Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

**Н.Н. ОДИЯКО**
**Н.Ю. ГОЛОДНАЯ**

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

*Рекомендовано Дальневосточным региональным учебно-методическим центром (ДВ РУМЦ) в качестве учебного пособия для студентов экономических специальностей вузов региона*

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2006

ББК 22.1я3
О 42

Рецензенты: А.А. Степанова, д-р физ.-мат. наук, профессор ИМКН ДВГУ;
А.Ю. Чеботарев, д-р физ.-мат. наук, доцент ИМКН ДВГУ

**Одияко Н.Н., Голодная Н.Ю.**
О 42 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Учебное пособие. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2006. – 92 с.

ISBN 5-9739-0061-0

Учебное пособие составлено в соответствии с учебной программой и требованиями государственного образовательного стандарта к учебной дисциплине «Высшая математика». Большое число разработанных примеров по всем темам курса призвано помочь самостоятельно овладеть материалом и выполнить контрольные работы, предусмотренные учебным планом вуза для экономических специальностей. Пособие содержит традиционный материал по высшей математике, изучаемый студентами-заочниками экономических специальностей вуза на первом курсе.

Предназначено студентам-заочникам экономических специальностей для выполнения контрольных работ по высшей математике.

ББК 22.1я3

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ISBN 5-9739-0061-0

# ВВЕДЕНИЕ

Развивающаяся экономика существенно повышает требования к качеству подготовки выпускников экономических вузов. Для этого необходимо владеть современным инструментарием-методом обработки и анализа данных, основой которых являются математические дисциплины.

Основными задачами изучения дисциплины «Высшая математика» являются не только изучение современного языка математики и ознакомление с основными вычислительными приёмами, но и ознакомление с экономико-прикладными задачами курса.

Предлагаемое учебное пособие знакомит студентов с основными разделами курса высшей математики, изучаемые на первом курсе как студентами дневной, так и заочной формы обучения. При отборе материала авторы исходили из требований Государственного образовательного стандарта к учебной дисциплине «Высшая математика».

Это разделы, рассматривающие методы построения графиков функций одной и двух переменных, нахождения безусловных и условных экстремумов, методы решения дифференциальных уравнений и необходимые для этого методы интегрирования. Важны также темы линейной алгебры, необходимые для построения многих экономических моделей.

Должное внимание уделено темам, ориентированным на задачи экономического содержания (это применение понятия производной в экономике, определение кривой цены равновесия).

В работе такого объема невозможно охватить подробно весь курс высшей математики, поэтому рассмотрена только теория, необходимая для решения контрольных заданий включенных в сборник «Контрольные задания, для студентов экономических специальностей» этих же авторов.

Пособие хотя и предназначено студентам-заочникам экономических специальностей, но поможет всем самостоятельно изучающим математику освоить теоретический материал, научиться решать задачи: пособие содержит достаточное количество подробно решенных примеров и задач. Количество решенных примеров в каждой теме зависит от объема и сложности темы. При подборе примеров были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники.

Авторы надеются, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа в самостоятельной работе над предметом.

Список литературы поможет более подробно рассмотреть различные темы курса.

# 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ

## 1.1. Определители матриц

Прежде всего, напомним определения перестановки и инверсии.

Пусть E={1,2,…,n} – конечное множество из n элементов, в данном случае чисел 1,2,…,n. Элементы множества E можно записать в произвольном порядке $(i_1,i_2,\dots,i_n)$: полученный набор чисел называется *перестановкой множества E* или просто перестановкой. Всего из n элементов можно составить n! перестановок. Перестановка (1,2,3,…,n) называется главной и порядок расположения чисел в этой перестановке считается нормальным. Во всех перестановках, кроме главной, нормальный порядок распределения чисел нарушен. Пусть $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ – произвольная перестановка. Элементы $i_\alpha$ и $i_\beta$ образуют инверсию, если $i_\alpha > i_\beta$ и $i_\alpha$ стоит левее $i_\beta$. Причем $i_\alpha$ и $i_\beta$ не обязательно должны стоять рядом. Число пар $(i_\alpha, i_\beta)$ элементов перестановки, образующих инверсии, называется числом инверсий и обозначается $\mathrm{inv}(i_1,i_2,\dots,i_n)$.

***Пример 1.*** Найти число инверсий перестановки (3,1,4,2,6,5).

*Решение.* Перед 1 стоит одно число 3 – одна инверсия. Вычеркивая единицу, получаем перестановку (3,4,2,6,5). Перед 2 стоят два числа: 3,4 – две инверсии. Вычеркивая 2, получаем новую перестановку (3,4,6,5). В этой перестановке только 5 образует одну инверсию. Общее количество инверсий inv(3,1,4,2,6,5) = 4.

Перестановка называется четной, если число ее инверсий четно, и нечетной – в противном случае.

Пусть A – квадратная таблица n × n чисел, которую в дальнейшем назовем матрицей порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Составим все возможные произведения элементов матрицы A, взятых по одному в каждой строке и каждом столбце. Любое такое произведение записывается в виде $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$, где $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ некоторая перестановка вторых индексов. Сомножители в произведении составлены так, что их первые индексы образуют естественный порядок. Следовательно, таких произведений можно составить ровно n!

*Определителем* (детерминантом) порядка n квадратной матрицы называется алгебраическая сумма n! слагаемых, составленная из всевозможных произведений $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$, взятых со знаком $(-1)^{inv(j_1, j_2, \ldots, j_n)}$, где $inv(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ – число инверсий.

Принято следующее обозначение определителя

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{inv(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \qquad (1)$$

(сумма берется по всевозможным перестановкам $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$).

Рассмотрим некоторые частные случаи. При n=2 получается определитель второго порядка. Непосредственно из определителя получаем следующую формулу для вычисления определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} .$$

При n=3 получаем определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

***Пример 2.***

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \cdot 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$=-1+16+16=31$$

Таким образом, определители второго и третьего порядков удобно вычислять непосредственно по определению, используя полученные формулы. Однако для более высоких порядков такой способ вычисления определителя практически не приемлем, так как число слагаемых соответствующей алгебраической суммы становится слишком большим (так, при n=4 имеем 4!=24, при n=5 5!=120 и т.д.).

Существует несколько эффективных способов вычисления определителя более высоких порядков. Все они базируются на свойствах определителей.

**Свойства определителей**

1) определитель не изменится, если все его строки записать столбцами с теми же номерами (такая операция называется транспонированием);

2) если в определителе поменять местами две строки (два столбца), то определитель лишь изменит знак;

3) определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен нулю;

4) если все элементы одного столбца (строки) умножить на одно и то же число, то величина определителя тоже умножится на это число.

*Следствие 1.* Множитель, общий всем элементам одного столбца (строки), можно вывести за знак определителя.

*Следствие 2.* Определитель, в котором соответствующие элементы двух столбцов (строк) пропорциональны, равен нулю.

5) если все элементы некоторого столбца (строки) равны нулю, то определитель равен нулю.

6) величина определителя не изменится, если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки) умноженные на произвольное число.

7) разложение определителя по элементам строки (столбца).

Если в определителе порядка n вычеркнуть i-строку и j-столбец, на пересечении которых стоит элемент $a_{ij}$, то останется определитель порядка n-1, который называется дополнительным минором элемента $a_{ij}$ и обозначается $M_{ij}$. Алгебраическим дополнением элемента $a_{ij}$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

*Теорема 1.* Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (любого столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} \grave{a}_{11}\grave{a}_{12}\ldots\grave{a}_{1n} \\ \grave{a}_{21}\grave{a}_{22}\ldots\grave{a}_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \grave{a}_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

*Теорема 2.* Сумма произведений элементов любой строки (любого столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (другого столбца) равна нулю.

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn} = a_{1i} \cdot A_{1j} + a_{2i} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{ni} \cdot A_{nj} = 0$$

при $i \neq j$.

Объединяя теоремы 1 и 2, можем записать

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{ïðè} \quad i = j, \\ 0 & \text{ïðè} \quad i \neq j. \end{cases}$$

## Методы вычисления определителей

1. Метод понижения порядка. Метод понижения порядка определителя заключается в том, что, используя свойство 7, мы раскладываем его по элементам строки (столбца). Таким образом, вычисление опреде-

лителя порядка n сводится к вычислению нескольких определителей порядка n-1. При этом полезно, используя свойство 6, обратить в нуль все элементы соответствующей строки (столбца), кроме одного.

