar{b}$; 2) длина вектора $\bar{c}$ равна $a \cdot b \cdot \sin\varphi$ (φ – угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$); 3) с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки.

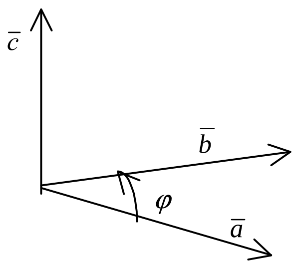


Рис. 9

Заметим, что такую тройку векторов принято называть правой (рис. 9).

Обозначим векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$. Ясно, что $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$, так как изменится на противоположное направление вектора $\bar{c}$ при неизменной и равной площади параллелограмма со сторонами a и b длине этого вектора.

Векторное произведение векторов $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ вычисляют по формуле:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

С помощью векторного произведения можно вычислить площадь параллелограмма, построенного на $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах: $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$, или площадь треугольника, построенного на этих векторах: $S=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

Пример 4. Найти площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин: $A(-2,4,-6), B(0,2,-4), C(-5,8,-6)$.

Решение. Найдём векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB}=2\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$, $\overline{AC}=-3\bar{i}+4\bar{j}+0\bar{k}$, тогда $S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Находим $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & 2\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}=-8\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$.

Имеем $S=\frac{1}{2}\left|-8\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{64+36+4}=\frac{1}{2}\sqrt{104}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 26}=$
$=\sqrt{26}$.

2.5. Смешанное произведение

Определение. Смешанным произведением векторов $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число $\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c}$. Обозначают смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Численно смешанное произведение равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ как на сторонах, взятому со знаком +, если эта тройка векторов правая, и со знаком -, если эта тройка левая. Если же $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны, то $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$.

Если $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1), \bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ и $\bar{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

С помощью смешанного произведения можно вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}: V=\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|$, или объем пирамиды, построенной на этих векторах: $V=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|$.

2.6. Прямая на плоскости

Определение. Уравнением линии на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Теорема. Всякое уравнение первой степени $Ax+By+C=0$, где A и B не обращаются в нуль одновременно, представляет собой уравнение некоторой прямой линии на плоскости Oxy.

Введем следующие понятия. Вектор, перпендикулярный прямой l, будем называть нормалью прямой и обозначать $\bar{n}$. Итак, $\bar{n}\perp l$. Вектор, параллельный прямой l, будем называть направляющим вектором этой прямой. Обозначим его $\bar{a}=(l,m)$.

Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox будем называть угловым коэффициентом этой прямой: $tg\varphi=k$ (рис. 10).

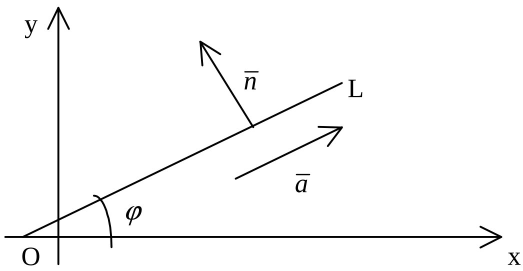


Рис. 10

Укажем теперь основные уравнения прямой на плоскости:

1) $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой;

2) $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)=0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A,B)$;

3) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ – каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно направляющему вектору $\overline{a}=(l,m)$;

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$;

5) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно;

6) $y=k\cdot x+b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, где k – угловой коэффициент прямой, а b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy;

7) $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$ – уравнение прямой (или пучка прямых), проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$, где k – угловой коэффициент прямой.

Рассмотрим теперь взаимное расположение прямых, заданных различными уравнениями.

1. Пусть даны прямые $l_1: y=k_1\cdot x+b_1$,

$l_2: y=k_2\cdot x+b_2$. Тогда угол между этими прямыми определяют по формуле $tg\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$.

Условие перпендикулярности:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

Условие параллельности:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.$$

2. Пусть две прямые заданы общими уравнениями

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Тогда угол α между этими прямыми равен углу между их нормалями $n_1 = (A_1, B_1)$ и $n_2 = (A_2, B_2)$, т. е.

$$\cos\alpha = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow$

$$\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

Условие параллельности: $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 // \bar{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}.$

3. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями $l_1 : \dfrac{x - x_0}{l_1} = \dfrac{y - y_0}{m_1}$, $l_2 : \dfrac{x - x_0}{l_2} = \dfrac{y - y_0}{m_2}$.

Тогда угол α между прямыми совпадает с углом α между направляющими векторами $\bar{a}_1 = (l_1, m_1)$ и $\bar{a}_2 = (l_2, m_2)$:

$$\cos\alpha = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \perp \bar{a}_2 \Leftrightarrow l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0.$

Условие параллельности: $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 // \bar{a}_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}.$

Пример 5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2,-1)$ параллельно, перпендикулярно и под углом 45° к прямой $y = x - 4$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением (7) прямой, проходящей через заданную точку. Имеем уравнение

$$y + 1 = k \cdot (x - 2).$$

Определим k прямой. Если прямая параллельна данной прямой $y = x - 4$, то $k = 1$ и $y + 1 = x - 2 \Rightarrow x - 2 - y - 1 = 0 \Rightarrow x - y - 3 = 0$ – это уравнение прямой, параллельной данной.

Если искомая прямая перпендикулярна данной, то $k = -1$ и тогда $y + 1 = -(x - 2) \Rightarrow -x + 2 - y - 1 = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0$ – это уравнение прямой, перпендикулярной данной.

Определим далее угловой коэффициент прямой, проходящей под углом 45° к данной прямой $y = x - 4$, по формуле $tg\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Подставляя в эту формулу $\alpha = 45^\circ$, получим: $1 = \frac{1-k_1}{1+k_1}$ (т. к. угловой коэффициент данной прямой $k=1$). Имеем $1+k_1 = 1-k_1 \Rightarrow 2\cdot k_1 = 1-1 \Rightarrow k_1 = 0$. И тогда $y+1=0$ – уравнение прямой, проходящей под углом 45° к данной.

Пример 6. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(5,-1)$ и $A_2(2,5)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (4):

$$\frac{x-5}{2-5} = \frac{y+1}{5+1} \Rightarrow \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{6} \Rightarrow 2\cdot(x-5) = -(y+1) \Rightarrow 2\cdot x - 10 + y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cdot x + y - 9 = 0.$$

Пример 7. Найти угол между прямыми: а) $y = 3\cdot x$ и $y = -2\cdot x + 5$; б) $18\cdot x + 6\cdot y - 17 = 0$ и $5\cdot x + 10\cdot y - 9 = 0$.

Решение. а) Для вычисления угла между прямыми с угловым коэффициентом воспользуемся формулой $tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2}$. Но $k_1 = 3, k_2 = -2$, поэтому $tg\alpha = \frac{3+2}{1-6} = \frac{5}{-5}$. Отсюда $\alpha = arktg(-1) = \frac{3}{4}\pi$.

б) В случае задания прямых общими уравнениями угол между прямыми можно искать по формуле $\cos\alpha = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Имеем

$$\cos\alpha = \frac{18\cdot 5 + 6\cdot 10}{\sqrt{18^2+6^2}\cdot\sqrt{5^2+10^2}} = \frac{150}{\sqrt{360}\cdot\sqrt{125}}$$

$$= \frac{150}{6\cdot\sqrt{10}\cdot 5\cdot\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\ \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

И последнее. Расстояние d от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находят по формуле $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2.7. Плоскость и прямая в пространстве

Назовем нормалью к плоскости вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Обозначают нормаль $\overline{n} = (A, B, C)$ (рис. 11).

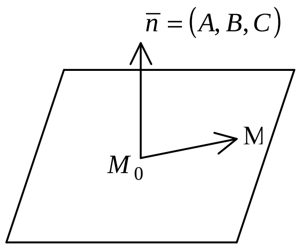


Рис. 11

Определение. Уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$ называется такое уравнение между переменными $x, y, z,$ которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.

Пусть точки M_0 и M лежат на плоскости (рис. 11). Тогда $\overline{n}\perp\overline{M_0M}$ и, значит, их скалярное произведение равно нулю: $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$ – это уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A,B,C)$.

Укажем теперь основные уравнения плоскостей:

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A,B,C)$;

2) $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости (A,B,C – координаты нормали плоскости);

3) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$;

4) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в отрезках, где a,b,c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно.

Если плоскости P_1 и P_2 параллельны или перпендикулярны друг к другу, то соответственно параллельны или перпендикулярны их нормальные векторы (рис. 12 и 13).

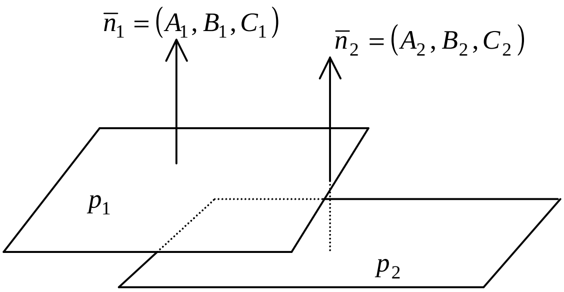


Рис. 12

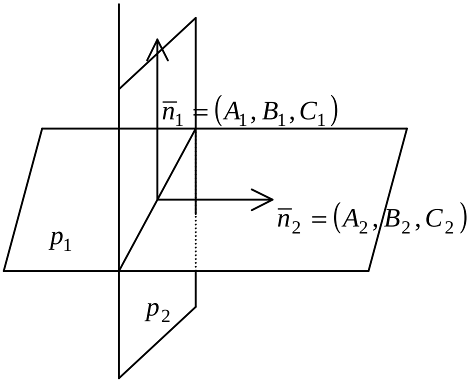


Рис. 13

Ясно, что верно и обратное утверждение: если $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$, то плоскости P_1 и P_2 взаимноперпендикулярны; если $\bar{n}_1 // \bar{n}_2$, то P_1 и P_2 взаимнопараллельны.

Итак, пусть плоскости P_1 и P_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда имеем:

1. $P_1 // P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

2. $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Из этих же соображений определяется и угол между двумя плоскостями, который равен углу между нормалями к плоскостям (или дополняет этот последний до 180^0) (рис. 14).

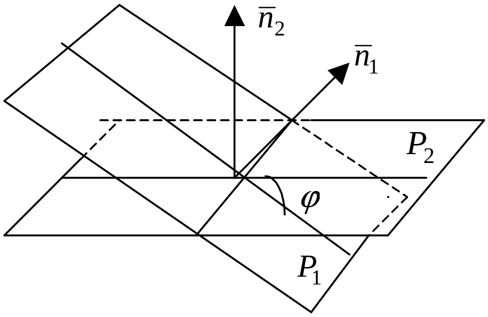


Рис. 14

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Расстояние от точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находят по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,5,-3)$ перпендикулярно вектору $B\overline{C}$, если $B(7,8,-1)$ и $C(9,7,4)$.

Решение. Найдем $B\overline{C} = (9-7, 7-8, 4+1) = (2,-1.5)$. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через заданную точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Имеем

$$2(x-2) - 1(y-5) + 5(z+3) = 0 \Rightarrow 2x - y + 5z - 4 + 5 + 15 = 0$$
$$\Rightarrow 2x - y + 5z + 16 = 0.$$

Пример 9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,5,-7)$, $M_2(-3,6,3)$ и $M_3(-2,7,3)$.

Решение. В уравнение плоскости, проходящей через три точки, подставим координаты данных точек:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -3-1 & 6-5 & 3+7 \\ -2-1 & 7-5 & 3+7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, имеем

$$2(x-1)-2(y-5)+(z+7)=0 \Rightarrow 2x-2y+z+15=0.$$

Прямая в пространстве однозначно определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направлением, т.е. некоторым вектором, называемым направляющим. Обозначим его $\overline{a}=(e,m,n)$ (рис. 15).

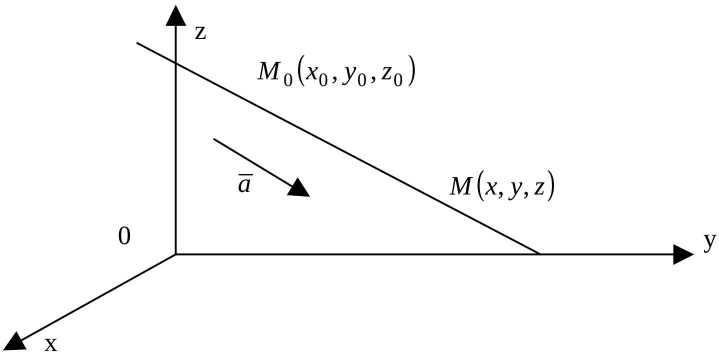


Рис. 15

Основные уравнения прямых в пространстве:

1) $\dfrac{x-x_0}{e}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ - канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\overline{a}=(e,m,n)$;

2) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, получают из канонических, считая направляющим вектором прямой вектор $\overline{M_1M_2}$, лежащий на прямой;

3) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – общие уравнения прямой задаются уравнениями двух плоскостей, объединенных в систему, а так как такая система имеет бесчисленное множество решений, то их совокупность геометрически и представляет собой прямую.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве определяется расположением их направляющих векторов.

Пусть $l_1: \dfrac{x-x_0}{e_1}=\dfrac{y-y_0}{m_1}=\dfrac{z-z_0}{n_1}$, $l_2: \dfrac{x-x_1}{e_2}=\dfrac{y-y_1}{m_2}=\dfrac{z-z_1}{n_2}$, где $\overline{a}_1=(e_1,m_1,n_1), \overline{a}_2=(e_2,m_2,n_2)$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно.

а) $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \overline{a}_1 // \overline{a}_2$, т.е. $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \dfrac{e_1}{e_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$;

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{a}_1 \perp \overline{a}_2 \Leftrightarrow e_1e_2+m_1m_2+n_1n_2=0$;

в) угол между прямыми l_1 и l_2 равен углу между направляющими векторами этих прямых, т.е.

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2}{a_1\cdot a_2}=\frac{e_1e_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{e_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{e_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

В заключение темы рассмотрим взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Ясно, что прямая $\dfrac{x-x_0}{e}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ параллельна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\overline{a}=(e,m,n)$ перпендикулярен нормали $\overline{n}=(A,B,C)$ плоскости (рис. 16), т.е. если $\overline{a}\cdot\overline{n}=0$ или $Ae+Bm+Cn=0$.

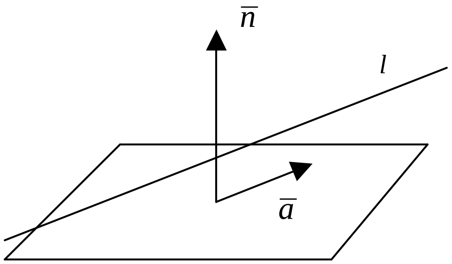


Рис. 16

Прямая перпендикулярна плоскости при условии $\overline{n} // \overline{a}$, т.е.

$$\frac{A}{e}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Угол между прямой и плоскостью находят по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|\overline{n}\cdot\overline{a}|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{a}|}=\frac{|Ae+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{e^2+m^2+n^2}}.$$

Пример 10. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1;-1;2)$, $A_2(2;1;2)$, $A_3(1;1;4)$, $A_4(6;-3;6)$.

Найти:

1) длину ребра A_1A_3;

2) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4;

3) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$;

4) площадь грани $A_1A_2A_4$;

5) объем пирамиды;

6) уравнение прямой A_1A_4;

7) уравнение плоскости $A_1A_2A_4$;

8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_3 на грань $A_1A_2A_4$.

Решение. 1. Длина ребра находится по формуле расстояния между двумя точками:

$$A_1\overline{A_3} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}.$$

2. Найдем векторы $A_1\overline{A_3}$ и $A_1\overline{A_4}$:

$$A_1\overline{A_3} = ((1-1);(1-(-1));(4-2)) = (0;2;2);$$

$$A_1\overline{A_4} = (5;-2;4).$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{A_1\overline{A_3} \cdot A_1\overline{A_4}}{|A_1A_3| \cdot |A_1A_4|} = \frac{5\cdot 0 - 2\cdot 2 + 4\cdot 2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{25+4+16}} = \frac{4}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{45}} = \frac{4}{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{10}}.$$

3. Угол между ребром и гранью находят по формуле угла между прямой и плоскостью, для чего следует найти направляющий вектор прямой $A_1\overline{A_3}$ и нормаль к плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_4. Направляющий вектор $A_1\overline{A_3}$ уже найден в пункте 2. Это вектор $A_1\overline{A_3} = (0;2;2)$. Нормаль к грани $A_1A_2A_4$ можно найти двумя способами.

Например, найти уравнение плоскости $A_1A_2A_4$ или (см. рис. 17) найти векторное произведение $A_1\overline{A_2} \times A_1\overline{A_4} = \overline{n}$, так как векторное произведение перпендикулярно и к $A_1\overline{A_2}$, и к $A_1\overline{A_4}$. Итак,

$$\overline{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}\overline{k} = 8\overline{i} - 4\overline{j} - 12\overline{k}.$$

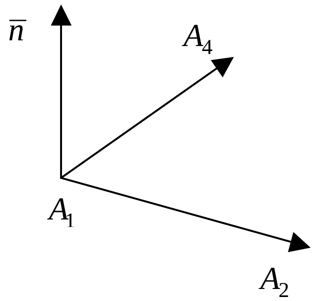


Рис. 17

Тогда $\overline{n}=(8;-4;-12), \overline{a}=(0;2;2)$.

$$\sin\varphi=\frac{|\overline{n}\cdot\overline{a}|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{a}|}=\frac{|8\cdot 0-4\cdot 2-12\cdot 2|}{\sqrt{8^2+4^2+12^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+2^2}}=$$

$$=\frac{32}{\sqrt{224}\cdot\sqrt{8}}\approx 0.7565.$$

4. Площадь грани $A_1A_2A_4$ находим по формуле $S=\frac{1}{2}\left|A_1\overline{A_2}\times A_1\overline{A_4}\right|$.

$$\left|A_1\overline{A_2}\times A_1\overline{A_4}\right|=\left|8\overline{i}-4\overline{j}-12\overline{k}\right|=\sqrt{64+16+144}=\sqrt{224}\ .$$

Тогда $S=\frac{1}{2}\sqrt{224}$.

5. Объем пирамиды находим по формуле: $V=\frac{1}{6}\left|A_1\overline{A_2}\cdot A_1\overline{A_3}\cdot A_1\overline{A_4}\right|$.

Мы уже нашли векторы $A_1\overline{A_2}=(1;2;0), A_1\overline{A_3}=(0;2;2), A_1\overline{A_4}=(5;-2;4)$. Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$A_1\overline{A_2}\cdot A_1\overline{A_3}\cdot A_1\overline{A_4}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=12-2(-10)=12+20=32.$$

Таким образом, $V=\frac{1}{6}\cdot 32=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$.

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $A_1(1;-1;2)$ и $A_4(6;-3;6)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \text{ или } \frac{x-1}{6-1}=\frac{y+1}{-3+1}=\frac{z-2}{6-2}, \text{т.е.}$$

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{4}.$$

7. Найдем уравнение плоскости, проходящей через три точки A_1, A_2 и A_4:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2-1 & 1+1 & 2-2 \\ 6-1 & -3+1 & 6-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, получим $8(x-1)-4(y+1)-12(z-2)=0$, откуда $8x-4y-12z+12=0$ и является уравнением грани $A_1A_2A_4$.

8. Нормаль к грани $A_1A_2A_4$ является направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной на эту грань из вершины A_3, поэтому уравнение высоты имеет вид

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-4}{-12}.$$

2.8. Промежуточные задания

Даны три точки A_1, A_2 и A_3. Найти: 1) длину отрезка $\forall^{I}\forall^{5}$; 2) уравнение прямой A_1A_2; 3) уравнение прямой, проходящей через точку A_3 параллельно прямой A_1A_2; 4) уравнение прямой, проходящей через точку A_3 перпендикулярно прямой A_1A_2; 5) уравнение прямой A_2A_3; 6) расстояние от точки A_3 до прямой A_1A_2; 7) угол между прямыми A_1A_2 и A_2A_3.