***Пример 1.*** Вычислить $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

*Решение.* Так как во втором столбце имеется уже один нуль, то, используя свойство 6, изменим этот столбец так, чтобы его второй и четвертый элементы стали нулями. С этой целью первую строку вычтем из второй и, умноженную на 5, прибавим к четвертой. Полученный определитель разложим по элементам второго столбца:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 1\left(-1\right)^{1+2}$$

$$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 40$$

**Методы приведения к треугольному виду**

Используя свойство 6, определитель приводят к треугольному виду, т.е. обращают в нуль все его элементы, расположенные выше или ниже его главной диагонали, т.е. ниже элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Полученный определитель равен произведению диагональных элементов.

*Замечание.* Если вместо главной диагонали рассмотреть побочную, то следует учитывать знак произведения.

***Пример 2***. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

*Решение.* Вычтем первую строку из всех остальных, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -8$$

## 1.2. Действия над матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строк и m столбцов (размера n × m)

$$A = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11}\grave{a}_{12}...\grave{a}_{1m} \\ \grave{a}_{21}\grave{a}_{22}...\grave{a}_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \grave{a}_{n1}a_{n2}...a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A=\{a_{ij}\}$ на число $\alpha$ называется матрица $\alpha A=\{\alpha \cdot a_{ij}\}$, полученная из матрицы A умножением каждого ее элемента на число $\alpha$.

*Суммой двух матриц* $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$ одинакового размера называется матрица $C=\{c_{ij}\}$ такого же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

*Произведением двух матриц* A и B называется матрица $C=\{c_{sk}\}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{sk} = a_{s1}b_{1k} + a_{s2}b_{2k} + \ldots + a_{sl}b_{lk}$$

Произведение матрицы размера n × l на матрицу размера l × n будет матрица размера m × n

$$A_{m\times l} \cdot B_{l\times n} = C_{m\times n}$$

Произведение матриц A и B определено лишь в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операций над матрицами умножения матриц:

1. $\grave{A} \cdot \hat{A} \neq \hat{A} \cdot \grave{A}$ – в общем случае умножения матриц некоммутативно.
2. $\grave{A} \cdot (\hat{A} \cdot \tilde{N}) = (\grave{A} \cdot \hat{A}) \cdot \tilde{N}$ – умножение матриц ассоциативно.
3. $\left(A^{T}\right)^{T} = A$ формула, связанная с транспонированием, следующая: $(A * B)^{T} = B^{T} * A^{T}$
4. $\grave{A} \cdot (\hat{A} + \tilde{N}) = \grave{A} \cdot \hat{A} + \grave{A} \cdot \tilde{N};\ (\grave{A} + \hat{A}) \cdot \tilde{N} = \grave{A} \cdot \tilde{N} + \hat{A} \cdot \tilde{N}$
5. A+B=B+A
6. (A+B)+C=A+(B+C)
7. A+O=O+A, где O – матрица той же размера, что и A, все элементы которой нули
8. если A, B квадратные матрицы одного порядка, то det( $\grave{A} \cdot \hat{A}$ )=det $\grave{A} \cdot$ detB

Из формулы следует, что произведение не- вырожденных матриц есть матрица невырожденная. Невырожденной называется матрица, определитель которой отличен от нуля.

*Обратная матрица.* Пусть матрица А – квадратная и невырожденная (detA≠0). Матрицей *обратной* по отношению к А называется такая матрица $A^{-1}$,что $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$, где Е – единичная матрица того же порядка $Å = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

## Методы вычисления обратной матрицы

1. *Метод присоединенной матрицы.*

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где $A_{ij}$ – алгебраические дополнения элементов заданной матрицы.

***Пример.*** Найти обратную матрицу матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

*Решение.* Вычислим detA=$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$=- $4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ =64

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы

$$A_{11} = 4 \quad A_{21} = -19 \quad A_{31} = 24$$
$$A_{12} = 8 \quad A_{22} = 10 \quad A_{32} = -16$$
$$A_{13} = 0 \quad A_{23} = 16 \quad A_{33} = 0$$

Составим присоединенную матрицу

$A^{*} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -19 & 10 & 16 \\ 24 & -16 & 0 \end{pmatrix}$, найдем $A^{*T} = \begin{pmatrix} 4 & -19 & 24 \\ 8 & 10 & -16 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{64} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -19 & 24 \\ 8 & 10 & -16 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{-19}{64} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{32} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Проверка: $A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{-19}{64} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{32} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{64} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -19 & 24 \\ 8 & 10 & -16 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{64} \cdot \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вывод: $A^{-1}$ найдена верно, так как $A * A^{-1} = E$

*2. Метод элементарных преобразований.* Элементарными преобразованиями строк прямоугольной матрицы A называются преобразования следующих типов:

- умножение любой строки на любое, отличное от нуля, число
- прибавление одной троки, умноженное на любое число, к другой строке
- перестановка строк.

*Теорема.* Если элементарные преобразования строк, которыми данная невырожденная матрица A приводится к единичной матрице, в том же порядке применить к строкам единичной матрицы, то в результате получится обратная матрица $A^{-1}$.

***Пример.*** Вычислить $A^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

*Решение.* Выпишем матрицу, состоящую из заданной и единичной:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Над строками матрицы B производим элементарные преобразования до тех пор, пока в левой ее половине получится единичная матрица. Тогда справа от черты получим искомую обратную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 26 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 32 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array}\right); \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

# 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 2.1. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные системы, а $a_{ij}$ – известные действительные числа, называемые коэффициентами системы, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – известные действительные числа – свободные члены. *Под решением этой системы* будем понимать совокупность таких значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые, будучи подставлены в систему, обращают в тождество каждое уравнение.

Если система имеет, по меньшей мере, одно решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*.

Решение системы по правилу Крамера находится по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \ldots;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель системы,

причем $\Delta \neq 0$. В противном случае правилу Крамера использовать нельзя. $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ – определители, полученные из определителя системы заменой соответственного первого, второго и так далее столбцов столбцом свободных членов.

***Пример.*** Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\quad - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

*Решение.* Составляем и вычисляем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -20\,;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -20\,;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0\,;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -20\,.$$

Составляем решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_1 = \frac{-20}{-20} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \ x_2 = \frac{0}{-20} = 0;\ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};\ \ x_3 = \frac{-20}{-20} = 1.$$

## 2.2. Решение систем линейных уравнений матричным способом

Введем следующие обозначения:

матрица системы $A = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11}\grave{a}_{12}\ldots\grave{a}_{1n} \\ \grave{a}_{21}\grave{a}_{22}\ldots\grave{a}_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \grave{a}_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$;

матрица неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$;

матрица свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

В этих обозначениях систему (1) можно записать в матричном виде A * X = B.

Рассмотрим случай, когда det A $\neq$ 0. Тогда решение системы (1) имеет вид $X = A^{-1} * B$.

## 2.3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Суть метода Гаусса заключается в том, что путем последовательных исключений неизвестных данная система преобразуется в эквивалентную ей ступенчатую или треугольную систему (метод Гаусса можно использовать и в общем случае, когда число неизвестных не совпадает с числом уравнений).

***Пример 1.*** Решить методом Гаусса систему.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ 6x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 20 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$$

*Решение.* Составляем расширенную матрицу системы (матрицу из коэффициентов и свободных членов), отделив чертой столбец свободных членов. Оперируя со строками, приведем ее к матрице, имеющей под главной диагональю все элементы, равные нулю.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 6 & 8 & -14 & 20 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & 11 & -16 & 21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Не трудно по матрице воспроизвести систему, эквивалентную заданной (действия, которые были произведены со строками матрицы, соответствуют умножению уравнений системы на некоторые числа и их суммированию). Итак, получена следующая система:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ \quad\; -x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad\quad -x_3 = -1 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $x_3 = 1$, подставляем его во второе уравнение, из которого получаем $x_2 = 2$, подставляем $x_2$ и $x_3$ в первое, получаем $x_1 = 3$.