2.1.1. $A_1(-7;3)$, $A_2(5;-2)$, $A_3(-5;2)$.

2.1.2. $A_1(5;-1)$, $A_2(1;-4)$, $A_3(8;3)$.

2.1.3. $A_1(-14;6)$, $A_2(-2;1)$, $A_3(0;4)$.

2.1.4. $A_1(6;0)$, $A_2(2;-3)$, $A_3(-1;-6)$.

2.1.5. $A_1(-9;2)$, $A_2(3;-3)$, $A_3(7;3)$.

2.1.6. $A_1(7;-4)$, $A_2(3;-7)$, $A_3(-1;2)$.

2.1.7. $A_1(2;3)$, $A_2(5;7)$, $A_3(-1;-2)$.

2.1.8. $A_1(-2;-4)$, $A_2(1;0)$, $A_3(8;1)$.

2.1.9. $A_1(-1;-1)$, $A_2(11;4)$, $A_3(0;5)$.

2.1.10. $A_1(3;4)$, $A_2(0;0)$, $A_3(7;-3)$.

Даны координаты вершин A_1, A_2, A_3, A_4 пирамиды. Найти: 1) длину ребра A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$; 4) площадь грани $A_1A_2A_4$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_4; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_4$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_3 на грань $A_1A_2A_4$.

2.2.1. $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2-1)$, $A_4(4;1;3)$.

2.2.2. $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1;-2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(-5;-4;8)$.

2.2.3. $A_1(2;1;-1)$, $A_2(3;0;1)$, $A_3(2;-1;3)$, $A_4(0;8;0)$.

2.2.4. $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$.

2.2.5. $A_1(-4;2;6)$, $A_2(2;-3;0)$, $A_3(-10;5;8)$, $A_4(-5;2;-4)$.

2.2.6. $A_1(0;-1;-1)$, $A_2(-2;3;5)$, $A_3(1;-5;-9)$, $A_4(-1;-6;3)$.

2.2.7. $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1;-2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(7;5;-3)$.

2.2.8. $A_1(1;1;-1)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(5;9;-8)$.

2.2.9. $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$, $A_4(3;4;5)$.

2.2.10. $A_1(1;1;2)$, $A_2(-1;1;3)$, $A_3(2;-2;4)$, $A_4(-1;0;-2)$.

Глава 3
ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

3.1. Предел функции

Совокупность значений некоторых величин, как правило, лишенных физического содержания, представляет собой некоторые числовые множества. Будем обозначать множества большими буквами латинского алфавита: A, B, …, X, Y. Элементы этих множеств будем обозначать малыми буквами, а тот факт, что какой-то элемент принадлежит некоторому множеству, будем обозначать символом $\in$ (принадлежит): $x \in X$, $y \in Y$. Кроме того, мы будем использовать символы $\forall$ (любой) и $\exists$ (существует).

Определение. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y = f(x) \in Y$, где X и Y – данные числовые множества, то y называется функцией от x, определенной на множестве X.

Этот факт записывают так: $y = f(x)$. X называют множеством определения функции, а множество Y – множеством ее значений.

Можно сказать, что функция f осуществляет отображение множества X в Y.

Если любой элемент $y \in Y$ является значением функции f, то говорят, что функция f отображает множество X на множество $Y: X \xrightarrow{f} Y$.

Пример 1. Функция $f(x) = \sin x$ отображает интервал $x = (0,2\pi)$ на отрезок [-1,1].

Действительно, изобразим $y = \sin x$ в интервале $(0,2\pi)$. Очевидно, что каждое число из отрезка $[-1,1]$ оси OY является значением функции $y = \sin x$ (рис. 18).

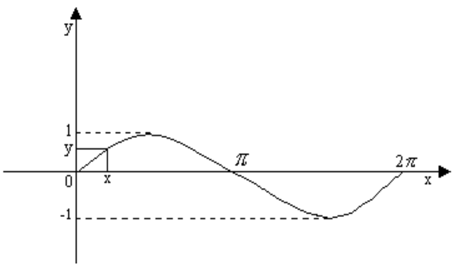


Рис. 18

Определение. Пусть между элементами множеств X и Y функция $y = f(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие, т.е. $\forall x \in X$ соответствует один и только один его образ $y = f(x) \in Y$ и обратно, для $\forall y \in Y$ найдется единственный прообраз $x \in X$, такой, что $f(x) = y$. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$, где $y \in Y$, устанавливающая соответствие между элементами множеств X и Y, называется обратной для функции $y = f(x)$.

Иначе: обратная функция f^{-1} является отображением множества Y на множество X.

Определение. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал $\alpha < x < \beta$, окружающий эту точку, из которого, как правило, удалена сама точка a (рис.19).

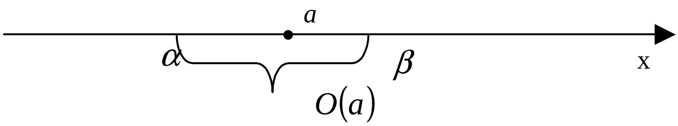


Рис. 19

Под окрестностью $O(\infty)$ символа бесконечность понимается внешность любого отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. $O(\infty) = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$.

Определение. δ – окрестностью точки a называется интервал $(a - \delta, a + \delta)$, не содержащий точку a, т.е. $O(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ (рис. 20).

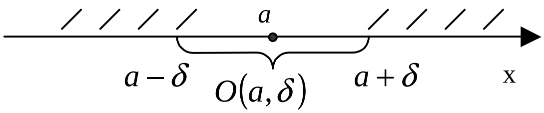


Рис. 20

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве X. Точку a мы будем называть предельной точкой множества X, если в любой δ – окрестности точки a содержится бесконечно много элементов $x \in X$.

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, определенную всюду, кроме точки $x = 2$. Очевидно, что во всех других точках, кроме $x = 2$, эта функция имеет такие же значения, как функция $y = x + 2$ в силу соотношения $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}$, которое при $x \neq 2$ можно сократить на $x - 2$ и тогда при $x \neq 2$ $y = x + 2$. Функция $y = x + 2$ определена при всех x, а функция $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ не определена при $x = 2$, но ее значения вблизи точки $x = 2$ совпадают со значениями функции $y = x + 2$. Построим таблицу.

X	1,90	1,92	1,94	1,96	1,98	2	2,02	2,04	2,06	2,08	2,1
f(x)	3.90	3.92	3.94	3.96	3.98	не сущ.	4,02	4,04	4,06	4,08	4,1

Из таблицы видно, что хотя в точке $x = 2$ функция $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ не имеет значения, т.е. не определена, но при x, приближающемся к двум, значения функции приближаются к четырем. Чем меньше x отличается от двух, тем меньше значение функции отличается от четырех.

Изобразим графически функцию $y = x + 2$, отличающуюся от $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ только тем, что первая в точке $x = 2$ имеет значение $y = 4$, а вторая – в точке $x = 2$ не определена.

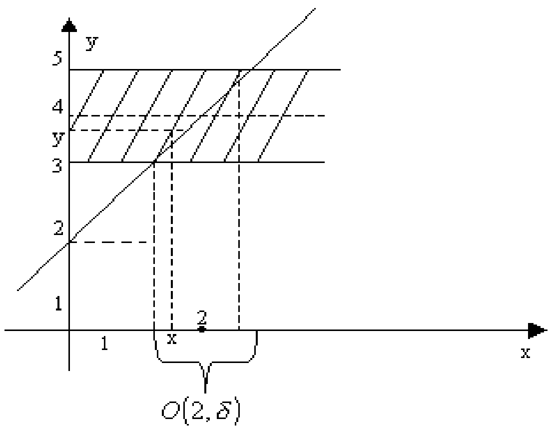


Рис. 21

Из рис. 21 видно, что для $\forall x \in O(2,\delta)$ значение функции $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ попадает внутрь полосы, содержащей $y = 4$.

Зададим положительное число ε (пусть оно будет произвольным) и построим на графике (рис. 22) полосу $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$.

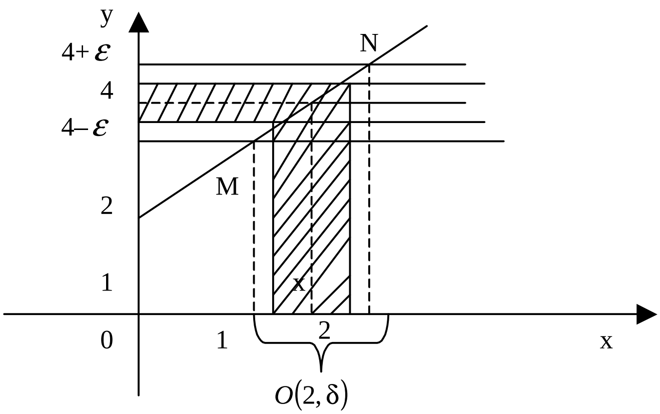


Рис. 22

Тогда, очевидно, опустив перпендикуляры на ось Ox из точек M и N, получим окрестность $O(2,\delta)$ точки $x = 2$, для всех точек x которой соответствующие значения функции попадают внутрь ε-полосы, окружающей $y = 4$. Уменьшив ε, т.е. сузив полосу $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$, мы получим и более узкую окрестность $O(2,\delta)$. На рис. 22 на заштрихованной полоске видно, что при $x \to 2$ $y \to 4$.

Определение. Говорят, что число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ $(x \neq a)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность $O(a,\delta)$ точки a, что для всех $x \in O(a,\delta)$ выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что расстояние между $y = A$ и $y = f(x)$ меньше ε, что соответствует тому, что значения функции попадают в ε-полосу, окружающую $y = A$.

Тот факт, что при $x \to a$ функция y имеет предел A, записывают так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Заметим, что для всех $x \in O(a,\delta)$ расстояние от x до a будет меньше δ, т.е. $|x-a| < \delta$ (рис. 23).

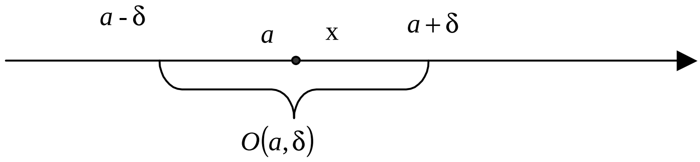


Рис. 23

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 3}(2x+1) = 7$.

Решение. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что можно найти такую δ - окрестность точки $x = 3$, что для всех точек $x \in O(3,\delta)$ будет выполняться соотношение $|(2x+1)-7| < \varepsilon$.

Преобразуем неравенство $|(2x+1)-7| < \varepsilon$ так, чтобы из него получить $|x-3| < \delta$. Имеем $|2x+1-7| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ясно, что, взяв $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$, мы получим требуемое соотношение: $|x-3| < \delta \Rightarrow |(2x+1)-7| < \varepsilon$.

Сформулируем некоторые свойства пределов.

Теорема. Если функция $f(x) = c$ постоянна в некоторой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

Теорема. Если $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то этот предел единствен.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной на данном множестве X, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$ при всех $x \in X$.

Если такое число M не существует, то функция $f(x)$ называется неограниченной.

Пример 3. Функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как $|\sin x| \le 1$. Функция $y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ не ограничена на множестве, содержащем точку $x = 0$.

Лемма. Если функция $f(x)$ имеет предел A при $x \to a$, то она ограничена в некоторой окрестности точки $x = a$.

Теорема. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и пусть $M < f(x) < N$ в некоторой окрестности точки $x = a$. Тогда $M \le A \le N$.

Положительная функция не может иметь отрицательного предела.

3.2. Односторонние пределы

Определение. Любой интервал (α, a), правым концом которого является точка a, называется левой окрестностью точки a.

Аналогично любой интервал (a, β), левым концом которого является точка a, называется ее правой окрестностью.

Символически запись $x \to a + 0$ означает, что x стремится к a справа, оставаясь большим a, т.е. при $x > a$; $x \to a - 0$ означает, что x стремится к a слева, т.е. при $x < a$.

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ будем называть левосторонним пределом функции при $x \to a$ слева, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ - это правосторонний предел функции.

Теорема. Функция $y = f(x)$ имеет $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в том и только в том случае, когда существуют и равны друг другу ее $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

3.3. Бесконечно малые и бесконечно большие

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Лемма. Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to a$, если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ при $x \to a$ и $\alpha(x) \ne 0$.

Например, функции $f(x)=x$ и $g(x)=\dfrac{1}{x}$ взаимнообратны. При $x\to 0$ функция $f(x)=x$ является бесконечно малой, а $g(x)=\dfrac{1}{x}$ – бесконечно большой, если $x\neq 0$.

Сформулируем основные теоремы о бесконечно малых.

Теорема. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x\to a$ функций является бесконечно малой при $x\to a$ функцией.

Теорема. Произведение конечного числа бесконечно малых при $x\to a$ функций является бесконечно малой при $x\to a$ функцией.

Теорема. Произведение бесконечно малой при $x\to a$ функции на функцию, ограниченную в некоторой окрестности точки $x=a$, является бесконечно малой при $x\to a$ функцией.

Определение. Две бесконечно малые при $x\to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, т.е. $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to a$.

Определение. Две бесконечно малые при $x\to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одинакового порядка, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, где $k\neq 0$ и конечно.

Например, функции $y=x+1$ и $y=x^3+1$ при $x\to -1$ являются бесконечно малыми одинакового порядка, так как $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-x+1\right)=3$.

Определение. Бесконечно малая при $x\to a$ функция $\alpha(x)$ называется функцией более высокого порядка по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

В этом случае пишут $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Так, функция $y=x^3$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $y=x$ при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

3.4. Теоремы о пределах

Теорема 1. Если в точке a существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то в этой точке существует и предел суммы $f(x)\pm g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Теорема 2. Если в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует и предел произведения $f(x)\cdot g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Действительно, $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to a} c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)=c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$.

Теорема 3. Если в точке a существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ и при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то существует и предел частного $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Теорема 4. Если в окрестности точки a выполняется условие $f(x)\le \varphi(x)\le g(x)$ и при этом функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к одному и тому же пределу A, то и функция $\varphi(x)$ также стремится к тому же пределу, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$.

Пример 4. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Решение. 1) Очевидно, существуют пределы при $x\to 2$ и числителя и знаменателя дроби. По теореме о пределе частного имеем $\mathop{lim}\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{4+1}{2}=\dfrac{5}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=1+0=1;$

3) числитель и знаменатель дроби $\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ при $x \to 2$ стремятся к нулю, т.е. теорема о пределе частного неприменима, так как знаменатель дроби стремится к нулю. То, что получилось при подстановке $x=2$ в числитель и знаменатель неопределённое выражение $\frac{0}{0}$, указывает на тот факт, что числитель и знаменатель дроби одновременно при $x \to 2$ являются бесконечно малыми. И происходит это из-за того, что $x \to 2$ (или $x-2 \to 0$). Мы преобразуем дробь так, чтобы $x-2$ из дроби исчезло. Очевидно, что $\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}$, а так как x лишь стремится к двум, но $x \neq 2$, то дробь можно сократить на $x-2$ под знаком предельного перехода. Имеем $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 2-1 = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = $
$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Отметим, что при вычислении пределов сформулированные выше теоремы о пределах, как правило, не "работают", а попытка их применения приводит в итоге к неопределенности того или иного вида. Например

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \infty - \infty, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot\sin(x-1) = \infty\cdot 0, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}.$$

Рассмотрим на примерах основные приёмы раскрытия неопределенностей.

Заметим, что необходимо выяснить, что именно эту неопределённость "вносит", и постараться избавиться от выражения, вносящего неопределённость.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+3x+3x^2+x^3-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x+3x^2+x^3}{x} = \lim_{x\to 0}\left(3+3x+x^2\right) = 3.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Решение. Здесь $x-7\to 0$, поэтому преобразуем выражение так, чтобы сократить его на $x-7$. Для этого умножим и разделим дробь на $2+\sqrt{x-3}$. Тогда $(2-\sqrt{x-3})\left(2+\sqrt{x-3}\right)=2^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2$ и мы имеем

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{(7+7)\left(2+\sqrt{7-3}\right)}=$$

$$=\frac{-1}{14(2+2)}=\frac{-1}{56}.$$

Пример 7. Найти пределы: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^4+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x+1}$.

Решение. Так как во всех случаях неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ получается из-за того, что $x\to\infty$, следует расскрывать неопределенность, деля дроби на x в той или иной степени, тем самым избавляясь от выражения, вносящего неопределенность. Итак,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}}=\frac{2+0}{1-0}=2.$$

Следующие пределы найдем уже не так подробно.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^4+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{\infty+0}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Далее, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\infty+0}{1+0}=\dfrac{\infty}{1}=\infty$.

Легко заметить, что если старшая степень x числителя и знаменателя равны, то предел отношения равен отношению коэффициентов при этих степенях. Если старшая степень числителя выше старшей степени знаменателя, то в пределе получим бесконечность. Еще один пример:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)(x+2)(x+3)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x\cdot x\cdot x}{x^3}=3.$$

3.5. Первый и второй замечательные пределы

Для раскрытия неопределенностей, содержащих тригонометрические функции, используют первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ вычислим с помощью первого замечательного предела, для чего уравняем аргумент синуса и знаменатель дроби, домножив числитель и знаменатель на 3. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Находим предел непосредственно по теореме о пределе частного: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=\dfrac{0}{\pi}=0.$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$, так как $\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$, а $\sin x$ - ограниченная функция. По свойству бесконечно малой функция $\dfrac{1}{x}\sin x$ является бесконечно малой и ее предел равен нулю.

Замечание. Примеры 9 и 10 мы решили, не используя первый замечательный предел.

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}\cdot$

Решение. Преобразуем дробь так, чтобы выделить первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=$$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

Пример 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\cos 5x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}=5\cdot 1\cdot 1=5.$$

Неопределенности вида 1^{∞} раскрывают с помощью второго замечательного предела: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}=e$, где $e=2{,}71828...$, или $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e$.

Примеры:

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+1}{x^2+3}-1\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+1-x^2-3}{x^2+3}\right)^{x}=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+3}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{-2}\cdot\frac{-2}{x^2+3}\cdot x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{x^2+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+3}}=e^{0}=1.$$

Замечание. Показательная функция e^x с основанием e играет большую роль в математике и ее приложениях. Логарифмы с основанием e называют натуральными логарифмами и обозначают символом $\ln x$.

В заключение приведем еще несколько замечательных пределов:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln e$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Окончательно $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\begin{array}{l} e^x-1=y\Rightarrow e^x=y+1 \\ \ln e^x=\ln(y+1)\Rightarrow x=\ln(y+1) \\ \textit{при } x\to 0\ \ y\to 0 \end{array}\right]=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=$

$\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$.

Решение. Для решения воспользуемся формулой $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Преобразуем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot 5=5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}=5\cdot 1=5$.

3.6. Непрерывность функции

Определение. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется непрерывной в точке $x_0\in X$, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Из определения непрерывной функции следует, что функция в точке x_0 определена, её значение в этой точке равно $f(x_0)$ и кроме того, так как $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}x\right)$, мы имеем $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}x\right)$, т.е. под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Замечание. Существование $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ равносильно тому, что существуют равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы функции при $x \to x_0$, равные к тому же значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Если функция не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что она в этой точке разрывна. Ясно, что при невыполнении хотя бы одного из равенств (1) функция будет разрывной.

Примеры:

17. Функция $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ разрывна в точке $x = 2$, так как она в этой точке неопределена, или не имеет значения;

18. Функция $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \textit{если } x \neq 2 \\ 2, \ \textit{если } x = 2 \end{cases}$ также не является непрерывной в точке $x = 2$, так как $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4$, а значение функции в точке $x = 2$ $f(2) = 2$;

19. Функция $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \textit{если } x \neq 2 \\ 4, \textit{если } x = 2 \end{cases}$, в точке $x = 2$ непрерывна, так как $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 = f(2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, и слева, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Пример. Функция $y = \sqrt{x}$ является непрерывной справа в точке $x = 0$, слева же от этой точки она вообще не определена.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то говорят, что она непрерывна на этом отрезке, причем непрерывность в точке a понимается как непрерывность справа, а непрерывность в точке b – как непрерывность слева.

Теперь переформулируем определение непрерывности в других терминах. Обозначим число $x - x_0 = \Delta x$ и назовем его приращением аргумента в точке x_0. Число $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=\Delta y$ будем называть приращением функции в точке x_0 (рис. 24).

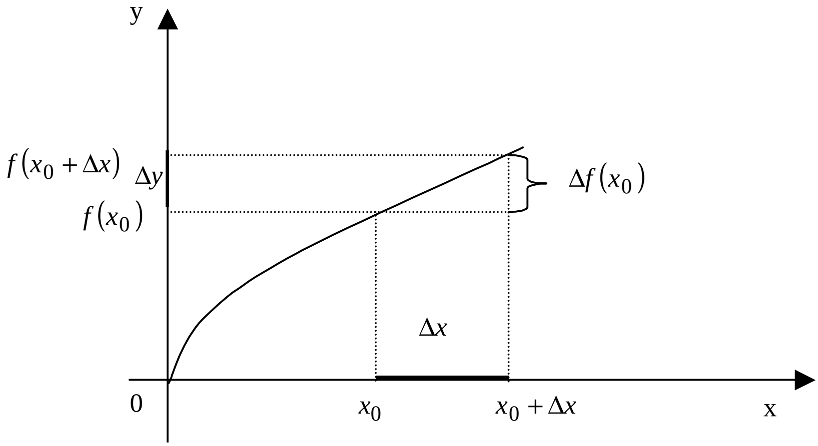


Рис. 24

Теорема. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции в точке, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Докажем теорему. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ по определению. Если обозначить $x-x_0=\Delta x$, то $x=x_0+\Delta x$ и тогда равенство, определяющее непрерывность, можно переписать так: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$ и тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Аналогично доказывается это утверждение в другую сторону: если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Сформулируем основные теоремы о непрерывных функциях.

Теорема. Пусть заданные на одном и том же множестве X функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x_0)\neq 0$) непрерывны в точке x_0.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $Z=f(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$. Тогда сложная функция $Z=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Всевозможные арифметические комбинации простейших элементарных функций, которые рассматривают в школьном курсе алгебры и начал анализа, мы будем называть элементарными функциями. Например, $y=\sqrt{x^2+1}-\sin^2 x$ является элементарной.

Все элементарные функции непрерывны в области определения. Так что $y=\sqrt{x^2+1}-\sin^2 x$ всюду непрерывна, так как всюду определена, а функция $y=arctg\dfrac{1}{x}$ разрывна в точке $x=0$.

Дадим теперь классификацию точек разрыва функции. Возможны следующие случаи.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существуют и конечны, но не равны друг другу, то точку x_0 называют точкой разрыва первого рода. При этом величину $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называют скачком функции в точке x_0.

Пример 20. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases} x^2, \textit{если } x\le 0 \\ x+1, \textit{если } x>0. \end{cases}$$

Решение. Эта функция может претерпевать разрыв только в точке $x=0$, где происходит переход от одного аналитического выражения к другому, а в остальных точках области определения функция непрерывна.

Найдем левосторонний предел функции при $x\to 0$. Слева от точки $x=0$, т.е. при $x\le 0$ $f(x)=x^2$, а $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0} x^2=0$.

Справа от точки $x=0$ $f(x)=x+1$. Тогда

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0} f(x)=0+1=1.$$

Значение функции в точке $x=0$, т.е. $f(0)=0$. Функция в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода. Это видно и на графике функции (рис. 25).

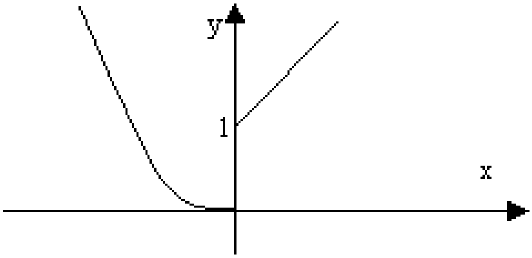


Рис. 25

2. Если в точке x_0 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, но в точке x_0 функция $f(x)$ либо не определена, либо $f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 является точкой устранимого разрыва.

Последнее объясняется тем, что если в этом случае доопределить или видоизменить функцию $f(x)$, положив $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то получится непрерывная в точке x_0 функция.

Пример 21. Функция $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ в точке $x=1$ не определена, но $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$, т.е. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=3$. Доопределим функцию в точке 1, положив ее значение в этой точке равным трем. Тогда функция $y=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, \text{åñëè } x\neq 1\\ 3, \text{åñëè } x=1\end{cases}$ становится непрерывной в точке $x=1$.

3. Точка разрыва функции, не являющаяся точкой разрыва первого рода или точкой устранимого разрыва, является точкой разрыва второго рода.

Пример 22. Функция $y=\dfrac{1}{x-1}$ в точке $x=1$ имеет разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{1-0-1}=-\dfrac{1}{0}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{1+0-1}=\dfrac{1}{+0}=+\infty$.

Пример 23. Исследовать на непрерывность функцию $y = 2^{1/x}$.

Решение. Функция не определена в точке $x = 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to -0} 2^{1/x} = 2^{1/-0} = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{\infty}} = 0$, $\lim\limits_{x \to +0} 2^{1/x} = 2^{1/+0} = 2^{+\infty} = +\infty$. И функция в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода.

Замечание. В последних двух примерах мы ввели символическую запись $\dfrac{1}{-0}, \dfrac{1}{+0}$, которая означает, что знаменатель такой дроби стремится к нулю, вся дробь стремится к бесконечности, но вовсе не означает, что мы производим деление на 0, что невозможно.

И в заключение рассмотрим свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема Больцано-Коши об обращении функции в нуль. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения различных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c)$=0.

Проиллюстрируем теорему геометрически.

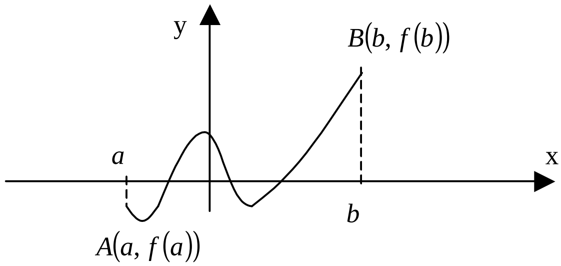


Рис. 26

Из рис. 26 видно, что функция имеет три нуля, т.е. три точки, в которых она обращается в нуль.

Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) \neq f(b)$. Тогда, каково бы ни было μ между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка **c** в интервале (a,b) такая, что $f(c) = \mu$ (рис. 27).

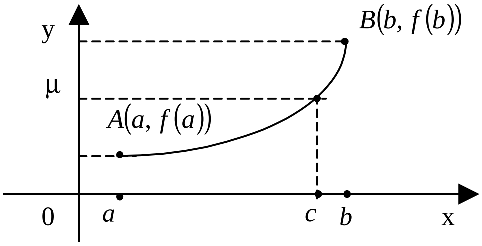


Рис. 27

Теорема 1 Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она на этом отрезке ограничена, т.е. существуют числа m и M такие, что $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a,b]$, т.е. для $a \le x \le b$.

Теорема 2 Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений, т.е. существуют такие x_1 и x_2 на отрезке $[a,b]$, что для любого $x \in [a,b]$, т.е. для $a \le x \le b$, $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.

Заметим, что отрезок $[a,b]$ является замкнутым промежутком, т.е. таким, что его концы a и b принадлежат этому промежутку.

3.7. Промежуточные задания

Найти указанные пределы

3.1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.

3.2. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$.

3.3. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

3.4. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$.

3.5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg3x}$.

3.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-1}{\sqrt{x^2+5}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

3.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$.

3.8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2-4}\right)^x$.

3.9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin x-\sin 5}{x-5}$.

3.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{x}$.

Исследовать на непрерывность и построить схематический график функций.

3.2.1. а) $y=2^{\frac{1}{x-5}}$;

б) $y=\begin{cases}-\dfrac{x}{3}, x\le 0\\ \sin x, 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ x-\dfrac{\pi}{2}, x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

3.2.2. а) $y=4^{\frac{1}{x^2-1}}$;

б) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, x\le 0\\ tgx, 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1, x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$.

3.2.3. а) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

б) $y=\begin{cases}x-1, x\le -1\\ 4x, -1<x\le 3\\ \dfrac{1}{x}, x>3\end{cases}$.

3.2.4. а) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$;

б) $y=\begin{cases}-x^2, x\le -1\\ x-3, -1<x\le 4\\ \dfrac{4}{x}, x>4\end{cases}$.

3.2.5. а) $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$;

б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x<1\\ x, 1\le x<2\\ 3, 2\le x<3\end{cases}$.

3.2.6. а) $y=1+4^{\frac{1}{x-2}}$;

б) $y=\begin{cases}7x+5, x\le -1\\ 3-x^2, -1<x\le 3\\ 1-x, x>3\end{cases}$.

3.2.7. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x-2}$;

б) $y=\begin{cases}1-x^3, x\le 1\\ 3x-1,1<x\le 3\\ \lg x, x>3\end{cases}$.

3.2.8. а) $y=3-\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$;

б) $y=\begin{cases}x^2, x\le 3\\ 2x+1,3<x\le 5\\ 13-x, x>5\end{cases}$.

3.2.9. а) $y=\dfrac{x+3}{2-3x}$;

б) $y=\begin{cases}-(x+1), x\le 3\\ 2-2x,3<x\le 5\\ 2^x, x>5\end{cases}$.

3.2.10. а) $y=\dfrac{x}{x^2-16}$;

б) $y=\begin{cases}-2x, x\le 0\\ \sqrt{x},0<x\le 1\\ 3, x>1\end{cases}$.

Глава 4
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Производная функции

Перейдем к изучению одного из важнейших понятий математики – производной функции. Рассмотрим задачу о касательной.

Изобразим график функции, непрерывной в интервале (a,b). Найдем $f(x_0)$, изобразим соответствующую точку M_0 на графике. Дадим x_0 приращение Δx, найдем $f(x_0+\Delta x)$, а затем построим точку M на графике и секущую M_0M (рис. 28).

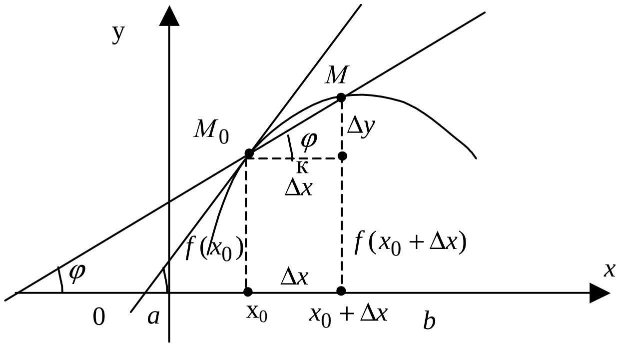


Рис. 28

Устремим точку M к M_0 вдоль по кривой. Тогда, очевидно, угол φ наклона секущей M_0M к оси ox будет изменяться, а сама секущая M_0M, поворачиваясь, займет положение касательной к графику функции в точке M_0.

Определение. Если существует предельное положение секущей M_0M при стремлении $M \to M_0$ вдоль по кривой, то оно называется касательной к графику функции в точке M_0.

Обозначим угол наклона касательной к графику функции в точке M_0 α. Очевидно, $\varphi \to \alpha$ при $\Delta x \to 0$, а $tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к $tg\alpha$:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или угловой коэффициент $k = tg\alpha$ касательной равен

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Определение. Пусть $f(x)$ определена в интервале (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Дадим x_0 приращение Δx так, чтобы точка $x_0 + \Delta x \in (a,b)$.

Если существует конечный (или бесконечный) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется конечной (или бесконечной) производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается символами y'; $f'(x_0)$, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), видим, что $k = y'$, т.е. угловой коэффициент касательной равен производной в точке касания.

Приведем примеры.

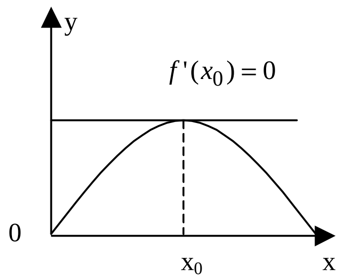


Рис. 29

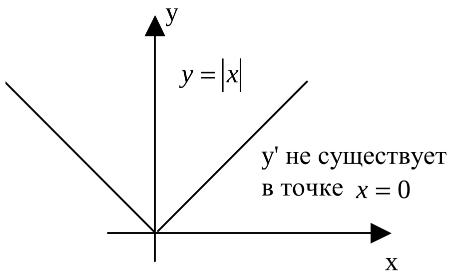


Рис. 30

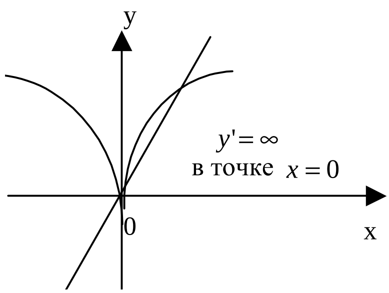


Рис. 31

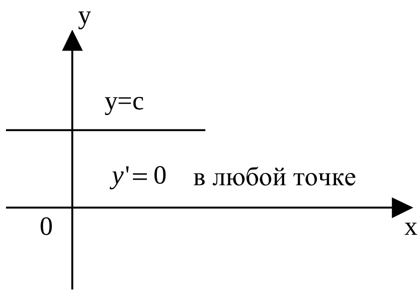


Рис. 32

Из рис. 30 видно, что в точке $x=0$ нет предельного положения секущей, так как слева от $x=0$ секущая совпадает с прямой $y=-x$, а справа с прямой $y=x$. На рис. 31 предельное положение секущей совпадает с осью Оу.

Сформулируем некоторые теоремы о производных.

Теорема. Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$ функций $u(x)$ и $v(x)$, то существует $(u(x)+v(x))' = (u+v)' = u'+v'$;

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'; \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0).$$

Следствие. $(cy)' = c'y + cy' = cy'$, так как $c' = 0$ (рис. 32), т.е. постоянный множитель выносится за знак производной.

Теорема. Если функция в точке x_0 имеет производную, то она в этой точке непрерывна.

Обратное неверно. На рис. 30 изображена непрерывная функция, у которой в точке $x=0$ нет производной.

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция $u=u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0=u(x_0)$. Тогда сложная функция $y=f(u(x))$ имеет производную в точке x_0, причем $y' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

Короче: $y' = f'_u \cdot u'_x$ в произвольной точке x.

Выведем формулы некоторых производных, применяя определение производной:

1) $y=x^2$ имеет производную

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x;$$

2) $$\left(e^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Таким же образом можно получить производные $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, а по правилу вычисления производных сложных функций можно вычислить и другие производные.

Запишем таблицу производных, причем обобщенную таблицу, т.е. таблицу производных сложных функций.

Пусть $y = f(u), u = u(x)$. Тогда $y' = f'(u) \cdot u'(x)$.

1. $c' = 0,$
2. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u',$
3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u',$
4. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u',$
5. $(a^u)' = a^u \ln a u',$
6. $(e^u)' = e^u \cdot u',$
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u',$
8. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u',$
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u',$
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u',$
11. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u',$
12. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$
13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$
14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$
15. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u',$
16. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u',$
17. $(f+g)' = f' + g',$
18. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$
19. $(kf)' = kf',$
20. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, g \neq 0,$
21. $\left(\frac{f}{k}\right)' = \frac{f'}{k},$
22. $\left(\frac{k}{g}\right)' = -\frac{kg'}{g^2}.$

Примеры. Найти производные функций:

1. $y = \sin 3x; \quad y' = \cos 3x (3x)' = \cos 3x \cdot 3.$

2. $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}. \quad y' = \frac{-10^x \cdot \ln 10 (1+10^x) - (1-10^x) \cdot 10^x \ln 10}{(1+10^x)^2} =$

$$= \frac{-10^x \ln 10 - 10^{2x} \ln 10 - 10^x \ln 10 + 10^{2x} \ln 10}{(1+10^x)^2} = \frac{-2 \cdot 10^x \cdot \ln 10}{(1+10^x)^2}.$$

3. $y = \sqrt{1-x^2}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$

4. $y = x^4\left(1-\frac{x}{3}+\frac{1}{x^2}\right)$. Преобразуем эту функцию, раскрывая скобки: $y = x^4-\frac{x^5}{3}+x^2$. $y' = 4x^3-\frac{5x^4}{3}+2x$.

5. $y = \sin\left(x^2+5x+2\right)$. Берем производную по формуле 9 таблицы производных.

$y' = \cos\left(x^2+5x+2\right)\cdot(2x+5)$, где $2x+5$ – это производная аргумента x^2+5x+2 функции синус.

6. $y = \sin^2 x$. Эта функция может быть представлена: $y = (\sin x)^2$. Берем производную по формуле 2 при $n = 2$. $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$.

7. $y = \ln\sqrt{x^2+2x+2}$. Эту функцию удобно преобразовать, пользуясь свойствами логарифмов: $y = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)$. Тогда

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+2}\cdot\left(x^2+2x+2\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+2}\cdot(2x+2).$$

8. $y = e^{x^2}$. По формуле 6 таблицы производных $y' = e^{x^2}\cdot 2x$.

9. $y = \arcsin\left(e^{4x}\right)$. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-e^{(4x)^2}}}\cdot e^{4x}\cdot 4$.

10. $y = 2\ln\left(x^2+5\right)-\sqrt{5}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$. $y' =$

$$\frac{2\cdot 2x}{x^2+5}-\sqrt{5}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4x}{x^2+5}-\frac{1}{1+\frac{x^2}{5}} = \frac{4x}{x^2+5}-\frac{5}{5+x^2} = \frac{4x-5}{x^2+5}.$$

Определение. Если функция $f(x)$ в точке x имеет (конечную) производную, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка, то она называется дифференцируемой на этом промежутке.

Сформулируем несколько теорем о дифференцируемых функциях.

Теорема Ферма. Пусть $f(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале (a,b) и в точке $c\in(a,b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и на концах отрезка $[a,b]$ принимает равные значения $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Введем теперь понятие производной второго порядка функции $f(x)$. Производную от первой производной функции $f(x)$, т.е. $(y')'$ будем называть производной второго порядка (тогда y' – производная первого порядка) и будем ее обозначать y'' или $f''(x)$. Далее $(y'')' = y''' = f'''(x)$ – это производная третьего порядка и вообще $\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)}$ – это производная n-го порядка.

Пример 11. Найти производную второго порядка функции $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

Решение. $y'=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^2}$. Далее находим y'' как производную частного:

$$y''=\frac{2\cdot\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Пример 12. Найти производную четвертого порядка функции $y=e^{3x}$.

Решение.

$y'=e^{3x}\cdot 3$; $y''=3e^{3x}\cdot 3=9e^{3x}$; $y'''=9e^{3x}\cdot 3=27e^{3x}$; $y^{(4)}=27e^{3x}\cdot 3=81e^{3x}$.

4.2. Дифференциал функции

Начнем с примера. Найдем приращение функции $y=x^2$ в точке x_0. Известно, что $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. В нашем примере $f(x_0)=x_0{}^2$, $f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2$, а приращение. $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0{}^2=x_0{}^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0{}^2$. Итак, $\Delta y=2x_0\Delta x+\Delta x^2$, где, как известно, $2x_0$ является производной функции x^2 в точке x_0. При $\Delta x\to 0$ $\Delta x^2\to 0$ быстрее, чем $2x_0\Delta x$, если $x_0\neq 0$, т.е. является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с первым слагаемым. Отметим, что для дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ всегда Δy можно представить в виде $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Выражение $f'(x_0)\Delta x$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают dy, т.е. $dy = f'(x_0)\Delta x$. Приращение аргумента Δx в этом случае принято обозначать dx и тогда $dy = f'(x_0)dx$, где $dx = \Delta x$. В произвольной точке x $dy = f'(x)dx$.

Замечание. Из последней формулы получается еще одно обозначение производной $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Пример 13. $d(\sin x) = \cos x dx$;

$$d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx; \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x}dx; \quad d\left(x^2\right) = 2xdx; \quad d(x+a) = dx.$$

Как и для производной, для дифференциала функции имеют место формулы:

1. $d(u+v) = du + dv$;
2. $d(uv) = vdu + udv$;
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}(v \neq 0)$;
4. $d(cu) = cdu$.