***Пример 2.***

Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 8x_2 - 8x_3 = 18 \end{cases}$

*Решение.* Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к треугольной или ступенчатой

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & -8 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

По последней матрице воспроизводим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = x_3 + 1$; подставляем $x_2$ в первое уравнение, получаем $x_1 = 2$. Итак, $x_1 = 2$, $x_2=x_3 + 1$, где $x_3$ – любое число.

# 3. РАНГ МАТРИЦЫ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 3.1. Линейная зависимость и линейная независимость столбцов или строк. Ранг матрицы

Пусть $\overline{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $\overline{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{2} \end{pmatrix}, \ldots, \overline{a_m} = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ a_{nm} \end{pmatrix}$ – это столбцы матрицы. Высота столбцов n.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – числа, тогда выражение $\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \ldots + \alpha_m \cdot \overline{a_m}$ называется линейной комбинацией столбцов.

Столбцы называются *линейно независимыми* тогда и только тогда, когда линейная комбинация равна нулю, при всех $\alpha$ равных нулю

Столбцы называются *линейно зависимыми* в том случае, если линейная комбинация равна нулю не при всех $\alpha$ равных нулю.

Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A называется рангом этой матрицы и обозначается r(A).

Справедливо следующее утверждение: наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен рангу этой матрицы. Отметим также, что максимальное число линейно независимых строк всякой матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов, т.е. равно рангу этой матрицы.

Ранг матрицы можно вычислить несколькими способами.

*Первый способ*: переходя от вычисления миноров меньших порядков к минорам высших порядков, определяется минор $\Delta$ порядка k, отличный от нуля, далее вычисляется лишь миноры (k+1) порядка, окаймляющие минор $\Delta$. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Этот способ носит название *метода окаймляющих миноров*.

Так как при элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется, рассмотрим следующий способ нахождения ранга матрицы.

*Второй способ*. Над матрицей A выполняются элементарные преобразования, приводящие ее к трапецеидальному виду. Число ненулевых строк в приведенной матрице, очевидно, будет равно максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A т.е. ее рангу.

***Пример.*** Определить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 8 & 13 & 16\\ 1 & 0 & -7 & -14 & -17\end{pmatrix}$$

*Решение*. Сначала превращаем в нули все элементы первого столбца матрицы А., кроме первого, вычитая первую строку из третьей и четвертой, а из второй удвоенную первую. Получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -5 & -9 & -11\\ 0 & 1 & 5 & 9 & 11\\ 0 & -2 & -10 & -18 & -22\end{pmatrix}$$

Затем, прибавляя к третьей строке вторую, а из четвертой строки вычитаем удвоенную вторую, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -5 & -9 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

которая имеет две линейно независимые строки. Следовательно, ее ранг, как и ранг исходной матрицы А, равен двум.

## 3.2. Нахождение базисного минора матрицы

Минор порядка r матрицы А называется базисным, если он отличен от нуля, а все миноры (r+1)-го порядка равны нулю.

У матрицы может быть несколько базисных миноров, но все они имеют один и тот же порядок, совпадающий с рангом матрицы А. Чтобы найти базисный минор, с помощью элементарных преобразований приведем матрицу к трапецеидальному виду

$$\begin{pmatrix}* & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet\\ 0 & * & \ldots & \bullet & \bullet & \ldots & \bullet\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & * & \bullet & \ldots & \bullet\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}$$

где звездочкой отмечены ненулевые числа, а точкой произвольные числа. Тогда минор треугольного вида, у которого по диагонали звездочки, будет одним из базисных миноров. Необходимо знать на пересечении каких строк и столбцов исходной матрицы А расположен базисный минор. Для этого перед началом преобразований рядом со строками и столбцами матрицы *A* следует записывать их порядковые номера и переставлять эти номера одновременно с перестановкой соответствующих строк и столбцов.

## 3.3. Общая теория систем линейных уравнений

Рассмотрим общий случай системы m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где число уравнений m не обязательно равно числу неизвестных n.

Составим матрицу систем

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

которая состоит из коэффициентов при неизвестных системы, и расширенную матрицу

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

которая получается путем присоединения к матрице А столбца из свободных членов.

Условие совместности системы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

*Теорема Кронекера – Капелли.* Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы А равен рангу расширенной матрицы А*.

В случае совместности система имеет единственное решение, когда ранг матрицы r равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, когда этот ранг меньше числа неизвестных.

***Пример.*** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Составим матрицы A и A* и вычислим их ранги

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

r(A) =2, а r(A*) =3. Следовательно, данная система линейных уравнений не совместна.

## 3.4. Фундаментальная система решений однородной системы уравнений

Если все свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ системы линейных уравнений равны нулю, то система называется *однородной* и имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Каждое решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системы уравнений можно рассматривать как n – мерный вектор-столбец.

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Совокупность решений однородной системы уравнений

$$X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{2n} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ X_k = \begin{pmatrix} \alpha_{k1} \\ \alpha_{k2} \\ \vdots \\ \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

называется *фундаментальной системой решений*, если она линейно независима и если любое решение X этой системы является линейной комбинацией решений $X_1, X_2, \ldots, X_K$:

$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_KX_K$, где $C_1, C_2, \ldots, C_K$ – некоторые числовые коэффициенты.

*Теорема.* Если ранг матрицы однородной системы уравнений равен r, то система имеет фундаментальную систему решений, состоящую из (n-r) линейно-независимых решений.

Покажем, как находить фундаментальную систему решений.

Пусть r(A)=r, где A – матрица коэффициентов однородной системы, и предположим, что базисный минор стоит в левом верхнем углу матрицы A. Тогда, отбрасывая последние (n-r) уравнений системы (которые являются комбинацией первых r уравнений), получим следующую систему решений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -(a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n), \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = -(a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -(a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n). \end{cases} \qquad (*)$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ назовем *базисные*, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ независимыми или *свободными*. Из системы видно, что, придавая независимым неизвестным различные значения, можно определить, используя, например, правило Крамера, соответствующие значения базисных неизвестных и тем самым определить решение системы. Чтобы определить (n-r) линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему, придадим независимым неизвестным следующие наборы значений

| | $x_{y+1}$ | $x_{y+2}$ | $x_{r+3}$ | … | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 набор | 1 | 0 | 0 | … | 0 | 0 |
| 2 набор | 0 | 1 | 0 | … | 0 | 0 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| (n-r) набор | 0 | 0 | 0 | … | 0 | 1 |

Для каждого такого набора найдем из системы (*) соответствующие значения базисных неизвестных $\alpha_{ij}$ и получим следующую фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

$$\text{Õ}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \text{Õ}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \text{Õ}_{n-r} = \begin{pmatrix} \alpha_{n-r,1} \\ \alpha_{n-r,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n-r,r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

***Пример.*** Найти фундаментальную систему решений однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

*Решение.* Не трудно проверить, что ранг матрицы системы r=2, причем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных $x_2$ и $x_3$ в первых двух уравнениях $\neq 0$. Следовательно, третье уравнение можно отбросить, в качестве базисных неизвестных взять $x_2$ и $x_3$, а в качестве независимых $x_1$ и $x_4$. Систему запишем в виде

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = -x_1 + x_4 \\ -x_2 + 2x_3 = -x_1 + 3x_4 \end{cases}$$

Полагая $x_1=1$, $x_4=0$, получим решение $\text{Õ}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Полагая $x_1=0$, $x_4=1$, получим второе решение $\text{Õ}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Решения $X_1$ и $X_2$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение X этой системы есть линейная комбинация решений $X_1$ и $X_2$:

$$X = \tilde{N}_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$ где $C_1$, $C_2$ – произвольные числа.

## 3.5. Общее решение неоднородной системы уравнений

Рассмотрим снова неоднородную систему уравнений и соответствующую ей однородную систему, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

и

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

Предположим, что система уравнений (1) совместна, т.е. выполняется условие теоремы Кронекера – Капелли, и пусть r – ранг матрицы коэффициентов этой системы.

При отыскании общего решения системы уравнений (1) используют следующие результаты.

*Теорема.* Если $X_1$, $X_2$, …, $X_{n-r}$ фундаментальная система решений системы (2), а У любое решение системы (1), то $\tilde{O} = \acute{O} + \tilde{N}_1\tilde{O}_1 + \tilde{N}_2\tilde{O}_2 + \ldots + \tilde{N}_{n-r}\tilde{O}_{n-r}$ является общим решением неоднородной системы (1), где $C_1$, $C_2$, …, $C_{n-r}$ произвольные числовые коэффициенты.