4.3. Применение производных к исследованию функций

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке (a,b), если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$. Если же любым $x_1 < x_2$ соответствуют $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется убывающей на промежутке (a,b).

Теорема (Признак возрастания функции). Если дифференцируемая функция возрастает на некотором промежутке, то производная этой функции неотрицательна на этом промежутке.

Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.

Теорема (Признак убывания функции). Если дифференцируемая функция убывает на некотором промежутке, то ее производная неположительна на этом промежутке.

Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка, то функция убывает на этом промежутке.

Определение. Говорят, что точка x_1 является точкой максимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполнено неравенство $f(x_1) > f(x) \quad (x \neq x_1)$.

Аналогично говорят, что точка x_2 является точкой минимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполнено неравенство $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.

Максимум $f(x_1)$ и минимум $f(x_2)$ функции называются экстремумами функции, а точки x_1 и x_2 – точками экстремума, точнее, локального экстремума, так как речь идет лишь о наибольшем или наименьшем внутри некоторой окрестности значениях функции (рис. 33 и 34). Здесь x_1, x_2, x_3, x_4 – точки локального экстремума функции.

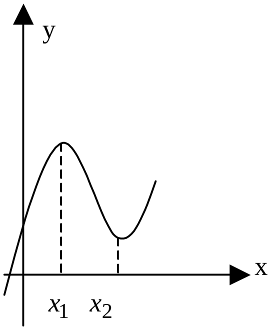


Рис. 33

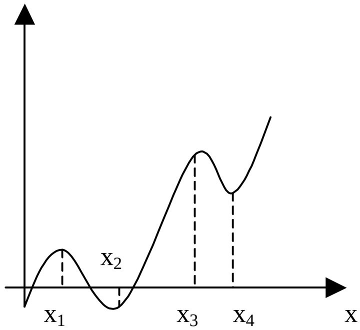


Рис. 34

Теорема (Необходимое условие экстремума).

Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то ее производная обращается в нуль в этой точке.

Замечание. Это условие не является достаточным условием экстремума, так как в точках, где $f'(x) = 0$, экстремума может и не быть (рис. 35). Так, функция $y = x^3$ в точке $x = 0$ имеет производную $y' = 3x^2$, равную нулю, а экстремума в этой точке у нее нет.

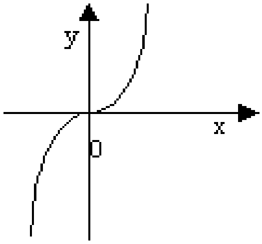


Рис. 35

Кроме точек, где $y' = 0$, экстремумы могут быть в точках, где производная не существует или равна бесконечности (см. рис. 36).

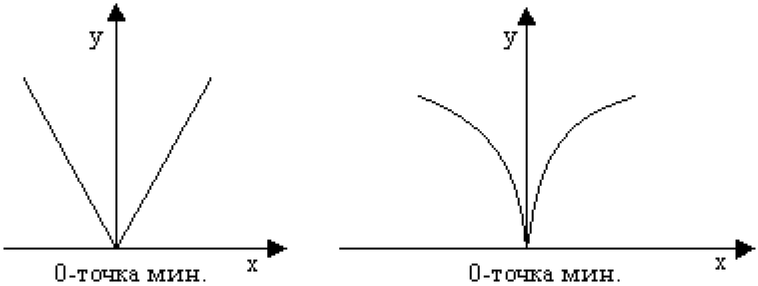


Рис. 36

Определение. Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю или не определена, называются критическими (т.е. точками возможного экстремума).

Пример 14. Найти критические точки функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Найдем производную функции e^{x^2} и приравняем ее к нулю: $y' = e^{x^2} \cdot 2x$. $e^{x^2} \cdot 2x = 0$ в точке $x = 0$ $(e^{x^2} \neq 0)$.Следовательно, точка $x = 0$ критическая.

Выясним, при каких условиях в критических точках имеется экстремум.

Теорема (Достаточное условие экстремума). Если при переходе через точку возможного экстремума x_0 производная функции меняет знак, то в точке x_0 функция имеет экстремум, причем 1) если производная меняет знак с + на –, то в точке x_0 функция имеет максимум; 2) если производная меняет знак с – на +, то в точке x_0 – минимум.

Пример 15. Исследовать на экстремум функцию $y = 3x^5 - 5x^4$.

Решение. $y' = 15x^4 - 20x^3 = 5x^3(3x - 4)$. Приравняем производную к нулю: $x^3(3x - 4) = 0$. Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 4/3$. Проверим, меняет ли производная знаки при переходе через точки x_1 и x_2, для чего (см. рис. 37) числовую ось разобьем точками 0 и 4/3 на интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, 4/3)$ и $(4/3, \infty)$ и найдем знаки y' в этих интервалах.

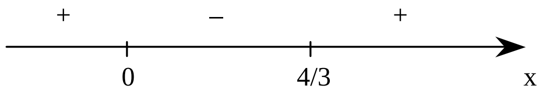


Рис. 37

В точке $x = 0$ имеем максимум, а в точке $x = 4/3$ – минимум.

$\max y = 0$, $\min y = 3(4/3)^5 - 5(4/3)^4$.

Определение. График функции $f(x)$ называется выпуклым вниз на интервале (a,b), если все точки графика лежат выше любой его касательной на этом интервале

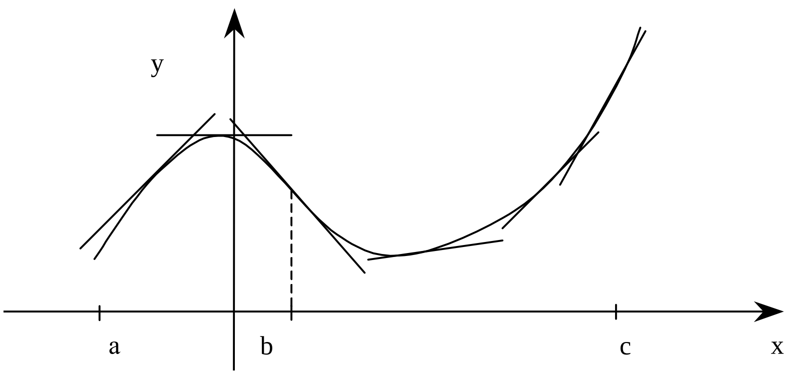


Рис. 38

На рис. 38 показана кривая, выпуклая вверх на интервале (a,b) и выпуклая вниз на интервале (b,c).

Теорема. Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x)<0$, то график функции на этом интервале направлен выпуклостью вверх.

Если же вторая производная $f''(x)>0$ на интервале (a,b), то график функции на этом интервале направлен выпуклостью вниз.

Определение. Точкой перегиба графика дифференцируемой функции $f(x)$ называется точка, при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости.

Теорема. Если вторая производная функции $f(x)$, т.е. $f''(x)$, в некоторой точке x_0 обращается в нуль, а при переходе через эту точку меняет знак, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Пример 16. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции $y=x^3$.

Решение. Найдем первую и вторую производные функции $y=x^3$: $y'=3x^2$, $y''=6x$. Приравняем y'' к нулю: $6x=0$ в точке $x=0$. При $x<0$ имеем $y''<0$, а при $x>0$ производная $y''>0$. Таким образом, согласно теореме имеем точку перегиба $M(0;0)$, причем на промежутке $(-\infty, 0)$ график функции направлен выпуклостью вверх, а на промежутке $(0;\infty)$ – выпуклостью вниз.

Замечание. Направление выпуклости функции может изменяться не только при переходе через точку перегиба, но и при переходе через точку разрыва. Например, график функции $y = \dfrac{1}{\tilde{o}}$ при $x<0$ направлен выпуклостью вверх, а при $x>0$ – выпуклостью вниз (рис. 39).

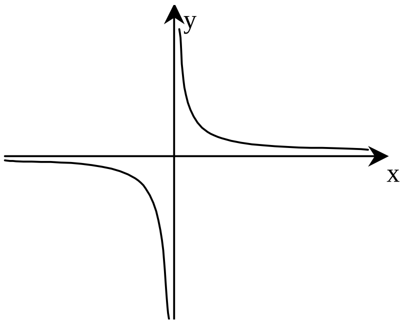


Рис. 39

При исследовании формы кривой приходится исследовать характер изменения функции при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой.

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если при удалении точки M кривой в бесконечность по этой кривой расстояние от точки M до этой прямой стремится к нулю (рис. 40).

В дальнейшем мы будем различать асимптоты вертикальные и наклонные.

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой. Из рис. 39 ясно, что ось OY является вертикальной асимптотой гиперболы $y = \dfrac{1}{\tilde{o}}$.

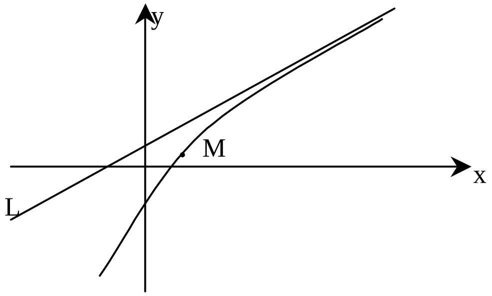


Рис. 40

Пример 17. Функция у = $\dfrac{1}{\tilde{o}^2-4}$ в точках х = ± 2, очевидно, имеет бесконечный разрыв, поэтому прямые х = – 2 и х = 2 являются вертикальными асимптотами кривой у = $\dfrac{1}{x^2-4}$.

Наклонные асимптоты задают уравнением у = kx + b, где угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый асимптотой на оси OY, ищут по формулам:

1) k = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, b = $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$ для правой асимптоты и

2) k = $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, b = $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)$ для левой асимптоты.

Если хотя бы один из указанных пределов не имеет конечного значения, то соответствующей асимптоты не существует.

Пример 18. Найти асимптоты кривой у = $\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение. Прямая x = 0 является вертикальной асимптотой, так как при $x\to+0$ $y\to-\infty$, а при $x\to-0$ $y\to+\infty$.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2,\text{ т.е. } b=2.$$

Следовательно, прямая у = x+2 является наклонной асимптотой кривой у = $\dfrac{x^2+2x-1}{x}$. у = x+2 является одновременно и правой, и левой асимптотой, поэтому ее называют асимптотой.

4.4. Общая схема исследования функции и построение графика

При решении этой задачи находят:

1) область определения функции;

2) точки разрыва и исследуют поведение функции в граничных точках области определения;

3) находят нули функции и промежутки ее знакопостоянства;

4) находят асимптоты;

5) критические точки и интервалы монотонности;

6) точки перегиба и интервалы выпуклости.

Замечание. Если функция f(х) четная, т.е. f(х) = f(–х), или нечетная, т.е. f(х) = – f(–х), то исследование функции достаточно провести для х≥0, а затем по свойству четности или нечетности построить график при х<0.

Завершают исследование функции построением ее графика.

Пример 19. Исследовать функцию у = $\dfrac{\tilde{o}^3}{(\tilde{o}-1)^2}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция у = $\dfrac{\tilde{o}^3}{(\tilde{o}-1)^2}$ определена всюду, кроме точки х=1. Отсюда область определения её: (–∞,1) ∪(1,+∞).

2) х=1 – точка разрыва функции.

Исследуем поведение функции в граничных точках области определения:

$$\lim_{x\to1-0} f(\text{x}) = \lim_{x\to1-0} \frac{\tilde{o}^3}{(\tilde{o}-1)^2} = +\infty,$$

$\lim\limits_{x\to1+0} f(\text{x}) = \lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{\tilde{o}^3}{(\tilde{o}-1)^2} = +\infty$, так как при х→1 знаменатель дроби является положительной бесконечно малой.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\tilde{o}^3}{(\tilde{o}-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tilde{o}^3}{\tilde{o}^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=-\infty.$$

3) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. При x = 0 получаем y = 0, т.е. график функции пересекает координатные оси в точке O(0,0).

4) Прямая x = 1 является вертикальной асимптотой графика функции.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=1,$$

т.е. k =1;

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=2,$$

т.е. b=2. Имеем уравнение правой наклонной асимптоты y = x+2.

Легко убедиться, что при x $\to-\infty$ k и b имеют те же значения, т.е. уравнение левой наклонной асимптоты такое же y = x+2.

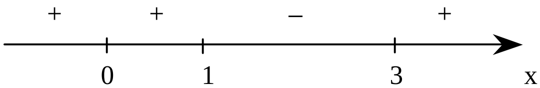
5) Найдем производную функции:

$$y'=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(x-1)\left[3x^2(x-1)-2x^3\right]}{(x-1)^4}=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}.$$

Приравнивая y' к нулю, получим $x^3-3x^2=0$, откуда имеем критические точки $x_1=0$, $x_2=3$. Для исследования знака производной в интервале $(-\infty;0)$, $(0;3)$ и $(3;+\infty)$ на числовой оси отметим точки $x=0$, $x=3$ и $x=1$.

Определим знаки y' = $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ в указанных интервалах.



Таким образом, в интервале (–∞;1) функция возрастает, в интервале (1,3) – убывает, в интервале (3,+ ∞) она возрастает. В точке x=3 функция имеет минимум: $f(3) = \dfrac{3^3}{(3-1)^2} = \dfrac{27}{4} = 6{,}75$.

6) Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}\right)^{/} = \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(x-1)^2\left[(3x^2-6x)(x-1)-(x^3-3x^2)\cdot 3\right]}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{3x^3-6x^2-3x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}\text{, y''=0 при } x=0.$$

Так как знаменатель дроби $(x–1)^4$>0 всегда (кроме x=1), то знак второй производной зависит лишь от числителя. При x<0 y''<0, при x>0 y''>0.

Точка x=0 является точкой перегиба. При x<0 кривая направлена выпуклостью вверх, так как y''<0, а при x>0 – выпуклостью вниз. В точке перегиба $f(x)$ имеет значение $f(0)$=0.

Результаты наших исследований объединим в таблицу.

x	(–∞,0)	0	(0,1)	1	(1,3)	3	(3,+∞)
y'	+	0	+		–	0	+
y''	–	0	+		+		+
y	↗∩	точка перегиба	∪↗	не существует	↘∪	min	∪↗

Строим график функции, предварительно построив асимптоты и отметив точки минимума, перегиба и пересечения графика с осями координат.

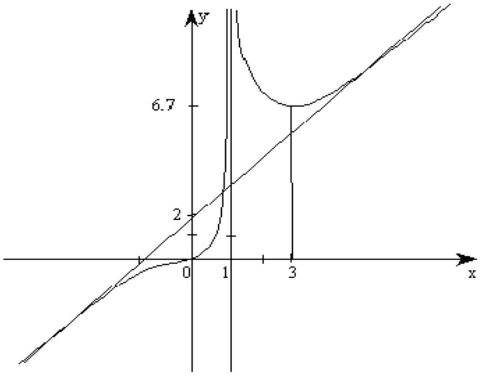


Рис.41

4.5. Функции нескольких переменных

Определение. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторого множества D соответствует определенное значение величины z, то мы говорим, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная в D. При этом пишут z = f(x,y).

Функция двух переменных осуществляет отображение R^2 в R. Поэтому можно сказать, что отображение f:$R^2 \to R$ называется функцией двух переменных. Функция двух переменных определена на множестве D плоскости Oxy, т.е. R^2, а множеством ее значений является числовое множество $Z \in R$.

Определение. Точкой x n-мерного пространства R^n называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x$.

Тогда отображение f:$R^n \to R$ мы будем называть функцией n переменных. Обозначают такую функцию $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Мы ограничимся рассмотрением функций двух переменных.

Функцию двух переменных можно изобразить графически (рис. 42). В самом деле, пусть $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости Oxy. Тогда каждой паре $(x, y) \in D$ ставится в соответствие точка $M(x, y, z)$, принадлежащая графику функции и являющаяся концом перпендикуляра PM к плоскости Oxy.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D. Дадим переменной x приращение Δx, оставляя переменную y неизменной. Тогда функция также получит приращение, если она не является постоянной.

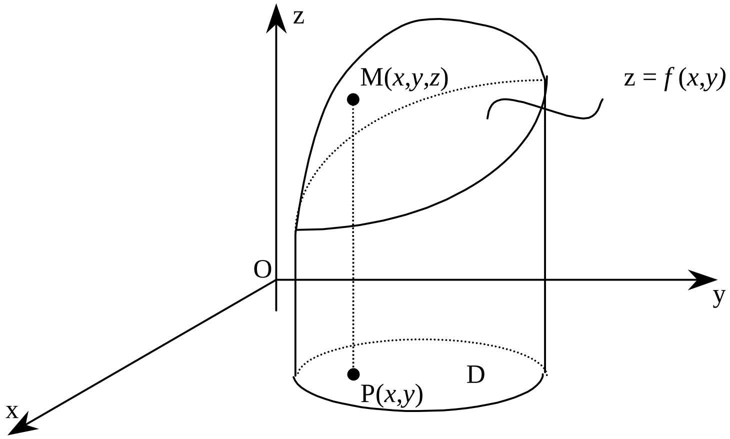


Рис. 42

Определение. Разность $\Delta_x z = f\,(x+\Delta x,\ y) - f\,(x,\ y)$ называется частным приращением функции $f\,(x,\ y)$ по переменной x.

Аналогично, если только переменной y дать приращение Δy, оставляя x неизменной, то разность $\Delta_y z = f\,(x,\ y+\Delta y) - f\,(x,\ y)$ называется частным приращением функции $f\,(x,\ y)$ по переменной y.

$\Delta z = f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f\,(x,\ y)$ – это полное приращение функции, полученное ею вследствие изменения обеих переменных.

Естественно, что здесь рассматриваются лишь такие точки (x,y), $(x+\Delta x,\ y)$, $(x,\ y+\Delta y)$, $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$, для которых функция имеет смысл.

Пример 20. Найти приращение функции $z = x^2+y^2$, если x изменилось от 1 до 1,2, а y – от 2 до 1,9.

Решение. Здесь $\Delta x = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$, а $\Delta y = 1{,}9 - 2 = -0{,}1$.

$f\,(1,\ 2) = 1^2 + 2^2 = 5$, а $f\,(1{,}2;\ 1{,}9) = 1{,}2^2 + 1{,}9^2 = 1{,}44 + 3{,}61 = 5{,}05$.

Тогда $\Delta z = 5{,}05 - 5 = 0{,}05$.

Определение. δ-окрестностью точки $M_0(x_0,y_0)$ называется совокупность всех точек (x,y), лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке M_0. Обозначают δ-окрестность $O(M_0,\delta)$.

Определение. Функция $f\,(x,\ y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [\,f\,(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f\,(x_0,\ y_0)] = 0$ при любом способе стремления приращений Δx и Δy к нулю.

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Пример 21. Покажем, что функция z=xy непрерывна в любой точке плоскости Oxy.

Действительно, составим приращение функции в точке (x, y).

$f(x, y)=xy$. Дадим x приращение Δx, а y – приращение Δy. Тогда

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)(y+\Delta y) = xy+ y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y,$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = xy + y\cdot\Delta x + x\cdot\Delta y + \Delta x\cdot\Delta y - xy=$$
$$= y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ в этом соотношении. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$, т.е. z=$xy$ непрерывна в любой точке, так как мы взяли произвольную точку.

Укажем некоторые важные свойства функций нескольких переменных, непрерывных в замкнутой и ограниченной области.

Линию, ограничивающую некоторую область D в плоскости Oxy, мы будем называть границей этой области. Точки области, не лежащие на границе области, мы будем называть внутренними точками области, если они принадлежат области вместе со своей окрестностью.

Область, состоящую из одних внутренних точек, мы будем называть открытой или незамкнутой. Если же к области относятся еще и точки границы, то область называют замкнутой. Область называют ограниченной, если существует такое постоянное C>0, что расстояние любой точки M области от начала координат O меньше C, т.е. $\left|OM\right| < C$.