Для определения частного решения У системы (1) поступаем следующим образом.

Предположим, что базисный минор стоит в левом верхнем углу матрицы системы (1). Тогда эту систему можно представить в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}\,x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ \ldots \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - (a_{rr+1}\,x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n) \end{cases} \qquad (3)$$

Полагая $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots\ x_n = 0$ и решая систему (3) относительно неизвестных $x_1$, …, $x_r$, например, по правилу Крамера, найдем решение системы (1):

$$\text{Ó} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нахождение фундаментальной системы решений однородной системы уравнений (2) описано выше.

***Пример.*** Найти общее решение неоднородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

*Решение.* Поскольку r($A$)=r(A*)=2, то фундаментальная система решений имеет вид

$$\text{Õ}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \text{Õ}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений можно привести к виду

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 1 - x_1 + x_4 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 - x_1 + 3x_4 \end{cases}$$

Полагаем $x_1 = x_4 = 0$. Тогда $x_2=0$, $x_3=1$ и $\text{Ó} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

общее решение запишем в виде $X = Y + C_1X_1 + C_2X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$

$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $C_1$, $C_2$ – произвольные постоянные.

## 3.6. Метод Жордана-Гаусса

*Жордановы исключения* (Ж.И.) являются математическим аппаратом для решения задач линейного программирования симплексным методом.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1; \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases},$$

где $m \neq n$; $m \leq n$.

Ее можно записать в виде табл. 1.

Таблица 1

| $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| … | … | … | … | … |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |

Переменная $x_j$ называется *разрешенной*, если какое-нибудь уравнение системы содержит $x_j$ с коэффициентом единица, а во все остальные уравнения переменная $x_j$ не входит.

Если каждое уравнение системы содержит разрешенную переменную, то такую систему называют разрешенной.

Не нарушая общности будем считать, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, $1 \leq r \leq m$ разрешенные, иначе их называют базисными, все остальные переменные называют свободными ($r$ – ранг матрицы системы). Чтобы найти решение разрешенной системы, надо свободным переменным придать какие-нибудь значения и вычислить значение базисных переменных. Разрешенная система всегда совместна и имеет бесчисленное множество решений.

Общим решением совместной системы уравнений, где $m \leq n$, называют равносильную ей разрешенную систему. Ее строят из исходной системы уравнений с помощью элементарных преобразований, под которыми понимаются следующие действия:

1) вычеркивание уравнения, у которого все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю;

2) умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля;

3) замена *i*-го уравнения системы уравнением, которое получается путем прибавления к нему какого-нибудь другого уравнения, умноженного на число.

Элементарные преобразования переводят данную систему в систему ей эквивалентную.

Пусть дана система линейных уравнений, записанная в табличной форме.

Таблица 2

| $x_1$ | $x_2$ | … | $x_s$ | … | $x_j$ | … | $x_n$ | … | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1s}$ | … | $a_{1j}$ | … | $a_{1n}$ | … | $b_1$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2s}$ | … | $a_{2j}$ | … | $a_{2n}$ | … | $b_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a_{k1}$ | $a_{k2}$ | … | $a_{ks}$ | … | $a_{kj}$ | … | $a_{kn}$ | … | $b_k$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | … | $a_{is}$ | … | $a_{ij}$ | … | $a_{ik}$ | … | $b_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{ms}$ | … | $a_{mj}$ | … | $a_{mn}$ | … | $b_m$ |

Возьмем любой отличный от нуля коэффициент $a_{ks} \neq 0$ .

*Шагом Ж.И.* с разрешающим элементом $a_{ks}$ называется совокупность следующих преобразований над системой записанной в табл. 2:

1) умножение *k*-й строки табл. 2 на число $1/a_{ks}$ :

Таблица 3

| $x_1$ | $x_2$ | … | $x_s$ | … | $x_j$ | … | $x_n$ | … | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1s}$ | … | $a_{1j}$ | … | $a_{1n}$ | … | $b_1$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $\frac{\grave{a}_{\hat{e}1}}{\grave{a}_{\hat{e}s}}$ | $\frac{a_{k2}}{a_{\hat{e}s}}$ | … | 1 | … | $\frac{a_{kj}}{a_{\hat{e}s}}$ | … | $\frac{a_{kn}}{a_{\hat{e}s}}$ | … | $\frac{b_k}{a_{\hat{e}s}}$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | … | $a_{is}$ | … | $a_{ij}$ | … | $a_{ik}$ | … | $b_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{ms}$ | … | $a_{mj}$ | … | $a_{mn}$ | … | $b_m$ |

прибавление к первой строке табл. 3 ее k-й строки, умноженной на ($-a_{1s}$), прибавление ко второй строке k-й строки, умноженной на ($-a_{2s}$) и т.д. После этих преобразований система (1) принимает вид:

Таблица 4

| $x_1$ | $x_2$ | … | $x_s$ | … | $x_j$ | … | $x_n$ | … | $b'_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a'_{11}$ | $a'_{12}$ | … | 0 | … | $a'_{1j}$ | … | $a'_{1n}$ | … | $b'_1$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a'_{k1}$ | $a'_{k2}$ | … | 1 | … | $a'_{kj}$ | … | $a'_{kn}$ | … | $b'_k$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a'_{i1}$ | $a'_{i2}$ | … | 0 | … | $a'_{ij}$ | … | $a'_{ik}$ | … | $b'_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $a'_{m1}$ | $a'_{m2}$ | … | 0 | … | $a'_{mj}$ | … | $a'_{mn}$ | … | $b'_m$ |

В результате шага Ж.И. с элементом $a_{ks} \neq 0$ получим систему (2), у которой переменная $x_s$ является разрешающей. Иначе, переменную $x_s$ исключили из всех уравнений, кроме k-го. Процесс последовательного исключения заканчивают после r шагов, где r – ранг матрицы системы. В результате получим разрешенную систему или общее решение системы (1).

Шаги Ж.И. легко формализуются. Пусть $a_{ks} \neq 0$ разрешающий элемент в табл. 2. Тогда k-ю строку называют разрешающей, а s-й столбец – разрешающим столбцом. Переход к таблице 4 можно осуществить следующим образом:

1) в k-й строке табл. 4 записываем элементы разрешающей строки деленные на $a_{ks}$;

2) в s-м столбце записываем нули, кроме $a'_{ks} = 1$;

3) все остальные элементы табл. 4 вычисляются по формулам

$$a'_{ij} = \frac{a_{ks} \cdot a_{ij} - a_{is} \cdot a_{kj}}{a_{ks}}, \ i = \overline{1,m}, \ i = \overline{1,n} .$$

***Пример.*** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 8; \\ x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = 4. \end{cases} .$$

Нахождение решения системы сведем в одну табл. 5. Разрешающие элементы на каждом шаге выделены жирным шрифтом.

Таблица 5

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | bi |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 6 |
| 1 | 3 | 1 | -3 | 3 | 8 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 1 | 4 |
| 0 | -2 | 1 | 2 | -4 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 4 |
| 1 | 1 | 0 | -3 | 1 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 6 |
| 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | -1/2 | -3 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | -1/2 | 1/2 | 1/2 |
| 1 | 0 | 0 | -1 | -5/2 | 7/2 |

Таким образом, общее решение будет:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \quad - x_4 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2}x_4 \quad - \frac{1}{2}x_5, \quad \Rightarrow \\ x_1 &= \frac{7}{2} \quad + x_4 \quad + \frac{5}{2}x_5 \end{aligned}$$

где $x_1$, $x_2$, $x_3$ – базисные переменные; $x_4$, $x_5$ – свободные.

Базисное решение системы получается при $x_4 = x_5 = 0$, т.е. $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 3$ или $X_1^5 = (7/2;1/2;3;0;0)$.

Чтобы найти другое базисное решение, достаточно сделать шаг Ж.И., например с элементом $a_1' = 1$.

Тогда получим:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 5/2 | 0 | 3 | 11 |

Общее решение имеет вид: $x_4 = 3 - x_3$; $x_2 = 2 - 1/2x_3 - x_5$,

$x_1 = 11 - 5/2x_3 - 3x_5$, а базисное $X_2^5 = (11;2;0;3;0)$, где базисные переменные – $x_1$, $x_2$, $x_4$, свободные $x_3$, $x_4$, т.е. в результате сделанного шага Ж.И. Переменные $x_3$, $x_4$ поменялись ролями.

## 3.7. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы

Действительным векторным пространством V называется множество, состоящее из элементов, называемых векторами, в котором определены операции сложения элементов и умножения элементов на действительное число, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\overline{\text{õ}} + \overline{\text{ó}} = \overline{\text{ó}} + \overline{\text{õ}}$ ;
2. $(\overline{\text{õ}} + \overline{\text{ó}}) + \overline{\text{z}} = \overline{\text{x}} + (\overline{\text{ó}} + \overline{\text{z}})$ ;
3. Имеется нулевой вектор 0 для которого $\overline{\text{õ}} + 0 = \overline{\text{õ}}$ для любого вектора x;
4. Для любого вектора $\overline{\text{õ}}$ существует противоположный ему вектор $\overline{\text{ó}}$ такой, что $\overline{\text{õ}} + \overline{\text{ó}} = 0$ ;
5. $1 \cdot \overline{\text{õ}} = \overline{\text{õ}}$ ;
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot \overline{\text{õ}}) = (\alpha\beta)\overline{\text{õ}}$ ;
7. $(\alpha + \beta) \cdot \overline{\text{õ}} = \alpha\overline{\text{õ}} + \beta\overline{\text{õ}}$ ;
8. $\alpha \cdot (\overline{\text{õ}} + \overline{\text{ó}}) = \alpha\overline{\text{õ}} + \alpha\overline{\text{ó}}$ .

Пусть V – действительное векторное пространство. Линейным оператором A, действующим в пространстве V, называется отображение пространства V в себя: $y = A(x), (x, y \in V)$ , удовлетворяющее условию $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$ для любых векторов $x_1, x_2 \in V$ и любых действительных чисел $\alpha, \beta$

Для задания линейных операторов используют матрицы. Пусть $e_1,\dots,e_n$ – базис пространства V. Оператор A, действуя на базисные векторы, переводит их в некоторые векторы $A(e_1)$, $A(e_2),\dots,A(e_n)$.Разложим вновь полученные векторы по базису $e_1$, $e_2,\dots,e_n$:

$$\begin{cases} A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n; \\ A(e_2) = a_{12}e_e + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Тогда матрица $\text{À}_{\text{å}} = \begin{pmatrix} \text{à}_{11} & \text{à}_{12} & \dots & \text{à}_{1n} \\ \text{à}_{21} & \text{à}_{22} & \dots & \text{à}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{à}_{n1} & \text{à}_{n2} & \dots & \text{à}_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей линейного оператора A в базисе $e_1$, …, $e_n$*. Если изменится базис, то изменится и матрица линейного оператора. Вектор $\overline{x} \neq 0$ называется *собственным* вектором действительного линейного оператора A, если $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$, где $\lambda$ – некоторое действительное число, называемое собственным числом или собственным значением оператора A.

Линейный оператор может иметь несколько собственных значений и собственных векторов, которые находятся следующим образом.

Равенство $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ перепишем в виде $(A - \lambda E)x = 0$ (здесь E единичный оператор), или в матричной форме: $(A - \lambda E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, где A – матрица оператора A, E – единичная матрица.

Матричное равенство эквивалентно следующей системе однородных линейных уравнений относительно $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + & (a_{22} - \lambda)x_2 + & \dots + & a_{2n}x_n = 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots + & (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Поскольку, согласно определению, собственный вектор отличен от нулевого, то система должна иметь ненулевое решение. А это возможно лишь тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю, т.е.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель в левой части уравнения, получим уравнение n-й степени относительно $\lambda$, называемое *характеристическим.*

Таким образом, корни характеристического уравнения и только они являются *собственными значениями* матрицы A.

Если собственные значения матрицы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены, то подставляя их значения в систему, последовательно определим *собственные векторы* $u_1, u_2, \dots, u_n$ как линейно независимые решения однородной системы.

***Пример.*** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, заданные в некотором базисе матрицей

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Решение*. Составляем характеристическое уравнение матрицы А.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 9 & 7\\ 0 & 3-\lambda & -2\\ 0 & 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Раскрывая определитель, получим уравнение: $(5-\lambda)\cdot((3-\lambda)\cdot(-1-\lambda)+4)=0$ или $(\lambda^2-2\lambda+1)\cdot(5-\lambda)=0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2}=1, \lambda_3=5$ являются собственными значениями матрицы А.

Для отыскания собственного вектора $\overline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ ,соответствующего собственному значению $\lambda_{1,2}=1$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases}4u_1+\ \ 9u_2+\ \ 7u_3=0;\\ \qquad\ \ 2u_2-\ \ 2u_3=0;\\ \qquad\ \ 2u_2-\ \ 2u_3=0.\end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 2, следовательно, из системы уравнений достаточно выписать два уравнения, например, первое и второе:

$$\begin{cases}4u_1+\ \ 9u_2+\ \ 7u_3=0;\\ \qquad\ \ 2u_2-\ \ 2u_3=0.\end{cases}$$

Затем находим $u_1=-4u_3$, $u_2=u_3$, где $u_3$ – произвольная величина, отличная от нуля.

Вектор $\overline{u}=u_3(-4;1;1)$ является решением данной однородной системы, т.е. вектор $\overline{u}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению 1. Для отыскания собственного вектора $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, соответствующего собственному значению $\lambda_3=5$,

Составим систему $\begin{cases}0\nu_1+\ \ 9\nu_2+\ \ +7\nu_3=0;\\ 0\nu_1\ \ -2\nu_2\ \ -2\nu_3=0;\\ 0\nu_1\ \ +2\nu_2\ \ -6\nu_3=0.\end{cases}$

Эта система имеет решение $\nu_2=\nu_3=0, \nu_1$-произвольное, отличное от нуля число, следовательно, вектор $\overline{\nu}=\nu_1(1,0,0)$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_3=5$.

# 4. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

## 4.1. Векторы

Если заданы координаты двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, модуль (длина) вектора $\overline{M_1M_2}$ вычисляется по формуле $\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. По этой же формуле вычисляется расстояние между точками $M_1$ и $M_2$.

*Скалярным произведением* $\bar{a} \cdot \bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\phi.$$

Отсюда, косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\phi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

*Векторным произведением* $\bar{a} \times \bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обладающий следующими свойствами:

1) длина вектора $\bar{c}$ находится как произведение длин этих векторов на синус угла между ними: $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\phi$;

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. перпендикулярен и к вектору $\bar{a}$ и к вектору $\bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку векторов.

Это последнее условие значит, что наблюдатель, стоящий на плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ так, что направление от его ног к голове совпадает с направлением вектора $\bar{c}$, видит кратчайшее вращение от направления $\bar{a}$ к направлению $\bar{b}$ совершающимся справа налево, т.е. против часовой стрелки.

*Смешанным произведением* $\overline{abc}$ векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$:

$$\overline{abc} = \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} \text{ .}$$

Если заданы координаты векторов $\bar{a} = \left(a_x; a_y; a_z;\right), \bar{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right), \bar{c} = \left(c_x; c_y; c_z\right)$, то скалярное, векторное и смешанное произведения векторов вычисляются, соответственно, по формулам:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z ; \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix};$$

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_z & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(здесь $\bar{i} = (1,0,0), \bar{j} = (0,1,0), \bar{k} = (0,0,1)$ ).

С помощью векторного произведения можно вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $S = \dfrac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$.

С помощью смешанного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ можно вычислить объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах: $V = \left|\overline{abc}\right|$, или объем пирамиды, построенной на этих векторах: $V = \dfrac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|$.

## 4.2. Прямая на плоскости

Вектор $\bar{n}$ называется *нормальным вектором* прямой l, если $\bar{n} \perp l$.

Вектор $\bar{l}$ называется *направляющим вектором* прямой l, если $\bar{l} \parallel l$.

Укажем основные уравнения прямой на плоскости и некоторые необходимые формулы для решения задач.

*Теорема*. Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению Ax + By + C = 0, где A, B, и C – некоторые числа, причем A и B не равны нулю одновременно, – прямая. Обратно, каждая прямая l задается уравнением вида: Ax + By + C = 0. Называется *общим уравнением прямой.* Нормаль: $\bar{n} = (A, B)$.