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная функция в замкнутой ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, M и m – наибольшее и наименьшее значения этой функции в области D и если μ – число, удовлетворяющее условию $m<\mu<M$, то в D найдется точка $M(x_0,y_0)$ такая, что $f(x_0, y_0)= \mu$.

4.6. Частные производные. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x, y).

Рассмотрим отношение частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx аргумента x.

Определение. Если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$, то он называется частной производной (первого порядка) функции z = $f(x, y)$ по переменной x и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ $=z'_x = f_x'(x, y)$.

Аналогично определяется частная производная по переменной y:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = z'_y = f_y(x,y).$$

Замечание. Из определения частных производных следует, что при вычислении $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной, а при вычислении $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ постоянной считается переменная x, поэтому для вычисления производных не требуется никаких новых правил и формул.

Пример 22. Вычислить частные производные функций: а) z = x^2+y^2; б) z = $\dfrac{x^3}{y}$; в) z = x^y; г) z = $\ln(x^2+y^2)$; д) z = arctg $x\cdot y$;

Решение. а) Находим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции z = x^2+y^2, где y^2 считаем постоянной. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(x^2+y^2)'_x = 2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(x^2+y^2)'_y = 2y$;

б) z = $\dfrac{x^3}{y}$ имеет производную по переменной x, которую мы вычисляем так: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{x^3}{y}\right)'_x = \dfrac{1}{y}(x^3)'_x = \dfrac{1}{y}\cdot 3x^2 = \dfrac{3x^2}{y}$.

Для того чтобы вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, представим z следующим образом: z = $x^3\cdot y^{-1}$. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3(y^{-1})'_y = x^3(-1)\cdot y^{-2} = -\dfrac{x^3}{y^2}$;

в) производную по x функции z = x^y вычисляем по формуле 2 таблицы производных (см. 4.1): $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$.

Вычисляя производную этой функции по переменной y, считаем x постоянной. Тогда производную этой функции находим по формуле 5 таблицы производных (4.1): $\frac{\partial z}{\partial x} = x^y \ln x$;

г) $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(x^2+y^2)'_x = \frac{1}{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, а $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$;

д) $\frac{\partial z}{\partial x} = (\operatorname{arctg} xy)'_x = \frac{1}{1+(xy)^2}\,(xy)'_x = \frac{y}{1+(xy)^2}$, а $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+(xy)^2}$.

Вычислив производные в примере 22, мы видим, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в свою очередь являются функциями переменных x и y и, значит, могут иметь производные, как и сама функция $z = f(x,y)$.

Если вычислить $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, то мы получим производные второго порядка функции $z = f(x,y)$, обозначаемые соответственно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}$. Последние две производные называют смешанными.

Пример 23. Вычислить производные второго порядка функции $z = \ln(x^2+y^2)$ в точке $M_0(1;1)$.

Решение. Производные первого порядка вычислены в предыдущем примере $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ вычисляем как производные частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$.

Тогда $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\cdot(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ и

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} = \frac{2-2}{(1+1)^2} = 0.$$

Очевидно, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ и $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,1)} = 0$.

Производную $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)$ вычислим, предварительно представив $\frac{2x}{x^2+y^2}$ как $2x\cdot(x^2+y^2)^{-1}$. Тогда $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[2x(x^2+y^2)^{-1}]\ '_y=$

$= 2x\cdot[(x^2+y^2)^{-1}]\ '_y = 2x(-1)\,(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Аналогично можно найти

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}[2y(x^2+y^2)^{-1}]=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Тогда в точке $M_0(1;1)$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{4\cdot 1\cdot 1}{(1+1)^2}=-1$.

Этот результат вовсе не случаен.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), причем производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в этой точке, тогда $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Согласно этой теореме смешанные производные можно вычислять в любом порядке и нет необходимости находить обе смешанные производные.

Пусть дана функция $u = f(x, y, z)$, определенная в некоторой области пространства Oxyz.

Определение. Вектор с координатами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ называется градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ и обозначается grad u $=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

Под производной функции $u = f(x, y, z)$ в данном направлении $\bar{l}$ понимается выражение $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{l}$ (рис. 43).

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ представляет собой скорость изменения функции в данном направлении.

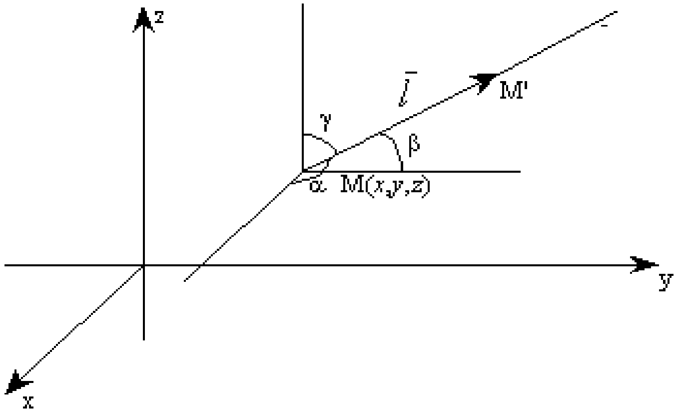


Рис. 43

Теорема. Производная функции по направлению равна проекции градиента этой функции на данное направление (в соответствующей точке).

Как известно, проекция вектора на другой вектор имеет максимальное значение, если оба вектора совпадают по направлению.

Градиент функции в данной точке указывает напрвление наиболее быстрого возрастания функции.

Величина градиента, т.е. $|\,\mathrm{grad}\ u\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ обозначается $\mathrm{tg}\ \varphi$ и определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности $u = f(x, y)$.

Пример 24. Найти производную функции $z = x^2+y^2-xy+2x+3y$ в точке $M(-9,-1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(4,5)$.

Решение. Вычислим z'_x и z'_y.

$z'_x = 2x-y+2$, $z'_y = 2y-x+3$. Найдем значения этих производных в точке M.

$$z'_x|_M = -18+1+2=-15,\ z'_y|_M = -2+9+3=10.$$

Найдем вектор $\overline{MN}$: $\overline{MN} = (4+9,\ 5+1)=(13,6)$. Так как этот вектор лежит в плоскости, то его направление определяется углом между этим вектором и осью Ox, а производная по направлению определяется по формуле $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$

Вычислим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{13^2+6^2}} = \frac{13}{\sqrt{205}}, \ \sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{205}}.$$

Пример 25. Найти градиент функции u=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке M(6,2,3).

Решение. Вычислим градиент функции по формуле

$$\text{grad u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Тогда

$$\text{grad u} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{k}.$$

Подставляя в это соотношение $x = 6$, $y = 2$, $z = 3$, получим

$$\text{grad u} = \frac{6}{7}\bar{i} + \frac{3}{7}\bar{j} + \frac{3}{7}\bar{k}.$$

4.7. Максимум и минимум функции. Абсолютный экстремум

Определение. Говорят, что точка (x_1,y_1) является точкой максимума функции $f(x,y)$, если в некоторой окрестности этой точки выполнено неравенство

$$f(x_1,y_1) > f(x,y).$$

Аналогично, говорят, что точка (x_2,y_2) является точкой минимума функции $f(x,y)$, если в некоторой окрестности этой точки

$$f(x_2,y_2) < f(x,y).$$

Сформулируем необходимое условие экстремума функции $f(x,y)$.

Теорема. В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная либо равна нулю, либо не существует.

Как и для функции одной переменной точки, в которых $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$ или не существуют, называются точками возможного экстремума или критическими точками функции. В этих точках экстремума может и не быть.

4.8. Достаточные условия экстремума функции z = $f(x,y)$

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), в которой $f'_x = f'_y = 0$. Если при этом в этой точке выполнено условие $\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''^{\,2}_{xy} > 0$, то точка (x_0,y_0) является точкой экстремума, причем точкой максимума, если $f''_{xx} < 0$, и точкой минимума, если $f''_{xx} > 0$.

Если же в этой точке $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''^{\,2}_{xy} < 0$, то экстремума в точке (x_0,y_0) нет.

В том случае, если $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''^{\,2}_{xy} = 0$ в точке (x_0,y_0), теорема ответа не дает.

Пример 26. Исследовать на экстремум функцию $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$

$(x > 0,\ y > 0)$.

Решение. Найдем точки возможного экстремума функции, для чего вычислим ее частные производные первого порядка и приравняем их к нулю.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y - \dfrac{50}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - \dfrac{20}{y^2}$. Решим систему $\begin{cases} y - \dfrac{50}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{20}{y^2} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \dfrac{50}{x^2}, \\ x = \dfrac{20}{y^2}. \end{array}$

Подставим $x = \dfrac{20}{y^2}$ в первое уравнение. Тогда получим

$$y = \frac{50 \cdot y^4}{20^2} = \frac{50}{400} y^4 = \frac{y^4}{8}.$$

Имеем $y = \dfrac{y^4}{8}$. Далее $8y - y^4 = 0$, $y(8 - y^3) = 0$ и $y_1 = 0$, $y_2 = 2$.

Находим значения x_1 и x_2, соответствующие этим значениям y.

x_1 при $y_1=0$ не существует. При $y = 2$ $x = \dfrac{20}{2^2} = 5$. Таким образом, точка возможного экстремума – M(5;2).

Найдем вторые производные функции.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (y - 50x^{-2})'_x = 2 \cdot 50 \cdot x^{-3} = \frac{100}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x – 20y^{-2})'_y = 2\cdot 20\cdot y^{-3} = \frac{40}{y^3};$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1$. Составим выражение $\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)^2$ и вычислим его значение в точке M(5;2).

$$\Delta = \left(\frac{100}{x^3} \cdot \frac{40}{y^3} - 1\right)_{(5;2)} = \frac{100}{5^3} \cdot \frac{40}{2^3} - 1 = \frac{100}{5^3} \cdot \frac{40}{2^3} - 1 = \frac{100}{125} \cdot \frac{40}{8} - 1 = 4 - 1 > 0.$$

Экстремум есть. Так как в точке (5;2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3} > 0$, то эта точка является точкой минимума функции.

Вычислим значение в точке минимума:

$$z = 5\cdot 2 + \frac{50}{5} + \frac{20}{2} = 30.$$

Рассмотрим некоторое множество D точек плоскости (или пространства).

Определение. Наименьшее или наибольшее значение функции в данной области называется абсолютным экстремумом функции (абсолютным минимумом или абсолютным максимумом соответственно) в этой области.

Согласно теореме Вейерштрасса непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает в ней своих наибольшего и наименьшего значений.

Абсолютный экстремум достигается функцией либо в критических точках, либо на границе области.

Пример 27. Найти абсолютный экстремум функции $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ на отрезке [0,1].

Решение. Вычислим производную:

$$y' = \frac{(-1 + 2x)(1 + x - x^2) - (1 - x + x^2)(1 - 2x)}{(1 + x - x^2)^2} =$$

$$= \frac{-1 - x + x^2 + 2x + 2x^2 - 2x^3 - 1 + x - x^2 + 2x - 2x^2 + 2x^3}{\left(1 + x - x^2\right)^2} = \frac{-2 + 4x}{\left(1 + x - x^2\right)^2}.$$

y' равна нулю, если $4x-2=0$, т.е. в точке $x=\dfrac{1}{2}$. Вычислим теперь значения функции в критической точке $x=\dfrac{1}{2}$ и на концах отрезка, т. е. в точках $x=0$ и $x=1$:

$$y(0)=1; \qquad y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}; \qquad y(1)=1.$$

Выбираем среди этих значений наименьшее и наибольшее.

$$\max_{[0,1]} y=1 \text{ при } x=0 \text{ и } x=1; \ \min_{[0,1]} y=\frac{3}{5} \text{ при } x=\frac{1}{2}.$$

Приведем алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений:

1) находят все критические точки функции внутри области D и вычисляют значения функции в этих точках;

2) находят все точки наибольшего и наименьшего значений функции на границе области D;

3) среди найденных значений функции выбирают наибольшее и наименьшее.

Пример 28. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=4x^2y-x^3y-x^2y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$ (рис. 44).

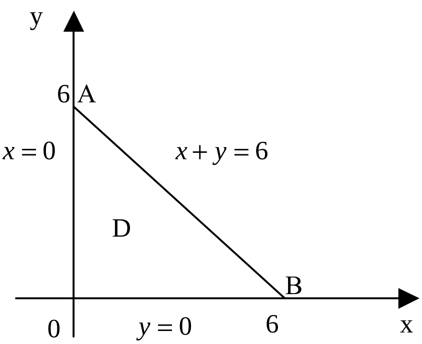


Рис. 44

Решение. 1. Найдем критические точки функции в области D.

$$z'_x=8xy-3x^2y-2xy^2$$

$$z'_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2 y\ .$$

Приравнивая производные z'_x и z'_y к нулю, получим систему

$$\begin{cases} 8xy - 3x^2 y - 2xy^2 = 0, \\ 4x^2 - x^3 - 2x^2 y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Из рисунка видно, что для внутренних точек области D выполнены условия $x > 0$, $y > 0$. Тогда $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $2x = 4$, $x = 2$. Подставляя $x = 2$ во второе уравнение, получим $2y = 2$, $y = 1$. Получим точку $M(2;1)$. Очевидно, $M \in D$, т. е. является критической. Вычислим значения z в этой точке: $z\big|_M = 4 \cdot 2^2 \cdot 1 - 2^3 \cdot 1 - 2^2 \cdot 1^2 = 16 - 8 - 4 = 4$.

2. Исследуем функцию на каждом из трех участков границы.

На участке ОА $x = 0$. y здесь изменяется от значения 0 до значения 6, т.е. $y \in [0,6]$. Подставляя в уравнение функции z уравнение ОА, получим $z = 0$. Это значение функции на всем отрезке ОА.

На промежутке ОВ $y = 0$ и снова $z = 0$.

На отрезке АВ $y = 6 - x$, $x \in [0,6]$, а

$$z = 4x^2(6 - x) - x^3(6 - x) - x^2(6 - x)^2 = 24x^2 - 4x^3 - 6x^3 + x^4 -$$
$$- x^2\left(36 - 12x + x^2\right) = 24x^2 - 10x^3 + x^4 - 36x^2 + 12x^3 - x^4 =$$
$$= 2x^3 - 12x^2.$$

Итак, $z = 2x^3 - 12x^2$, где $x \in [0,6]$.

Найдем критические точки.

$$z' = 6x^2 - 24x = 6x(x - 4),\ 6x(x - 4) = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 4.$$

$x = 4$ – критическая точка, $x = 0$ – граничная. Найдем значения z в точках $x = 4$, $x = 0$ и $x = 6$.

$$z\big|_{x=4} = 2 \cdot 4^3 - 12 \cdot 4^2 = -64\,;$$

$$z\big|_{x=0} = 0\,;$$

$$z\big|_{x=6} = 2 \cdot 6^3 - 12 \cdot 6^2 = 0\,.$$

Выбираем среди всех значений функции наибольшее и наименьшее: $\max\limits_D z = z(2,1) = 4$; $\min\limits_D z = z(4,2) = -64$.

4.9. Промежуточные задания

Найти производные функций:

4.1.1. а) $y=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$; б) $y=\ln^5 \sin x$.

4.1.2. а) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$; б) $y=e^{\sqrt{1+\ln x}}$.

4.1.3. а) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$; б) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.

4.1.4. а) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$; б) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

4.1.5. а) $y=tgx\sin^2 3x$; б) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$.

4.1.6. а) $y=tg^3x-3tgx+3x$; б) $y=arctg\dfrac{x+3}{x-3}$.

4.1.7. а) $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$; б) $y=arctg\sqrt{6x-1}$.

4.1.8. а) $y=\arccos e^{-\frac{x^2}{2}}$; б) $y=xarctgx-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

4.1.9. а) $y=\dfrac{xtgx}{1+x^2}$; б) $y=10^{3-\sin^3 2x}$.

4.1.10. а) $y=\arcsin^3 e^{4x}$; б) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$.

Исследовать методами дифференциального исчисления функции и по результатам исследования построить графики этих функций:

4.2.1. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$. 4.2.2. $y=2x+\dfrac{1}{x^2}$.

4.2.3. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$. 4.2.4. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$.

4.2.5. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$. 4.2.6. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

4.2.7. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$. 4.2.8. $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

4.2.9. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$. 4.2.10. $y=\dfrac{(x-2)^2}{2(x-1)}$.

Исследовать на экстремум следующие функции двух переменных:

4.3.1. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

4.3.2. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

4.3.3. $z = x^3 + y^2 - 6xy + 18y + 20 - 39x$.

4.3.4. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

4.3.5. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

4.3.6. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

4.3.7. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

4.3.8. $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$.

4.3.9. $z = 2(x-2)^2 - 4y^2$.

4.3.10. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанной области:

4.4.1. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

4.4.2. $z = xy(4 - x - y)$ в треугольнике: $x \ge 1$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

4.4.3. $z = 2y^2 - 3x^2 + 12x - 4y$ в треугольнике: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + 4y \le 12$.

4.4.4. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в треугольнике: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

4.4.5. $z = 2x + y - xy$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

4.4.6. $z = x^2 + y^2$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $2x + 3y \le 6$.

4.4.7. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$.

4.4.8. $z = x^2 + 3xy + y^2 - 1$ в прямоугольнике $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$.

4.4.9. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в треугольнике $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

4.4.10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.

Вычислить дифференциалы 1-го и 2-го порядков функций

4.5.1. $z = \dfrac{x^2}{y^2}$ 4.5.2. $z = x^2 \sin \sqrt{y}$

4.5.3. $z = \ln(x - 2y)$ 4.5.4. $z = \dfrac{x^2}{1 - y}$

4.5.5. $z=\sqrt{x^2-y^2}$

4.5.6. $z=x\ln\frac{y}{x}$

4.5.7. $z=\sin(x^2+y^2)$

4.5.8. $z=y\ln x$

4.5.9. $z=arctgxy$

4.5.10. $z=\frac{x}{2+y^2}$

4.6.1. Найти производную функции $z=x^2+y^2$ в точке M(1;1) в направлении, составляющем угол π/3 с осью Ox.

4.6.2. Найти производную функции $z=\ln(e^x+e^y)$ по направлению биссектрисы 1-го координатного угла в точке M(2;2).

4.6.3. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2$ в точке M(2;3;1) в направлении, составляющем равные углы с координатными осями.

4.6.4. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2$ в точке M(2;3;1) в направлении радиуса-вектора этой точки.

4.6.5. Найти градиент и его величину в точке M(1;-1;2) функции $u=x^2+y^2-z^2$.

4.6.6. Найти угол между градиентами функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точках M(-1;2;0) и P(2;3;4).

4.6.7. Найти производную функции $z=3x^4-xy+y^3$ в точке M(1;2) в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60°.

4.6.8. Найти производную функции $z=5x^2-3x-y-1$ в точке M(2;1) в направлении, идущем от этой точки к точке P(5;5).

4.6.9. Найти производную функции $z=5x^2-3x-y-1$ в точке M(1;1;1) в направлении градиента этой функции.

4.6.10. Найти величину и направление градиента функции $u=x^2+2xy^2-yz^2$ в точке M(1;2;-1).

Глава 5
ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как $(\cos x)' = -\sin x$.

Очевидно, если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C – некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x) = F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x)+C$, хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x)+C\}$.

Мы по устоявшейся традиции будем писать $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

Сформулируем основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\int dF(x) = F(x)+C$;
2. если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причем
$$\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx;$$
3. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$;
4. $\int f'(x)dx = f(x)+C$;
5. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C$.

Запишем таблицу неопределенных интегралов, которую можно составить, основываясь на таблице производных.

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $(n \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$.

Пример 1. Вычислить $\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1 \right) dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1 \right) dx = \int x^2 dx + 3\int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Пример 2. Найти $\int \dfrac{dx}{x+1}$.

Решение. В таблице интегралов имеется интеграл, "похожий" на данный: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, но в табличном интеграле под знаком dx и в знаменателе стоит одно и то же выражение x. $\int \frac{dx}{x+1}$ легко свести к табличному, если воспользоваться свойством дифференциала $d(x+a) = dx$ (см. пример 13 пункта 4.2). Тогда имеем

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C .$$

Пример 3. Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем $\int \cos x dx = \sin x + C$. Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$. Тогда

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{5} \sin 5x + C .$$

Замечание. При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

6) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$;

7) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$;

8) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Пример 4. Вычислить интегралы:

а) $\int \sqrt{x+3} dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$; в) $\int \frac{dx}{3x+5}$.