Пусть $\bar{l} = (l_1, l_2)$ – направляющий вектор прямой l, точка $M(x_0, y_0)$ лежит на прямой l. Тогда *каноническое уравнение прямой l* имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2}.$$

Пусть точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ лежат на прямой l. Тогда *уравнение прямой l проходящей через две точки* имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Пусть прямая l отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b, соответственно. Тогда *уравнение прямой l в отрезках* имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox называется угловым *коэффициентом прямой.*

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид: y=kx+b.

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z = 0$, то угол $\varphi$ между ними находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

а условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через заданную точку.

Пусть $\kappa = \mathrm{tg}\alpha, M_0 \in l, M_0(x_{0,} y_0)$, тогда уравнение прямой l имеет вид $y - y_0 = \kappa(x - x_0)$.

Если прямые $l_1$ и $l_2$ заданы уравнениями $y = \kappa_1x + b_1$ и $y = \kappa_2x + b_2$, то при $\kappa_1 = \kappa_2$ прямые параллельны, а при $\kappa_2 = -\frac{1}{\kappa_1}$ прямые перпендикулярны. Тангенс угла $\varphi$ между прямыми $l_1$ и $l_2$ вычисляется по формуле:

$$tg(l_1, l_2) = tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_{0;}\ y_0)$ до прямой Ax+By+C=0 вычисляется по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Координаты точки пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ находятся как решение системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если точка C(x, y) делит отрезок AB в отношение $\lambda$ $(\lambda = \dfrac{\text{ÀÑ}}{\text{ÑÂ}})$, то координаты точки C находятся по формулам: $x_c = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$;

$$y_c = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}.$$

***Пример.*** Даны вершины A (10; 13), B(1; 1), C(13; 6) треугольника. Тогда:

1. Длина стороны BC равна

$$|\text{ÂÑ}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(13 - 1)^2 + (6 - 1)^2} =$$
$$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

2. Площадь треугольника вычисляется по формуле: $S_\Delta = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 13 \\ 13 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 169 + 10 - 13 - 60 - 13 = 185 - 86 = 99;$$

тогда $S_\Delta = \dfrac{1}{2} * 99 = 49{,}5$ кв. ед.

3. Уравнение стороны BC составляем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x - x_B}{x_C - x_B} = \dfrac{y - y_B}{y_C - y_B}$. Тогда уравнение прямой BC будет иметь вид $\dfrac{x-1}{13-1} = \dfrac{y-1}{6-1}$, или $\dfrac{x-1}{12} = \dfrac{y-1}{5}$, или 5(x–1)=12(y–1), или 5x–12y+7=0.

4. Уравнение высоты h, проведенной из вершины A к стороне BC, составим как уравнение прямой, перпендикулярной прямой BC: уравнение прямой BC имеет вид 5x–12y+7=0 или $y = \frac{5}{12}x + \frac{7}{12}$;

$K_{BC} = \frac{5}{12}$; тогда $K_h = -\frac{1}{K_{BC}} = -\frac{12}{5}$ и уравнение высоты h:

$y - y_A = K_h(x - x_A)$ или $y - 13 = -\frac{12}{5}(x - 10)$, или 12x + 5y – 185 = 0.

5. Длину высоты найдем как расстояние от точки A до прямой BC:
$d = \frac{|5*10 - 12*13 + 7|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{99}{13}$.

6. Уравнение биссектрисы внутреннего угла B составим следующим образом: если D-точка пересечения биссектрисы со стороной AC, то $|AD| \div |DC| = |AB| \div |BC|$.

Но $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-10)^2 + (1-13)^2} =$
$= \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$

$|BC|$ = 13, тогда $\lambda = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{15}{13}$. Так как известно отношение, в котором точка D делит отрезок AC, то координаты точки D определяются по формулам: $x_D = \frac{x_A + \lambda x_C}{1+\lambda}$, $y_D = \frac{y_A + \lambda y_C}{1+\lambda}$ или $x_D = \frac{10 + \frac{15}{13}*13}{1 + \frac{15}{13}} = \frac{325}{28}$,

$y_D = \frac{13 + \frac{15}{13}*6}{1 + \frac{15}{13}} = \frac{259}{28}$, т.е. $D(\frac{325}{28}; \frac{259}{28})$. Задача свелась к составлению уравнения прямой, проходящей через точки B и D: $\frac{y-1}{\frac{259}{28} - 1} = \frac{x-1}{\frac{325}{28} - 1}$,

т.е. 7x–9y+2=0;

7. $\cos B = \frac{\overline{BC} * \overline{BA}}{|\overline{BC}| * |\overline{BA}|}$, где $\overline{BC} * \overline{BA}$ – скалярное произведение векторов $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$;

$$\overline{BC} * \overline{BA} = (12;5)*(9;12) = 12*9 + 5*12 = 168;$$

$$\cos B = \frac{168}{13*15} = 0.86, \angle B = 0.54\text{ðàä}.$$

8. Систему неравенств, определяющую множество внутренних точек треугольника найдем, подставив координаты точки А в уравнение прямой ВС, координаты точки В в уравнение прямой АС и координаты точки С в уравнение прямой АВ: уравнение прямой ВС имеет вид: 5x–12y+7=0, следовательно, 5*10–12*13+7=57–156=-99<0; уравнение прямой АС имеет вид $\frac{x-10}{13-10} = \frac{y-13}{6-13}$ или 7x+3y–109=0, следовательно, 7*1+3*1–109=-99<0; уравнение прямой АВ имеет вид $\frac{x-1}{10-1} = \frac{y-1}{13-1}$ или 4x–3y–1=0, следовательно, 4*13–3*6–1=52–19=33>0; система неравенств, определяющая множество внутренних точек треугольника имеет вид:

$$\begin{cases} 5x - 12y + 7 < 0, \\ 7x + 3y - 109 < 0, \\ 4x - 3y - 1 > 0. \end{cases}$$

## 4.3. Кривые второго порядка

*Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой *центром* окружности. Уравнение *окружности* с центром в точке $(x_0, y_0)$ и радиуса r имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

*Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная. Уравнение *эллипса* с центром в точке $(x_0; y_0)$ и полуосями a и b имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)}{b^2} = 1$.

*Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная. Уравнение *гиперболы* с центром в точке $(x_0; y_0)$ и полуосями a и b имеет вид: $\pm\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \mp \frac{(y-y_0)}{b^2} = 1$

*Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой, не проходящей через эту точку (директрисы), расположенных в той же плоскости. Уравнение *параболы* с вершиной в точке ($x_0$; $y_0$) имеет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ или $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

***Пример.*** Составить уравнение линии, для которой сумма квадратов расстояний от точки линии до точек A(-5;3) и B(2; -4) равна 65.

*Решение.* Пусть точка M(x; y) – текущая точка искомой линии, тогда, по условию, $\left|AM\right|^2 + \left|BM\right|^2 = 65$.

$$\left|AM\right|^2 = (x+5)^2 + (y-3)^2, \left|BM\right|^2 = (x-2)^2 + (y+4)^4,$$

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 + (x-2)^2 + (y+4)^2 = 65,$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 65,$$

$$2x^2 + 6x + 2y^2 + 2y = 11,$$

$$2(x^2 + 3x + \frac{9}{4}) - \frac{9}{2} + 2(y^2 + y + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} = 11,$$

$$2(x + \frac{3}{2})^2 + 2(y + \frac{1}{2})^2 = 16,$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 8.$$

Искомая линия является окружностью с центром в точке $(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ и радиуса $r = 2\sqrt{2}.$

# 5. ФУНКЦИИ ОДНОЙ И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 5.1. Определение функции

Если каждому элементу $x \in D$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y, то говорят, что задана функция y=f(x), где x называется *независимой* переменной или *аргументом*, множество D называется *областью определения функции*, а множество значений, принимаемых функцией f, называется *областью ее значений (изменения)* и обозначается буквой E.

Если функция y=f(x) осуществляет взаимно-однозначное отображение области D на область E, то можно однозначно выразить x через y: x=g(y). Последняя функция называется *обратной* по отношению к функции y=f(x). Для функции x=g(y) E является областью определения, а D-областью значений. Так как g(f(x))=x и f(g(y))=y, то функции y=f(x) и x=g(y)-взаимно обратные. Обратную функцию x=g(y) обычно переписывают в стандартном виде: y=g(x), поменяв x и y местами.