Решение.

а) $\int \sqrt{x+3} dx = \int (x+3)^{1/2} dx = \frac{(x+3)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{(x+3)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C =$

$= \frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} + C$;

б) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} tg 3x + C$, так как мы применили свойство 8 к табличному интегралу $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C$;

в) $\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$.

5.2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов

1. **Метод интегрирования по частям**. Этот метод основан на формуле $\int udv = uv - \int vdu$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin xdx$, где $n = 1,2...k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2...k$;

в) $\int x^n arctgxdx$, где $n = 0,1,2...k$;

г) $\int x^n \ln xdx$, где $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nu^{n-1}dx$, а например, $\sin xdx = dv$, тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) и подобных им обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Пример 5. Вычислить $\int x\cos xdx$.

Решение.

$$\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos xdx, v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C .$$

Пример 6.

$$\int x\ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C .$$

2. **Метод подстановки**.

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t' dt$, где $x = \varphi(t)$, а t – новая переменная.

Пример 7. Вычислить $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$, $dx=2tdt$. Имеем

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int \frac{2tdt}{1+t}=2\int \frac{tdt}{t+1}=2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt=2\left[\int\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt\right]=$$

$$=2\int dt-2\int \frac{dt}{t+1}=2t-2\ln\left|t+1\right|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$$

Пример 8. Вычислить $\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Решение. Введем новую переменную, полагая $x^2+4=t$. Тогда $dt=\left(x^2+4\right)'dx=2xdx$.

$$\int \frac{xdx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+C.$$

Пример 9. $\int \ln^2 x\frac{dx}{x}$.

Вычислим, введя новую переменную по формуле $t=\ln x$. Тогда $dt=\frac{dx}{x}$, следовательно, $\int \ln^2 x\frac{dx}{x}=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C$.

Пример 10. Вычислить $\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Решение. Обозначим $\sin x=t$, тогда $dt=\cos xdx$.

$$\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}=\int \frac{dt}{t^3}=\int t^{-3}dt=\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2t^2}+C=-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$

Пример 11. Вычислить $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$.

Решение. Обозначим $1+e^x=t$. Тогда $e^x=t-1$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию e. Получаем

$$\ln e^x=\ln(t-1)\Rightarrow x=\ln(t-1).$$

Отсюда находим

$$dx=\frac{1}{t-1}dt,\ e^{2x}=\left(e^x\right)^2=(t-1)^2.$$

Подставляя новую переменную под знак интеграла, получим

$$\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x} = \int \frac{(t-1)^2\,dt}{t(t-1)} = \int \frac{t-1}{t}\,dt = \int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln|t| + C =$$

$$= 1+e^x - \ln\left|1+e^x\right| + C\,.$$

5.3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx$, содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат. Покажем это на примерах.

Пример 12. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. Преобразуем x^2+4x+5, выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Тогда

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 = \left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1 = (x+2)^2+1\,;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C =$$

$$= arctg(x+2) + C\,.$$

Пример 13. Вычислить $\int \frac{4x+11}{\sqrt{x^2+8x+7}}$.

Решение. Преобразуем

$$x^2+8x+7 = \left(x^2+2\cdot 4x+16\right)-16+7 = (x+4)^2-9\,.$$

Тогда

$$\int \frac{4x+11}{\sqrt{x^2+8x+7}}\,dx = \int \frac{4x+11}{\sqrt{(x+4)^2-3^2}} = \begin{vmatrix} x+4=t \\ x=t-4 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{4(t-4)+11}{\sqrt{t^2-3^2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{4t-5}{\sqrt{t^2-3^2}}\,dt = 2\int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2-3^2}} - 5\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3^2}} = 2\int \frac{d\left(t^2-3^2\right)}{\sqrt{t^2-3^2}} - 5\ln\left|t+\sqrt{t^2-3^2}\right|$$

$$=2\int\left(t^2-3^2\right)^{-1/2}d\left(t^2-3^2\right)-5\ln\left|t+\sqrt{t^2-3^2}\right|=2\int u^{-1/2}du-5\ln\left|t+\sqrt{t^2-3^2}\right|=$$

$$=2\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}-5\ln\left|t+\sqrt{t^2-9}\right|+C=4\left(t^2-9\right)^{1/2}-5\ln\left|t+\sqrt{t^2-9}\right|+C=$$

$$=4\sqrt{(x+4)^2-9}-5\ln\left|x+4+\sqrt{(x+4)^2-9}\right|+C=4\sqrt{x^2+8x+7}-$$

$$-5\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+7}\right|+C.$$

5.4. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n xdx$. Если хотя бы одно из чисел m или n – нечетное положительное число, то отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пример 14. Найти $\int\cos^3 x\sin^2 xdx$.

Решение. Имеем

$$\int\cos^3 x\sin^2 xdx=\int\cos^2 x\sin^2 x\cos xdx=\int cox^2 x\sin^2 xd(\sin x)=$$

$$=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 xd(\sin x)=\int\left(\sin^2 x-\sin^4 x\right)d(\sin x)=\int\sin^2 xd(\sin x)-$$

$$-\int\sin^4 xd(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

Если m и n – четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 15. Найти $\int\sin^2 x\cos^2 xdx$.

Решение.

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^2 xdx=\int(\sin x\cdot\cos x)^2dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8\cdot 4}\sin 4x + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C .$$

5.5. Определенный интеграл

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Такую фигуру называют криволинейной трапецией (рис. 45).

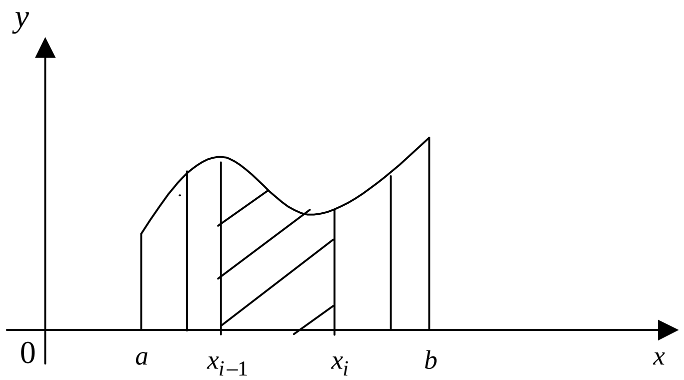


Рис. 45

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n = b$. При этом криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций. Заменим каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1,2,..,n$ и высотой $h = f(\overline{x_i})$, где $\overline{x_i}$ – произвольно выбранная внутри отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ точка.

Площадь прямоугольника будет равна $\Delta S_i = f(\overline{x_i})\Delta x_i$, а площадь всей криволинейной фигуры приблизительно будет равна сумме площадей всех прямоугольников: $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$.

Определение. Выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Определение. Если существует конечный $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части, ни от выбора точек $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Замечание. С геометрической точки зрения при $f(x) \geq 0$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 45.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$ существует и конечен, т.е. существует и конечен $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Сформулируем свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int\limits_a^b dx = b - a$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4) $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

5) $\int\limits_a^b Kf(x)dx = K\int\limits_a^b f(x)dx$;

6) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

7) $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

5.6. Вычисление определенного интеграла

Теорема. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

Пример 16. Вычислить $\int_1^2 \left(x^2+1\right)dx$.

Решение.

$$\int_1^2 \left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-1=\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3}.$$

Пример 17. Вычислить $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$.

Решение. $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx=\int_0^3 e^{-\frac{1}{3}\cdot x}dx=-3e^{-\frac{1}{3}\cdot x}\Bigg|_0^3=-3\left(e^{-\frac{1}{3}\cdot 3}-e^{-\frac{1}{3}\cdot 0}\right)=$

$$=-3\left(e^{-1}-1\right)=-3\left(\frac{1}{e}-1\right)=-3\frac{1-e}{e}.$$

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Пример 18. Вычислить $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Решение. $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=t\\ x+1=t^2\\ x=t^2-1,\ dx=2tdt\\ x=0,t=1\\ x=3,t=2\end{array}\right|=\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}2tdt=$

$$=\int_1^2 2\left(t^2-1\right)dt=2\int_1^2\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^2=2\left[\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=$$

$$=2\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right)=2\left(\frac{7}{3}-1\right)=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}.$$

Теорема (Интегрирование по частям в определенном интеграле). Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то $\int\limits_a^b u dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$.

Пример 19. Вычислить $\int\limits_1^e \ln x dx$.

Решение. $\int\limits_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x \ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x \dfrac{dx}{x} =$

$$= x \ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Замечание. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не является определенным интегралом. Считается по определению, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$. Если этот предел конечен, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, называемый несобственным, сходится. Если же этот предел не является конечным, то интеграл расходится.

С помощью определенных интегралов можно вычислять площади плоских фигур, длины дуг кривых и решать другие задачи. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $(f(x) \geq 0)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox (рис. 46).

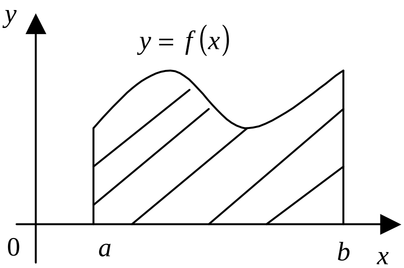


Рис. 46

Площадь такой фигуры, называемой криволинейной трапецией, вычисляют по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 47), определяется по формуле $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$.

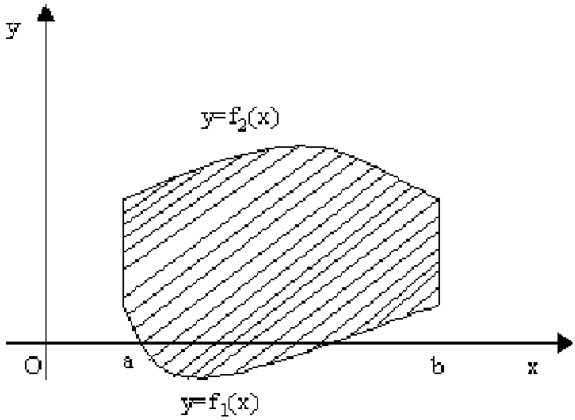


Рис. 47

Пример 20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 - 2x + 3$.

Решение. Обе линии являются параболами. Найдем точки пересечения этих линий, решив совместно уравнения:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

Имеем

$x^2 - 1 = -x^2 - 2x + 3$, $2x^2 + 2x - 4 = 0$, $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Схематично изобразим фигуру, найдя вершину параболы $y = -x^2 - 2x + 3$. $y' = -2x - 2$. Приравняв y' к нулю, получим $x = -1$, $y = 4$ (рис. 48).

Площадь такой фигуры находят по формуле:

$$S = S_2 - S_1 = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx,$$

где $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

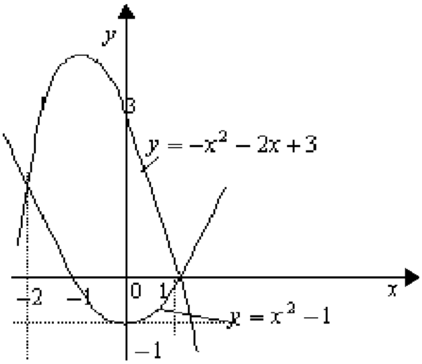


Рис. 48

Имеем $S=\int\limits_{-2}^{1}\left[\left(-x^2-2x+3\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx=\int\limits_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx=$

$$=-2\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)dx=-2\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=-2\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)-\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4\right)\right]=-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+\frac{8}{3}-6\right)=$$

$$=-2\left(3-8+\frac{1}{2}\right)=-2\left(-\frac{9}{2}\right)=9.$$

5.7. Промежуточные задания

Вычислить интегралы:

5.1.1. а) $\int(2+5x)^9\,dx$; б) $\int x\ln(3x+2)dx$.

5.1.2. а) $\int\sqrt[3]{3-7x}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2-6x+13}$.

5.1.3. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$; б) $\int\frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

5.1.4. а) $\int\sqrt{2x-5}\,dx$; б) $\int xe^{5x}\,dx$.

5.1.5. а) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$; б) $\int x\sin x\,dx$.

5.1.6. а) $\int\frac{dx}{3-5x^2}$; б) $\int\frac{3x+1}{x^2-2x+5}$.

5.1.7. а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}dx$; б) $\int \cos^3 x dx$.

5.1.8. а) $\int 4^{1-3x} dx$; б) $\int \frac{7x-1}{x^2-6x+1}dx$.

5.1.9. а) $\int e^{-x^3} x^2 dx$; б) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

5.1.10. а) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+3}dx$.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

5.2.1. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

5.2.2. $y = x(3-x)$, $y = x - 3$.

5.2.3. $xy = 5$, $x + y = 6$.

5.2.4. $y = x^2$, $y = x$.

5.2.5. $y = 3x - x^2$, $y = x^2 - x$.

5.2.6. $xy = -2$, $y = x - 3$.

5.2.7. $y = x^3$, $y = -1$, $x = 0$.

5.2.8. $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

5.2.9. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

5.2.10. $xy = 4$, $x = 4$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$.

Глава 6
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Основные понятия. Уравнения первого порядка

Определение. Функциональное уравнение $F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=0$, связывающее между собой независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные y', y'' … $y^{(n)}$, называется дифференциальным уравнением.

Порядок старшей производной неизвестной функции определяет порядок дифференциального уравнения.

Так, уравнение $F(x, y, y')=0$ является уравнением первого порядка, уравнение $F(x, y, y', y'')=0$ – уравнением второго порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y')=0$.

Определение. Всякая функция $y=\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместе со своей производной $y'=\varphi'(x)$, обращает его в тождество относительно x, называется решением этого уравнения.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y=\varphi(x,c)$, которая при любом значении c является решением этого дифференциального уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения представляет собой множество функций, удовлетворяющих уравнению.

Например, решим уравнение $y'=1$. Легко видеть, что $y=x+c$ (вспомните, что производная функции $y=x+c$ равна $(x+c)'=x'+c'=$ $=1$). Таким образом, давая постоянной c различные значения, мы получим множество прямых, параллельных прямой $y=x$.

Иногда из всех функций $y=\varphi(x,c)$ требуется выделить такую, что $\varphi(x_0)=y_0$ для фиксированных x_0 и y_0. Условие $y\big|_{x=x_0}=y_0$ называют начальным условием. Если требуется найти такое решение уравнения $y'=f(x)$ или $F(x, y, y')=0$, которое удовлетворяет начальному условию $y\big|_{x=x_0}=y_0$, то говорят, что требуется решить задачу Коши.

Записывают задачу Коши так:

$$F(x, y, y')=0, \qquad\qquad F(x, y, y')=0,$$
$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \qquad \text{или} \qquad y=y_0 \text{ при } x=x_0.$$

Далее рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка.

6.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Такие уравнения решают непосредственным интегрированием. Мы видим, что в слагаемом $M_1(x)N_1(y)\,dx$ множитель $N_1(y)$ является "лишним", так как он зависит от y, а все остальные сомножители от x. Во втором слагаемом $M_2(x)N_2(y)dy$ "лишним" является множитель $M_2(x)$. Если же разделить все уравнение на $N_1(y)\,M_2(x)$, то переменные разделятся.

Действительно, после деления уравнение

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy = 0$$

преобразуется к виду

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

где каждое слагаемое зависит лишь от одной переменной. После чего интегрируем уравнение.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(1+y^2\right)xdx + \left(1+x^2\right)dy = 0.$$

Решение. Разделим переменные путем деления его на произведение $\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)$:

$$\frac{\left(1+y^2\right)xdx}{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)} + \frac{\left(1+x^2\right)dy}{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)} = 0.$$

Тогда имеем $\dfrac{x}{1+x^2}dx + \dfrac{dy}{1+y^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2}dx = -\dfrac{dy}{1+y^2}$.

Интегрируем: $\displaystyle\int\frac{xdx}{1+x^2} = -\int\frac{dy}{1+y^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = -\int\frac{dy}{1+y^2}$.

Тогда имеем $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = -arctgy + c.$

6.3. Однородные уравнения

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной порядка k, если существует такое действительное число k, что $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ при $t\neq 0$.

Например, функция $f(x,y)=x^3+x^2y$ является однородной третьего порядка, так как $f(tx,ty)=(tx)^3+(tx)^2(ty)=t^3x^3+t^3x^2y=$ $=t^3\left(x^3+x^2y\right)=t^3f(x,y)$. Функция же x^2+y однородной не является, что тоже легко проверить.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ или к виду $\mathrm{M}(x,y)dx+\mathrm{N}(x,y)dy=0,$ где $\mathrm{M}(x,y)$ и $\mathrm{N}(x,y)$ – однородные функции одного порядка.

Однородные уравнения преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными с помощью подстановки $\frac{y}{x}=u$. Отсюда находим y и y': $y=ux,\quad y'=u'x+u$. Подставляя y и y' в однородное уравнение, после преобразования получим уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 2. Решить уравнение $\left(y^2-3x^2\right)dy+3xydy=0.$

Решение. Разрешим это уравнение относительно $y'=\frac{dy}{dx}$:

$$y'=-\frac{3xy}{y^2-3x^2}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, имеем:

$$y'=\frac{-3\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}-3}\Rightarrow y'=\frac{-3\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-3}.$$

Далее вводим новую функцию $u=\frac{y}{x}$. Так как $y'=u'x+u$,то уравнение преобразуется к виду $u'x+u=-\frac{3u}{u^2-3}$ или $x\frac{du}{dx}=-u-\frac{3u}{u^2-3}$.

Далее имеем $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-u^3+3u-3u}{u^2-3}\Rightarrow x\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{u^3}{u^2-3}$, а разделяя переменные, мы получим

$$\frac{u^2-3}{u^3}du=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\left(\frac{1}{u}-\frac{3}{u^3}\right)du=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\left(-\frac{1}{u}+\frac{3}{u^3}\right)du=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем: $3\int\dfrac{du}{u^3}-\int\dfrac{du}{u}=\int\dfrac{dx}{x}$.

Отсюда имеем: $-\dfrac{3}{2u^2}-\ln u=\ln x+\ln c$; далее

$$-\frac{3}{2u^2}=\ln u+\ln x+\ln c,\ -\frac{3}{2u^2}=\ln ucx.$$

Исключая вспомогательную функцию u , окончательно получим

$$-\frac{3x^2}{2y^2}=\ln yc \text{ или } \left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{2}{3}\ln\frac{1}{yc}.$$

6.4. Линейные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно содержит y и y' в первой степени, т.е. имеет вид $y'+p(x)y=q(x)$.

Эти уравнения решают с помощью подстановки $y=uv$, где u и v – вспомогательные функции.

Рассмотрим решение линейного уравнения на примере.

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'+ytgx=\dfrac{1}{\cos x}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=0$.

Решение. Сделаем подстановку $y=uv$. Тогда $y'=u'v+uv'$. Подставим y и y' в данное уравнение:

$$u'v+uv'+uvtgx=\frac{1}{\cos x}.$$

Сгруппируем первое и третье слагаемые в левой части уравнения:

$$v(u'+utgx)+uv'=\frac{1}{\cos x}.$$

Найдем вспомогательную функцию u, считая, что $u' + utgx = 0$. Тогда линейное уравнение преобразуется к виду $uv' = \frac{1}{\cos x}$. Таким образом, нам необходимо решить два уравнения для определения функций u и v: $u' + utgx = 0$ и $uv' = \frac{1}{\cos x}$.

Решаем первое из этих уравнений: $\frac{du}{dx} = -u\frac{\sin x}{\cos x}$. Делим переменные u и x. Тогда $\frac{du}{u} = -\frac{\sin x}{\cos x}dx$. Далее интегрируем: $\int\frac{du}{u} = -\int\frac{\sin x dx}{\cos x} \Rightarrow \int\frac{du}{u} = \int\frac{d(\cos x)}{\cos x}$ и находим какое-нибудь частное решение первого уравнения. Имеем $\ln u = \ln\cos x \Rightarrow u = \cos x$. Подставим найденное значение u во второе уравнение и решим его: $\cos xv' = \frac{1}{\cos x}$, $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Находим v: $\int dv = \int\frac{dx}{\cos^2 x}$, а $v = tgx + c$.