Если функция u= $\varphi(x)$ определена на области D,G – ее область значений, функция y=f(u) определена на области G, то функция y=f( $\varphi(x)) = F(x)$ называется *сложной функцией,* составленной из функций f и $\varphi$, или функцией f от функции $\varphi$. Функцию y=f( $\varphi(x)$) называют *композицией* двух функций y=f(u) и u= $\varphi(x)$ .

Функции вида y=f(x) называются *явными*. Уравнение вида F(x,y)=0 также задает, вообще говоря, функциональную зависимость между *x* и *y*. В этом случае, по определению, y является неявной функцией x. Например, уравнение $y^3 + x^3 = 8$ определяет y как неявную функцию от x.

*Графиком функции y=f(x)* называется множество точек M(x, y) плоскости OXY, координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости y=f(x). Графики взаимно обратных функций y=f(x) и y=g(x) симметричны относительно прямой y = x

К *основным элементарным функциям* относятся пять классов функций: степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические.

## 5.2. Предел последовательности, предел функции

Число $x_0$ называется пределом последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - x_0| < \varepsilon$ при n > N.

*Предел функции*. Говорят, что функция $f(x) \to A$ при $x \to x_0$ (A и $x_0$ – числа), или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$ при $0 < \left|x - x_0\right| < \delta.$

*Односторонние пределы*. Если x < $x_0$ и $x \to x_0$, то это записывается так:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

Если x > $x_0$ и $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 + 0)$

Числа $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $f(\tilde{o}_0 - 0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ называются, соответственно, *пределом слева функции f(x)* в точке $x_0$ и *пределом справа функции f(x)* в точке $x_0$ (если эти числа существуют).

Для существования предела функции f(x) при $x \to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$

Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x),$ то имеют место следующие теоремы:

1) $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) + \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x);$

2) $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x);$

3) $x_0$ $(\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)) \neq 0.$

Частое применение находят следующие пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x_0 \to 0}(1 + a)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2{,}71828\ldots$$

При вычислении пределов полезно знать, что если существует и положителен $\lim\limits_{x \to x_0} f(x),$ то $\lim\limits_{x \to x_0}\left[\ln f(x)\right] = \ln\left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right].$

*Бесконечно малые*. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,$ т.е. если $\left|x_0(x)\right| < \varepsilon$ при $0 < \left|x - x_0\right| < \delta(\varepsilon),$ то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$. Аналогично определяется бесконечно малая $\alpha(x)$ при $x \to \infty.$

Сумма и произведение ограниченного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ есть также бесконечно малые при $x \to a.$

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где C – некоторое число, отличное от нуля, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного и того же порядка; если же C=0, то говорят, что функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с функцией $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = C$, где $0 < |C| < +\infty$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется равносильными (эквивалентными) бесконечно малыми при $x \to x_0$:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Например, при $x \to 0$ имеем: $\sin x \sim x; \operatorname{tg} x \sim x; \ln(1+x) \sim x$. Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить равносильными им величинами. В силу этой теоремы при нахождении предела дроби

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

где $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$ при $x \to x_0$, в числителе и знаменателе дроби можно откидывать (или добавлять) бесконечно малые высших порядков, подобранные так, чтобы оставшиеся величины были прежними.

*Бесконечно большие.* Если для любого сколь угодно большого числа N существует такое $\delta(N)$, что при $0 < |x - x_0| < \delta(N)$ выполнено равенство $|f(x)| > N$,то функция f(x) называется бесконечно большой при $x \to x_0$.

Аналогично определяется бесконечно большая *f(x)* при $x \to \infty$. Подобно тому, как это сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

## 5.3. Непрерывность функции в точке

Функция y = f(x)называется *непрерывной* при $x = x_0$ (в точке $x_0$), если:

1) функция f(x) определена в точке $x_0$ и ее окрестности;
2) существует конечный предел функции f(x) в точке $x_0$;

3) этот предел равен значению функции в точке $x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если положить, $x = x_0 + \Delta x$ то условие непрерывности будет равносильно условию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

## 5.4. Теоремы о непрерывных функциях

Рассмотрим функции, непрерывные на отрезке.

1. Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

2. Сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

3. Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

4. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция, непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не равен нулю.

*Следствие.* Дробно-рациональная функция $R(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$ непрерывная всюду, за исключением тех значений x, в которых знаменатель равен нулю.

5. Непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.

6. Теорема о непрерывной обратной функции.

Если функция $y=f(x)$ непрерывная и строго монотонна (строго возрастает или строго убывает) на промежутке $[a, b]$, то существует однозначная обратная функция $x = \varphi(y)$, определенная на отрезке $[f(a), f(b)]$, причем $x = \varphi(y)$ непрерывна и монотонна в том же смысле.

## 5.5. Классификация точек разрыва функции

Точка, в которой нарушается хотя бы одно из условий непрерывности функции, называется *точкой разрыва* этой функции.

Точка $x_0$ называется *точкой разрыва 1-го рода* (устранимого разрыва функции) если $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) \neq f(x_0)$ или, если $f(x_0)$ не существует.

Точка $x_0$ разрыва функции f(x) называется *точкой разрыва 1-го рода (скачком),* если существуют односторонние пределы функции $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$; $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, неравные между собой.

Величина $h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции.*

Все остальные точки разрыва называются её *точками разрыва 2-го рода.*

*Замечание.* Важное значение имеют точки бесконечного разрыва, для которых существуют односторонние пределы и хотя бы один из них является бесконечным. В этом случае прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Функция, допускающая на отрезке лишь конечное число точек разрыва 1-го рода, называется *кусочно-непрерывной на этом отрезке* (в точках разрыва функция может быть не определена).

***Пример.*** Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{åñëè } -\infty < x \leq 0 \\ (x-1)^2, \text{åñëè } 0 < x \leq 2 \\ 5 - x, \text{åñëè } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

*Решение.* Функция f(x) определена и непрерывна на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$ где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Для точки $x_1 = 0$ имеем:

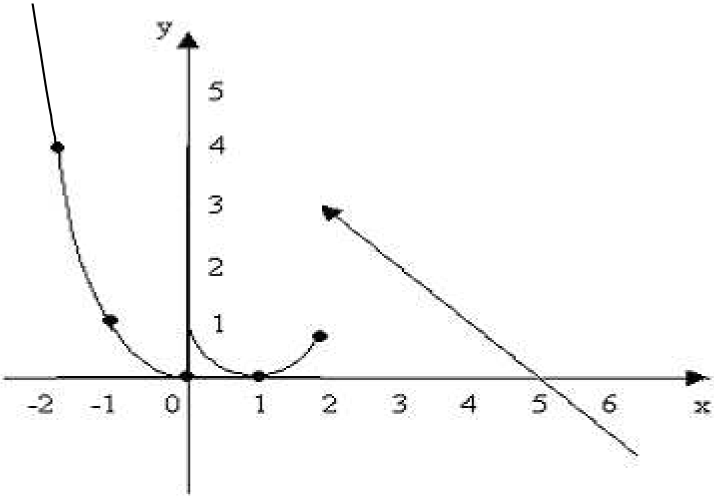
$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x-1)^2 = 1, \quad f(0) = x^2 \Big|_{x=0} = 0,$$

т.е. функция f(x) в точке $x_1 = 0$ имеет разрыв первого рода.

Для точки $x_2 = 2$ находим:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x-1)^2 = 1,$$
$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (5 - x) = 3,$$
$$f(2) = (x-1)^2 \Big|_{x=2} = 1,$$

т.е. в точке $x_2 = 2$ функция также имеет разрыв первого рода.




## 5.6. Производная и дифференциал

*Производной функции* y=f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Функция, имеющая конечную производную, называется *дифференцируемой*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если u, v, w – дифференцируемые функции от x, а c – постоянная величина, то имеют место следующие основные *правила дифференцирования:*

$$\tilde{n}' = 0 \ \ (c - \text{const});$$

$$(u - v + w) = u' - v' + w';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}; \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Если приращение функции y = f(x) от независимой переменной x может быть представлено в виде $\Delta y = A(x)\cdot dx + o(dx)$, где dx = Δx, то линейная часть этого приращения называется *дифференциалом* функции y: dy=A(x)dx.