Окончательно $y = uv = \cos x(tgx + c)$. Мы получили общее решение линейного уравнения первого порядка. Теперь найдем его частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$.

Подставим в общее решение $x = 0$ и $y = 0$. Тогда $0 = \cos 0(tg0 + c) \Rightarrow 0 = 1(0 + c)$ или $0 = c$. Тогда из общего решения при $c = 0$ получаем искомое частное решение $y = \cos xtgx$, $y = \sin x$.

6.5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $F(x, y, y', y'') = 0$.

Определение. Общим решением уравнения второго порядка называется такая функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, которая при любых значениях c_1 и c_2 является решением этого уравнения.

Определение. Линейным однородным уравнением второго порядка называется уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Если коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ постоянны, т.е. не зависят от x, то это уравнение называют уравнением с постоянными коэффициентами и записывают его так: $y'' + py' + qy = 0$.

Уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$ будем называть линейным неоднородным уравнением.

Определение. Уравнение $k^2 + pk + q = 0$, которое получается из линейного однородного уравнения заменой функции y единицей, а y' и y'' – соответствующими степенями k, называется характеристическим уравнением.

Известно, что квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ имеет решение, зависящее от дискриминанта $D = p^2 - 4q$: $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, т.е. если $D > 0$, то корни k_1 и k_2 – действительные различные числа. Если $D = 0$, то $k_1 = k_2$. Если же $D < 0$, т.е. $p^2 - 4q < 0$, то $\sqrt{p^2 - 4q}$ будет мнимым числом, а корни k_1 и k_2 – комплексными числами. В этом случае условимся обозначать $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Пример 4. Решить уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$.

Решение. Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 16 - 4 \cdot 13 = -36$, поэтому

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Покажем, как по виду корней характеристического уравнения найти общее решение однородного линейного уравнения второго порядка.

Если $k_1 \neq k_2$ – действительные корни характеристического уравнения, то $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

Если корни характеристического уравнения одинаковы, т.е. $k_1 = k_2 = k$, то общее решение дифференциального уравнения ищут по формуле $y = c_1 e^{kx} + x c_2 e^{kx}$ или $y = e^{kx}(c_1 + c_2 x)$.

Если же характеристическое уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' + y' + 12y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения: $k^2 + k - 12 = 0$. Его корни $k_1 = -4$,

$k_2 = 3$ действительны и различны. Поэтому общее решение $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}$.

Пример 6. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$ или $(k+2)^2 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = -2$. Так что $y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$.

Пример 7. Решить уравнение $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$ данного однородного линейного уравнения мы уже решили выше в примере 4. Корни этого уравнения $k_{1,2} = -2 \pm 3i$, поэтому общее решение линейного однородного уравнения находим по формуле $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$, где $\alpha = -2$, $\beta = 3$. Итак, $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения вида $y'' + py' + qy = f(x)$, записывается в виде $y = y_0 + \tilde{y}$, где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Укажем способ, позволяющий найти частное решение неоднородного уравнения по виду правой части. Заметим, что это возможно лишь в случаях, когда правая часть уравнения является функцией определенного вида.

1. Пусть $f(x) = ae^{mx}$, где a – некоторое число, не равное нулю. Тогда

а) если, $k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$, то частное решение уравнения ищут в виде Ae^{mx}, где A – неизвестное число, которое находят, подставляя $\tilde{y} = Ae^{mx}$ в неоднородное уравнение;

б) если $k_1 = m$, а $k_2 \neq m$, то в этом случае частное решение ищут в виде $\tilde{y} = xAe^{mx}$;

в) наконец, если и $k_1 = m$, и $k_2 = m$, т.е. $k_1 = k_2 = m$, то $\tilde{y} = x^2 Ae^{mx}$.

2. Если $f(x) = P_n(x)e^{mx}$, где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$ – многочлен степени $n(n = 1,2,3,\ldots,n)$, то

а) при $k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$ решение ищут, просто «передразнивая» правую часть, т.е. $\tilde{y}$, как и правая часть, должна представлять собой произведение многочлена той же степени, что и в правой части уравнения, но с неопределенными коэффициентами, и e^{mx}, т.е. $\tilde{y} = Q_n(x)e^{mx}$. В частности, если $f(x) = (ax+b)e^{mx}$, то $\tilde{y} = (Ax+B)e^{mx}$;

б) при $k_1 = m$, $k_2 \neq m$ частное решение $\tilde{y}$ ищут в виде $\tilde{y} = xQ_n(x)e^{mx}$;

в) при $k_1 = k_2 = m$ находим $\tilde{y}$ по формуле $\tilde{y} = x^2 Q_n(x)e^{mx}$.

2. Пусть теперь $f(x) = P_n(x)$, т.е. в правой части уравнения находится многочлен некоторой степени или некоторое число (если степень многочлена нулевая). Тогда мы можем воспользоваться формулами, рассмотренными выше, полагая в них $m = 0$. (Действительно $P_n(x) = P_n(x)e^{0x}$ и, очевидно, $m = 0$).

Таким образом, имеем:

а) если $k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$, то $\tilde{y} = Q_n(x)$;

б) если $k_1 = m$, $k_2 \neq m$, то $\tilde{y} = xQ_n(x)$;

в) если $k_1 = k_2 = m$, то $\tilde{y} = x^2 Q_n(x)$.

Пример 8. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение соответствующего данному уравнению однородного уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$: $k^2 + 3k + 2 = 0$. Корни этого уравнения $k_1 = -1$ и $k_2 = -2$ действительны и различны, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$. Составим частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения по виду правой части: $f(x) = 3e^{2x}$. Среди корней характеристического уравнения нет равных числу $m = 2$. Поэтому ищем частное решение $\tilde{y}$ в виде $\tilde{y} = Ae^{2x}$, где A – неопределенный коэффициент, который находим, подставляя $\tilde{y}$ в исходное уравнение. Найдем $\tilde{y}' = 2Ae^{2x}$, $\tilde{y}'' = 4Ae^{2x}$ и подставим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в уравнение. Имеем $4A2e^{2x} + 3 \cdot 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = 3e^{2x}$. Далее соберем подобные в левой части уравнения и разделим обе части уравнения на e^{2x}: $12Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow 4A = 1$, откуда $A = \dfrac{1}{4}$. Подставим найденное A в $\tilde{y} = Ae^{2x}$. Тогда $\tilde{y} = \dfrac{1}{4}e^{2x}$.

Складывая общее решение однородного уравнения и найденное частное решение неоднородного уравнения, получим $y = y_0 + \tilde{y}$: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}$.

Пример 9. Решить уравнение $y'' - 2y' = 3$.

Решение. Составим характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' = 0$. Получим квадратное уравнение $k^2 - 2k = 0$.

Его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, так что общее решение однородного уравнения получим в виде $y_0 = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} \Rightarrow y_0 = c_1 + c_2 e^{2x}$.

Правая часть уравнения $f(x)$ представляет собой многочлен нулевой степени или число, равное трем. В этом случае, «передразнивая» правую часть, мы должны и решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения искать в виде числа. Но среди корней характеристического уравнения имеется $k = 0$, поэтому $\tilde{y} = xA$.

Найдем неизвестный коэффициент A, подставляя $\tilde{y}$ в уравнение. Для этого найдем $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$: $\tilde{y}' = A$, $\tilde{y}'' = 0$. Тогда получим $-2A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{2}$ и $\tilde{y} = -\frac{3}{2}x$, а общее решение неоднородного уравнения получим, складывая y_0 и $\tilde{y}$. Окончательно $y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{3}{2}x$.

Пример 10. Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, поэтому $y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

Правая часть неоднородного уравнения представляет собой произведение многочлена первой степени x на e^{3x}, где $m = 3$, причем один из корней характеристического уравнения совпадает с этим m. Тогда $\tilde{y}$ ищем в виде $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{3x}$, где коэффициенты A и B многочлена первой степени подлежат определению. Найдем первую и вторую производные от $\tilde{y} = \left(Ax^2 + Bx\right)e^{3x}$ по правилу дифференцирования произведения:

$$\tilde{y}' = (2Ax + B)e^{3x} + \left(Ax^2 + Bx\right)e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}\left(2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx\right);$$

$$\tilde{y}'' = e^{3x} \cdot 3\left(2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx\right) + e^{3x}(2A + 6Ax + 3B) =$$
$$= e^{3x}\left(9Ax^2 + (12A + 9B)x + 6B + 2A\right).$$

Подставим далее $\tilde{y}''$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}$ в неоднородное уравнение. Имеем

$$e^{3x}\left(9Ax^2+(12A+9B)x+6B+2A\right)-$$
$$-5e^{3x}\left(3Ax^2+(2A+3B)x+B\right)+6\left(Ax^2+Bx\right)e^{3x}=xe^{3x}.$$

Сократим обе части уравнения на $e^{3x}\neq 0$. Тогда

$$9Ax^2+(12A+9B)x+6B+2A-15Ax^2-(10A+15B)x-5B+$$
$$+6Ax^2+6Bx=x.$$

Преобразуем левую часть полученного тождества: $2Ax+B+2A=x$. Многочлены в левой и правой частях этого тождества равны, если $2A=1$, а свободный член $2A+B=0$, так как в правой части тождества свободный член отсутствует. Из этих соотношений получим $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-1$ и, следовательно, $\tilde{y}=\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)e^{3x}$, а общее решение неоднородного уравнения получим, складывая y_0 и $\tilde{y}$:

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)e^{3x}.$$

В заключение приведем таблицу, облегчающую решение линейных уравнений с правой частью $f(x)$.

Таблица

	$f(x)$	$k_1,\ k_2$	$\tilde{y}$	Примечание
1	2	3	4	5
I.	ae^{mx}, где a – данное число	$1)\,k_1\neq m$, $k_2\neq m$ $2)\,k_1=m$, $k_2\neq m$ $3)\,k_1=k_2=m$	Ae^{mx}, xAe^{mx}, x^2Ae^{mx}	A – неопределенный коэффициент

Окончание табл.

1	2	3	4	5
II.	$P_n(x)e^{mx} = (a_0x^n +$ $a_1x^{n-1} + ... + a_n)e^{mx}$, где $a_0, a_1, ..., a_n$ – данные коэффициенты	$1) k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$ $2) k_1 = m$, $k_2 \neq m$ $3) k_1 = k_2 = m$	$Q_n(x)e^{mx}$, $xQ_n(x)e^{mx}$, $x^2Q_n(x)e^{mx}$	$Q_n(x) =$ $A_0x^n +$ $A_1x^{n-1} + ... + A_n$, где $A_0, A_1, ..., A_n$ – неопределенные коэффициенты
III.	$P_n(x)$	$1) k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ $2) k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$ $3) k_1 = k_2 =$ $= 0$	$Q_n(x)$, $xQ_n(x)$, $x^2Q_n(x)$	$Q_0(x) = A$, $Q_1(x) =$ $= A_0x + A_1$, $Q_2(x) =$ $= A_0x^2 +$ $+ A_1x + A_2$

6.6. Промежуточные задания

Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

6.1.1. а) $(2x+5)dy + ydx = 0$, $y(0) = 1$. б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$.

6.1.2. а) $y'\sqrt{1+x^2} - y = 0$, $y(0) = 4$. б) $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, y(0) = 0.$

6.1.3. а) $(1+y^2)xdx + (1+x^2)ydy = 0$. б) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, y(1) = 4.$

6.1.4. а) $(x-y)dx + xdy = 0$. б) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}, y(1) = 1.$

6.1.5. а) $2x^2y' = 3x^2 + 6xy + y^2$. б) $(3+e^x)yy' = e^x$.

6.1.6. а) $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$. б) $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$.

6.1.7. а) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. б) $y(1+\ln y) + xy' = 0$.

6.1.8. а) $y' - 2\frac{y}{x} = \frac{3}{x^2}$. б) $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

6.1.9. а) $y' + 2y = e^{3x}$. б) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$.

6.1.10. а) $xy' = x^3 + y$. б) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

Решить линейные дифференциальные уравнения второго порядка:

6.2.1. а) $y'' + y' - 12y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$.

6.2.2. а) $y'' - 8y = 0$; б) $y'' + 3y' = 9x$.

6.2.3. а) $2y'' - 3y' - 2y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 1$.

6.2.4. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $y'' - 2y' = x^2 - x$.

6.2.5. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$; б) $y'' + 4y' + 5y = 5$.

6.2.6. а) $y'' + 36y = 0$; б) $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}$.

6.2.7. а) $y'' + 3y = 0$; б) $y'' + y' = x - 1$.

6.2.8. а) $y'' - 4y' - 7y = 0$; б) $y'' - y = 4x$.

6.2.9. а) $y'' + 4y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

6.2.10. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' - y = e^x$.

Глава 7
РЯДЫ

7.1. Числовые ряды

Рассмотрим некоторую числовую последовательность $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$. Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$. Для краткой записи такой суммы используют знак $\sum$ (сигма): $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Определение. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... u_n + ... \qquad (1)$$

называется числовым рядом, если $u_1, u_2, .., u_n, ...$ – некоторая числовая последовательность, u_n - общий член ряда.

$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ – это необычная сумма. Попробуем сложить 1-1+1-1+1-1+1-…. Если сгруппировать слагаемые (1-1)+(1-1)+…, то получается один результат, а если по-другому 1-(1-1)-(1-1)-…, то другой. Такого не может быть, если складывается конечное число слагаемых, а здесь их бесконечное число.

Ввиду необычности $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и методы изучения таких сумм отличаются от того, что нам известно о конечных суммах.

Определение. Конечные суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3, ..., S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n ...$ называются частичными суммами ряда (1).

Определение. Если существует конечный $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то числовой ряд называется сходящимся, а число S – суммой ряда. Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ равен бесконечности или вообще не существует, то ряд расходится.

Пример 1. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Рассмотрим общий член ряда. $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (проверьте, что это верно).

Тогда

$$u_1=1-\frac{1}{2},\ u_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ u_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ \ldots,\ u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\ \ldots.$$

Последовательно найдем частичные суммы ряда:

$$S_1=1-\frac{1}{2},\ S_2=u_1+u_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3},\ldots,$$

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

так как все остальные слагаемые попарно взаимно уничтожаются. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Таким образом, по определению данный ряд сходится и его сумма равна 1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Пример 2. Ряд $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ является расходящимся, так как его частичные суммы $S_1=1$, $S_2=1-1=0$, $S_3=1-1+1=1$, $S_4=1-1+1-1=0,\ldots$ очевидно, при $n\to\infty$ не имеют конечного предела.

Пример 3. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, называемый гармоническим.

Решение. Для решения задачи запишем гармонический ряд в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{32}+\ldots \tag{2}$$

и наряду с ним рассмотрим ряд с меньшими членами

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}+\underbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}+\ldots, \tag{3}$$

который получен из гармонического заменой $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}$ на $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9},\frac{1}{10},\ldots,\frac{1}{15}$ на $\frac{1}{16}$ и т.д. Ясно, что члены этого ряда уменьшились по сравнению с гармоническим рядом, а это дает нам возможность найти частичные суммы этого ряда. Посмотрите на ряд (3). Отмеченные фигурной скобкой слагаемые в сумме дают $\frac{1}{2}$. Действительно, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ и т.д.

Считаем частичные суммы:

$$S_2=1+\frac{1}{2};$$
$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+2\cdot\frac{1}{2};$$
$$S_8=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+3\cdot\frac{1}{2}; \qquad (4)$$
$$S_{16}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+4\cdot\frac{1}{2}\ldots$$
$$-------------------,$$

а теперь сравним индекс у S и множитель перед $\frac{1}{2}$ в правой части каждого равенства. Например, $S_8=1+3\cdot\frac{1}{2}$. Запишем $8=2^3$. Тогда $S_{2^3}=1+3\cdot\frac{1}{2}$. Далее, $S_{16}=1+4\cdot\frac{1}{2}$ перепишем $S_{2^4}=1+4\cdot\frac{1}{2}$. Тогда $S_{2^n}=1+n\cdot\frac{1}{2}$. Отсюда мы видим, что при $n\to\infty$ частичные суммы второго ряда S_{2^n} стремятся к бесконечности, т.е. ряд (3) с меньшими, чем у гармонического ряда членами расходится, а значит, и гармонический ряд расходится. Запомните этот ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ называется обобщенным гармоническим. Этот ряд является сходящимся при $p>1$, при $p<1$ он расходится (при $p=1$ он совпадает с гармоническим).

Отметим, что не всегда бывает просто найти сумму числового ряда или определить, что он расходится по определению, а часто и задача ставится так: исследовать ряд на сходимость. Решение этой задачи осуществляется с помощью необходимого и достаточных признаков сходимости.

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; Если же $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5} \neq 0 .$$

Рассмотрим знакоположительные числовые ряды, т.е. ряды, члены которых $u_n > 0$ при любых n.

1. **Признак сравнения.** Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если ряд с большими членами сходится, то сходится и ряд с меньшими членами. Если же ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

2. **Признак сравнения в предельной форме.** Если существует конечный и отличный от нуля $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Если отбросить конечное число членов ряда (или, наоборот, прибавить к ряду конечное число слагаемых), то сходимость ряда не изменится. Если ряд был сходящимся, то изменится лишь его сумма.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Решение. Сравним этот ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Для этого выпишем несколько первых членов этих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{6}$$

Если от ряда (5) отбросить его первый член, равный единице, то сходимость ряда от этого не изменится. Но тогда мы видим, что $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3\cdot 4}$, т.е. члены ряда (5) не превосходят членов сходящегося ряда (6). И, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ также сходится.

Пример 7. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$.

Решение. Применим признак сравнения в предельной форме. Очевидно, $u_n=\frac{1}{n^2+4}$ и $v_n=\frac{1}{n^2}$ – это величины одинакового порядка, так как обе они содержат n^2 в знаменателе. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+4}:\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$. И оба ряда сходятся, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ сходится вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Пример 8. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4\sqrt{n}}$.

Решение. Этот ряд сравним с гармоническим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Действительно, если рассматривать лишь старшие степени n в $u_n=\frac{n}{n^2+4\sqrt{n}}$, то u_n имеет порядок $\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4\sqrt{n}}:\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot n}{n^2+4\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$.

Таким образом, данный ряд расходится, как и гармонический.

3. **Признак Даламбера.** Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$, то

1) при $\ell<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_n>0$, сходится,

2) при $\ell>1$ ряд расходится,

3) при $\ell=1$ признак ответа не дает.

Пример 9. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$.

Решение. $u_n=\frac{e^n}{n!}=\frac{e^n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}$; $u_{n+1}=\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^{n+1}}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}$.

Тогда
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)\cdot e^n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1}=e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=e\cdot0=0<1.$$

Ряд сходится.

Замечание. Признак Даламбера применяют для исследования рядов, общие члены которых содержат выражения a^n или n!

4. **Признак Коши.** Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=e,$ то

1) при $e<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_n>0$, сходится,
2) при $e>1$ ряд расходится,
3) при $e=1$ признак ответа не дает.

Пример 10. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{3n+1})^n$.

Решение. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n+1}{3n+1})^n}$.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n}=\frac{1}{3}<1.$

Согласно признаку Коши ряд сходится.

5. **Интегральный признак.** Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ положительны и $u_n>u_{n+1}$ при $\forall n\in N$. Пусть функция $f(x)$ при $x=n$ имеет значения $f(n)=u_n$,положительна и монотонно убывает при $x>1$. Тогда числовой ряд сходится или расходится вместе с несобственным интегралом $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{dx}$.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. Рассмотрим $u_n=\frac{1}{n\ln n}$. Очевидно, $u_n>u_{n+1}$, т.е. с ростом n члены ряда уменьшаются. Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ при $x>2$ также монотонно убывает. Так как выполнены условия интегрального признака, то исследование сходимости ряда сводится к исследованию сходимости интеграла $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$. Но

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{dx}{x\ln x}=$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\right] = \infty ,$$

т.е. интенграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$, а вместе с ним и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится.

Рассмотрим теперь знакопеременные ряды, т.е. такие ряды, члены которых могут быть и положительными, и отрицательными.

6. **Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.** Пусть члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots \qquad (7)$$

удовлетворяют условиям:

$$1)\ u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots \qquad (8)$$

и

$$2)\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 .$$

Тогда знакочередующийся ряд сходится, причём его сумма S не превосходит его первого члена, т.е. $S < u_1$.

7**. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.**

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ также сходится.

Определение. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется абсолютно сходящимся.

Определение. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется условно сходящимся.

Замечание. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда является и признаком абсолютной сходимости такого ряда.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+5}$.

Решение. Исследуем этот знакочередующийся ряд по признаку Лейбница. Здесь выполнены условия этого признака: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+5}=0$ и 2) $u_n > u_{n+1}$ для $\forall n$, так как, очевидно, с ростом n дробь $\dfrac{1}{2n+5}$ уменьшается. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n+5}$ сходится. Исследуем теперь этот ряд на условную или абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда. Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+5}$. Этот ряд расходится по признаку сравнения. Действительно, сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Составим отношение членов этих рядов: $\dfrac{1}{2n+5}:\dfrac{1}{n}$ и найдём предел этого отношения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n+5}$ является условно сходящимся.

Пример 13. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{2n+3}$.

Решение. Вычислим предел $u_n=\dfrac{n+1}{2n+3}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Следовательно, числовой ряд расходится, так как не выполнено условие необходимого признака сходимости ряда.

Пример 14. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов знакопеременного ряда. Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. А так как он сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ абсолютно сходится.

7.2. Степенные ряды

Определение. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ называется степенным по степеням x.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$ является степенным по степеням $(x - x_0)$. С помощью замены $x - x_0 = x$ такой ряд сводится к ряду по степеням x.

Для любого степенного ряда существует конечное неотрицательное число R – радиус сходимости – такое, что если $R > 0$, то при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится. Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда. Если $R = +\infty$, то интервал сходимости представляет собой всю числовую прямую. Если же $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь в точке $x = 0$.

В простейших случаях интервал сходимости степенного ряда можно найти по признаку Даламбера или Коши. Для этого составим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n$ и найдём интервал, в котором этот ряд будет сходиться. Но тогда этот ряд будет сходиться абсолютно. Согласно признаку Даламбера, если $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{|u_n + 1|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x^n|} < 1$, то степенной ряд будет абсолютно сходиться для всех x, удовлетворяющих этому условию, т.е. для x, принадлежащих некоторому интервалу. За пределами этого интервала ряд будет расходиться, а на его концах, т.е. при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = 1$, требуется дополнительное исследование.

Пример 15. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

Решение. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$, где $|u_n| = \frac{|x|^n}{2n+1}$, $|u_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{2(n+1)+1} = \frac{|x|^{n+1}}{2n+3}$.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|x^{n+1}\right|(2n+1)}{(2n+3)\cdot|x|^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}|x|\dfrac{2n+1}{2n+3}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{2n}=|x|<1$.

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале (-1,1).

Чтобы решить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, положим $x=1$. Тогда получим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$. Этот ряд расходится (сравните его с гармоническим рядом).

Полагая x = -1, имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{2n+1}$, который сходится условно в силу теоремы Лейбница.

Итак, степенной ряд сходится в промежутке [-1,1).

Пример 16. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{n!}$.

Решение. Здесь

$$u_{n}=\frac{x^{n}}{n!}=\frac{x^{n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n},\ u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}.$$

Тогда получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_{n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)|x|^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=|x|\cdot 0=0.$$

Но 0<1 всегда, т.е. независимо от x. Это означает, что степенной ряд сходится независимо от x, т.е. на всей числовой прямой.

Итак, интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{n!}$ – это промежуток $(-\infty,\infty)$.

Пример 17. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^{n}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)|x|}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1).$$

Этот предел может быть меньше единицы, если только x=0 (иначе он будет равен бесконечности). Это означает, что степенной ряд сходится лишь в точке x=0.

Пример 18. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{n}}{n^{2}}$.

Решение. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x+5|^{n+1}n^2}{(n+1)^2|x+5|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+5|n^2}{(n+1)^2}=|x+5|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x+5|.$$

Этот предел будет меньше единицы, если $|x+5|<1$. Тогда $-1<x+5<1$, а $-6<x<-4$. Следовательно, степенной ряд абсолютно сходится в интервале $(-6,-4)$.

Исследуем поведение ряда на концах этого интервала, полагая х равным сначала –4, а затем –6.

Если $x=-4$, то имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+5)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Известно, что этот ряд сходится.

Если $x=-6$, то получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-6+5)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Этот ряд сходится абсолютно, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, сходится.

Таким образом, степенной ряд абсолютно сходится на отрезке [-6,-4].

7.3. Промежуточные задания

Исследовать на сходимость числовые ряды:

7.1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{5n+2}$.

7.1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+6}\right)^n$.

7.1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n}$.

7.1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^{2n}}$.

7.1.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

7.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n}$.

7.1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+1}$.

7.1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{3^{n+1}}$.

7.1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt[3]{n}}$.

7.1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременные ряды:

7.2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5+4}$.

7.2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{2n+5}\right)^n$.

7.2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+3}$.

7.2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$.

7.2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3+4n+1}$.

7.2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n^2+3}$.

7.2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

7.2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$.

7.2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{e^n}$.

7.2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,!$

Найти интервалы сходимости степенных рядов и исследовать ряд на концах интервала:

7.3.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$.

7.3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$.

7.3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n-1}$.

7.3.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+2)3^n}$.

7.3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2n+1}$.

7.3.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+4}$.

7.3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

7.3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n}$.

7.3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(4n-3)^2}$.

7.3.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

ИТОГОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Решить систему линейных уравнений двумя способами:
1) пользуясь правилом Крамера;
2) средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+z=6, \\ 2x+y+2z=6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-4y+5z=18, \\ 2x+4y-3z=26, \\ x-6y+8z=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 10x-9z=19, \\ 8x-y=10, \\ y-12z=10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y+z=-7, \\ 2x+y-z=1, \\ 3x-y+2z=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ x+5y-4z=-5, \\ 4x+y-3z=-4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$

Задача 2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

11. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

Задача 3. Даны три точки A_1, A_2, A_3. Найти: 1) длину отрезка A_1, A_2; 2) уравнение прямой A_1, A_2; 3) уравнение прямой, проходящей через точку A_3 перпендикулярно прямой A_1A_2; 4) уравнение прямой, проходящей через точку A_3 параллельно прямой A_1, A_2; 5) угол между прямыми A_1, A_2 и A_2, A_3; 6) площадь треугольника, образованного осями координат и прямой A_1, A_2; 7) расстояние от точки A_3 до прямой A_1, A_2.

21. $A_1(-8;4), A_2(4;-1), A_3(7;3)$.

22. $A_1(3;-3), A_2(-1;-6), A_3(-6;6)$.

23. $A_1(-6;5), A_2(6;0), A_3(9;4)$.

24. $A_1(2;-3), A_2(1;-4), A_3(-1;-7)$.

25. $A_1(2;-2), A_2(7;-3), A_3(5;-4)$.

26. $A_1(3;-4), A_2(-3;4), A_3(-2;2)$.

27. $A_1(-4;4), A_2(12;-1), A_3(8;2)$.

28. $A_1(0;1), A_2(1;5), A_3(4;-6)$.

29. $A_1(-1;-1), A_2(5;4), A_3(6;3)$.

30. $A_1(4;6), A_2(2;4), A_3(6;-1)$.

Задача 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4; 3) уравнение плоскости $A_1A_2A_4$; 4) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$; 5) площадь грани $A_1A_2A_4$; 6) объём пирамиды; 7) уравнение высоты, опущенной из вершины A_3 на грань $A_1A_2A_4$; 8) уравнение прямой A_1A_4; 9) уравнение прямой, проходящей через вершину A_2 параллельно ребру A_1A_4; 10) уравнение плоскости, проходящей через точку A_3 перпендикулярно ребру A_1A_4; 11) расстояние от точки A_3 до грани $A_1A_2A_4$.

31. $A_1(1;2;0), A_2(1;-1;2), A_3(0;1;-1), A_4(-3;0;1)$.

32. $A_1(1;0;2), A_2(1;2;-1), A_3(2;-2;1), A_4(2;1;0)$.

33. $A_1(1;2;-3), A_2(1;0;1), A_3(-2;-1;6), A_4(0;-5;-4)$.

34. $A_1(3;10;-1), A_2(-2;3;-5), A_3(-6;0;-3), A_4(1;-1;2)$.

35. $A_1(-1;2;4), A_2(-1;-2;-4), A_3(3;0;-1), A_4(7;-3;1)$.

36. $A_1(0;-3;1), A_2(-4;1;2), A_3(2;-1;5), A_4(3;1;-4)$.

37. $A_1(1;3;0), A_2(4;-1;2), A_3(3;0;1), A_4(-4;3;5)$.

38. $A_1(-2;-1;-1), A_2(0;3;2), A_3(3;1;-4), A_4(-4;7;3)$.

39. $A_1(-3;-5;-6), A_2(2;1;-4), A_3(0;-3;-1), A_4(-5;2;-8)$.

40. $A_1(2;-4;-3), A_2(5;-6;0), A_3(-1;3;-3), A_4(-10;-8;7)$.

Задача 5. Вычислить пределы:

41. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{2x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x}}$.

42. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^x$.

43. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}$.

44. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

45. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-64}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x-\sin 2}{x^2-4}$.

46. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos x-\cos 3}{x^2-9}$.

47. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x-6}+2}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-e^{x^2}}{x}$.

48. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}{x^3-64}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3x}\right)^x$.

49. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

50. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.

Задача 6. Найти производные функций:

51. а) $y=(x+2)\,e^{-x^2}$; б) $y=arctg\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$.

52. а) $y=xarctgx-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$; б) $y=e^{x^2 ctg 3x}$.

53. а) $y=\ln\sqrt[5]{\sin x}$; б) $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

54. а) $y=\ln arctg\sqrt{x^2+1}$; б) $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$.

55. а) $y=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$; б) $y=\ln\arcsin 5x$.

56. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$; б) $y=\dfrac{2}{3}arctg\dfrac{5tg\dfrac{x}{2}+4}{3}$.

57. а) $y=\sqrt{4-x^2+2\arcsin\dfrac{x}{2}}$; б) $y=3^{ctg\frac{1}{x}}$.

58. а) $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$; б) $y=\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$.

59. а) $y=\sqrt{\cos x}\,2^{\sqrt{\cos x}}$; б) $y=\ln\ln\left(3-2x^3\right)$.

60. а) $y=arctg\ln\dfrac{1}{x}$; б) $y=2^{\arcsin 3x}$.

Задача 7. Исследовать методами дифференциального исчисления функции и по результатам исследования построить графики этих функций:

61. $y=x+\dfrac{1}{x}$. 62. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

63. $y=\dfrac{x^4-3}{x}$. 64. $y=x^2+\dfrac{2}{x}$.

65. $y=\dfrac{x^4}{4}+x^3$. 66. $y=32x^2\left(x^2-1\right)^3$.

67. $y=\dfrac{x^3}{x+1}$. 68. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

69. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. 70. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

Задача 8. Найти частные производные $Z'x$ и $Z'y$ и полные дифференциалы функций:

71. $z=\sin xy^2$. 72. $z=\sqrt{x}\ln y$.

73. $z=tg\dfrac{x}{y}$. 74. $z=arctg\dfrac{y}{x}$.

75. $z=\ln\left(x+5y^2\right)$. 76. $z=y^{x^2}$.

77. $z=xy\cos xy$. 78. $z=x\ln\dfrac{y}{x}$.

79. $z=tg\dfrac{x+y}{x-y}$. 80. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Задача 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

81. $z = x + y$ в круге $x^2 + y^2 < 1$.

82. $z = x^2 y(2 - x - y)$ в треугольнике $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 6$.

83. $z = \dfrac{x^2}{2} - xy$ в области, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{3}$, $y = 3$.

84. $z = x^2 + xy$ в прямоугольнике $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$.

85. $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

86. $z = x^2 + y^2 + 2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

87. $z = y^2 - 4(x + y)$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

88. $z = xy^2 + 2x + 1$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

89. $z = x^2 y$ в области, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$ и $y = 0$.

90. $z = 2(x - y)^2 + y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x + y = 1$, $x - y = 1$ и $x = 0$.

Задача 10. Вычислить интегралы:

91. а) $\int (2x+1)^{100} dx$; б) $\int (4x-2)\cos x dx$.

92. а) $\int \dfrac{\sqrt{x}+1}{x} dx$; б) $\int (x+5)\sin 3x dx$.

93. а) $\int 9^{2-3x} dx$; б) $\int x\left(5x^2-7\right)^{10} dx$.

94. а) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$; б) $\int (3x-2)\cos 5x dx$.

95. а) $\int \dfrac{1+\ln x}{x} dx$; б) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$.

96. а) $\int \dfrac{2x dx}{x^2+4x+3}$; б) $\int \cos\sqrt{x}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

97. а) $\int \arcsin x dx$; б) $\int \dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$.

98. а) $\int \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$; б) $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

99. а) $\int x 2^{-x}\,dx$; б) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

100. а) $\int x(5x+11)^8\,dx$; б) $\int \ln x\,dx$.

Задача 11. Вычислить определенные интегралы:

101. $\int_1^2 (x^2+1)dx$.

102. $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$.

103. $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)dx$.

104. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$.

105. $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

106. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$.

107. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi$.

108. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

109. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2}$.

110. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Задача 12. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

111. $y=1-x^2$, $y=x^2-1$.

112. $y=\sin 2x$, $y=1$, $x=\frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

113. $y^3=x$, $y=1$, $x=8$.

114. $y=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$.

115. $y=x^2$, $y=3-2x$.

116. $y=2x-x^2$, $y=-x$.

117. $y=\frac{x^2}{3}$, $y=4-\frac{2}{3}x^2$.

118. $y=-x-x^2$, $y=x$.

119. $y=2x^2$, $y=8x$.

120. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

Задача 13. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

121. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

122. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.

123. $y'\sin x - y = \sin x \cdot \sin\frac{x}{2}$.

124. $y' = tg\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

125. $y' - 5x^4 y = e^{x^5}$.

126. $3e^x tgy\,dx + \left(1 + e^x\right)\sec^2 y\,dy = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

127. $\left(1 + e^{2x}\right)y^2\,dy = e^x dx$, $y(0) = 0$.

128. $e^x dy + ye^x dx = \sin 2x\,dx$.

129. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$.

130. $xy' = y + \sqrt{25x^2 - y^2}$.

Задача 14. Решить линейные дифференциальные уравнения второго порядка:

131. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 2y' = e^{-2x}$.

132. а) $y'' + 4y' = 0$; б) $y'' + 7y' + 20y = e^x$.

133. а) $y'' + 4y' + 10y = 0$; б) $y'' + 3y' + 2y = 5e^{5x}$.

134. а) $y'' + 7y' + 6y = 0$; б) $y'' + y' = x^2 - 1$.

135. а) $y'' + 100y = 0$; б) $y'' - 9y = e^{3x}$.

136. а) $y'' - 20y' + 19y = 0$; б) $y'' - y' + 2y = x$.

137. а) $y'' - 2\sqrt{3}y' + 7y = 0$; б) $y'' - 4y' = e^{4x}$.

138. а) $y'' + 7y' + 2y = 0$; б) $y'' + 2y' = e^{-2x}$.

139. а) $y'' + 10y' + 100y = 0$; б) $y'' - 10y' = x + 5$.

140. а) $y'' + 9y' - 10y = 0$; б) $y'' - 2y' - 3y = x^2$.

Задача 15. Исследовать на сходимость числовые ряды:

141. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2 + 5n + 1}$. 142. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}$.

143. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+4}$. 144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^3+5}$.

145. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n-4}{n!}$.

146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^2$.

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^n$.

148. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots (3n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot \ldots (5n-3)}$.

149. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3n-1}\right)^n$.

Задача 16. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следущие ряды:

151. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$.

152. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+4}{3^n}$.

153. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5n^2+4n}$.

154. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{n^2+5}$.

155. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3+4}}$.

156. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n-4}{3n+1}\right)^n$.

157. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

158. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

159. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$.

160. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-4}{n!}$.

Задача 17. Найти интервалы сходимости степенных рядов и исследовать ряд на концах интервала:

161. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{3n-2}$.

162. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n+5}$.

163. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}$.

164. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(x+5)^n$.

165. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^{2n}}{n}$.

166. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}}$.

167. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n\sqrt{n+1}}$.

168. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}(x+3)^n$.

169. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^n}{n!}$.

170. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^n}{n^2+n+1}$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ СТУДЕНТАМ

Настоящее пособие может быть использовано для всех форм обучения: дневного, заочного и дистанционного.

Студенты дистанционного обучения всех специальностей должны выполнить две контрольные работы и итоговые задания, которыми завершается изучение курса высшей математики.

Контрольные работы и итоговые задания выполняются в соответствии с приведенной ниже таблицей. Номер выполняемого варианта должен совпадать с последней цифрой учебного шифра студента.

Задачи, номера которых состоят из одного числа (например, 1, 10, 105) находятся в итоговых заданиях, а задачи с номерами из нескольких цифр – через точку (например 1.2.1.) – в промежуточных заданиях, завершающих главу, номер которой совпадает с первой цифрой номера задачи. Например, задача 3.2 находится в промежуточных заданиях к главе 3.

№ варианта	Номера задач контрольного задания					
	Контрольная работа № 1					
1	1	1.2.1	31	3.1	4.1.1	4.2.1
2	2	1.2.2	32	3.2	4.1.2	4.2.2
3	3	1.2.3	33	3.3	4.1.3	4.2.3
4	4	1.2.4	34	3.4	4.1.4	4.2.4
5	5	1.2.5	35	3.5	4.1.5	4.2.5
6	6	1.2.6	36	3.6	4.1.6	4.2.6
7	7	1.2.7	37	3.7	4.1.7	4.2.7
8	8	1.2.8	38	3.8	4.1.8	4.2.8
9	9	1.2.9	39	3.9	4.1.9	4.2.9
10	10	1.2.10	40	3.10	4.1.10	4.2.10

№ варианта	Контрольная работа № 2					
1	4.3.1	5.1.1	5.2.1	6.2.1	7.1.1	7.3.1
2	4.3.2	5.1.2	5.2.2	6.2.2	7.1.2	7.3.2
3	4.3.3	5.1.3	5.2.3	6.2.3	7.1.3	7.3.3
4	4.3.4	5.1.4	5.2.4	6.2.4	7.1.4	7.3.4
5	4.3.5	5.1.5	5.2.5	6.2.5	7.1.5	7.3.5
6	4.3.6	5.1.6	5.2.6	6.2.6	7.1.6	7.3.6
7	4.3.7	5.1.7	5.2.7	6.2.7	7.1.7	7.3.7
8	4.3.8	5.1.8	5.2.8	6.2.8	7.1.8	7.3.8
9	4.3.9	5.1.9	5.2.9	6.2.9	7.1.9	7.3.9
10	4.3.10	5.1.10	5.2.10	6.2.10	7.1.10	7.3.10

№ варианта	Итоговые задания								
1	11	21	41	51	71	81	101	121	151
2	12	22	42	52	72	82	102	122	152
3	13	23	43	53	73	83	103	123	153
4	14	24	44	54	74	84	104	124	154
5	15	25	45	55	75	85	105	125	155
6	16	26	46	56	76	86	106	126	156
7	17	27	47	57	77	87	107	127	157
8	18	28	48	58	78	88	108	128	158
9	19	29	49	59	79	89	109	129	159
10	20	30	50	60	80	90	110	130	160

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Никулина Людмила Сергеевна
Степанова Алена Андреевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка С.Ю. Заворотной

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 1.12.2005. Формат 60×84/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,75.
Уч.-изд. л. 8,8. Тираж 200 экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57