Для существования дифференциала функции y =f(x) необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y' = f'(x)$ причем имеем: dy= $y'$ dx.

Формула сохраняет свою силу и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (свойство инвариантности первого дифференциала).

## 5.7. Таблица производных основных элементарных функций

| | |
|---|---|
| $\left(x^{\alpha}\right)=\alpha\cdot x^{\alpha-1};$ | $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}};$ |
| $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}};$ | $x'_x=1;$ |
| $(\sin x)'=\cos x;$ | $(\cos x)'=-\sin x;$ |
| $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^{2}x};$ | $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x};$ |
| $(a^{x})'=a^{x}\ln a;$ | $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};$ |
| $(e^{x})'=e^{x};$ | $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};$ |
| $(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x}\log_{a}e=\dfrac{1}{x\ln a};$ | $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}};$ |
| $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$ | $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}.$ |

## 5.8. Производная сложной функции

Если y=f(z) и $z=\varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то *производная сложной функции* ó $= f\left[\varphi(x)\right]$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу z на производную промежуточного аргумента z по независимой переменной x:

$$\text{ó}'_x = \text{ó}'_x \cdot z'_x \ \text{ или } \frac{d\text{ó}}{dx} = \frac{d\text{ó}}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

В частности, предыдущие формулы примут вид:

$$\left(z^\alpha\right)' = \alpha \cdot z^{\alpha-1} \cdot z'; (\sqrt{z})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{z}} \cdot z'; (\sin z)' = \cos z \cdot z'; (\cos z)' = -\sin z \cdot z';$$

$$(\mathrm{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z} \cdot z'; (\mathrm{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z} \cdot z'. \ \text{ и т.д.}$$

***Примеры:***

1. $(\cos x^3)'_x = (\cos x^3)' \cdot (x^3)'_x = -\sin x^3 \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin x^3.$

2. $y = \sqrt{x^2 + 4x + 2}$

$$y'_x = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+2}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}}.$$

3. $y = x^2 \sin^2 x^2.$

$$y' = (x^2 \sin^2 x^2)' = (x^2)' \sin^2 x^2 + x^2 (\sin^2 x^2)' = 2x \sin^2 x^2 + x^2 2 \sin x^2 \cos x^2 2x =$$
$$= 2x \sin^2 x^2 + 2x^3 \sin 2x^2 = 2x(\sin^2 x^2 + x^2 \sin 2x^2).$$

4. $(e^{\sin^2 x})' = e^{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x.$

5. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$

$$y' = (\arcsin x + \sqrt{1-x^2})' = (\arcsin x)' + (\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

*Логарифмической производной функции* y = f(x) называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$(\ln f(x))' = f'(x)/f(x).$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют *логарифмическим дифференцированием*. В некоторых случаях предварительное логарифмирование функции упрощает нахождение ее производной. Например, при нахождении производной функции $y = u^v$, где u = u(x) и v = v(x) предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Если зависимость между переменными y и x задана в неявном виде уравнением F(x, y) = 0 то для нахождения производной $y' = y'_x$ в простейших случаях достаточно продифференцировать обе части уравнения F(x, y) = 0 считая $y$ функцией от x, и из полученного уравнения, линейного относительно $y'$, найти производную.

***Пример.*** Найти производную функции $y'$, если $x^3 + y_3 - 3xy = 0$.

Дифференцируем обе части данного уравнения, считая y функцией от x:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0.$$

Отсюда находим

$$y' = (3x^2 - 3y)/(3x - 3y^2).$$

## 5.9. Производные высших порядков

*Производной второго порядка или второй производной функции* y = f(x) называется производная от ее первой производной, т.е. $(y')'$.

Обозначается вторая производная одним из следующих символов: $y''$, $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Если s = s(t) – закон прямолинейного движения материальной точки, то $s' = \frac{ds}{dt}$ – скорость, а $s'' = \frac{d^2s}{dt^2}$ – ускорение этой точки.

Если зависимость функции y от аргумента x задана в параметрическом виде уравнениями x = x(t), y = y(t) то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\cdot\frac{1}{x'},$$

где штрих обозначает производную по t.

*Производной n-го порядка функции* y = f(x) называется производная от производной (n-1)-го порядка данной функции. Для n-й производной употребляются следующие обозначения: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$. Таким образом,

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

***Пример 1.*** Найти производную второго порядка функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

*Решение:*

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot (1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}) =$$

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

$$y'' = -\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$$

***Пример 2.*** Вычислить значения первой и второй производных функции $y = (2x-1)^4$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

*Решение:*

Находим первую производную: $y' = 8(2x-1)^3$. При x = 1 имеем $y'(1) = 8$, а при x = –1 $y'(-1) = -216$.

Далее, $y'' = 48(2x-1)^2$, $y''(1) = 48$, $y''(-1) = 432$.

## 5.10. Исследование поведения функций и построение их графиков

Одной из важнейших прикладных задач дифференциального исчисления является *разработка общих приемов исследования поведения функций.*

Функция y = f(x) называется *возрастающей (убывающей) в некотором интервале*, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Перечислим *признаки возрастания (убывания) функции.*

1. Если дифференцируемая функция y = f(x) на отрезке [a, b] возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке положительна (отрицательна), т.е. $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$.

2. Если непрерывная на отрезке [a, b]и дифференцируемая внутри него функция имеет положительную (отрицательную)производную, то она *возрастает (убывает)* на этом отрезке.

Функция y = f(x) называется *неубывающей (невозрастающей) в некотором интервале,* если для любых $x_1 < x_2$ из этого интервала $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Интервалы, в которых функция убывает или возрастает, называются *интервалами монотонности функции.* Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках ее области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки, в которых первая производная обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими.*

Точка $x_1$ называется *точкой локального максимума* функции $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ выполняется неравенство $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$. Точка $x_2$ называется *точкой локального минимума* функции $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$справедливо неравенство $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$. Точки максимума и минимума называют *точками экстремума* функции, а максимумы и минимумы функции – ее *экстремальными значениями*.

*Теорема 1*. (необходимый признак локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

В точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Для отыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в них нет.

*Теорема 2*. (первый достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки $x_0$). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x \to x_0$ $f'(x)$ положительна, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет минимум. Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то при $x = x_0$ данная функция имеет максимум.

Следует иметь в виду, что указанные неравенства должны выполняться в достаточно малой окрестности критической точки $x = x_0$.

*Теорема 3* (второй достаточный признак локального экстремума функции). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0) = 0$. Тогда в точке $x = x_0$ функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0) < 0$, и локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$.

В случае, когда $f''(x_0) = 0$, то точка $x = x_0$ может и не быть экстремальной.

*Теорема Вейерштрасса.*

Непрерывная на отрезке [a, b] функция $y = f(x)$ может достигать наименьшего ($y_{наим}$) или наибольшего ($y_{наиб}$) значении либо в критических точках функции, лежащих в интервале (a, b), либо на концах отрезка [a, b].

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется *выпуклой в интервале* (a, b), если все ее точки кривой лежат не выше любой ее касательной в этом интервале, и *вогнутой* в интервале (a, b), если все ее точки лежат не ниже любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой*. Предполагается, что в точке M существует касательная.

*Теорема 4* (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции y = f(x) отрицательна (положительна), т.е. $f''(x) < 0 (f''(x) > 0)$, то кривая y = f(x) в этом интервале выпукла (вогнута).

В точке перегиба, отделяющей промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции изменяет свой знак, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

*Теорема 5* (достаточный признак существования точки перегиба). Если в точке $x = x_0$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ кривой y = f(x) – точка перегиба.

Прямая L называется *асимптотой данной кривой* y = f(x), если расстояние от точки M кривой до прямой L при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Из определения следует, что асимптоты могут существовать только у кривых, имеющих сколь угодно далекие точки («неограниченные» кривые).

Если существуют числа $x = x_i (i = \overline{1, n})$, при которых $\lim\limits_{x \to x_i} f(x) = \pm\infty$, т.е. функция имеет бесконечные разрывы, то прямые $x = x_i$ называются *вертикальными асимптотами* кривой y = f(x). Если существуют пределы $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx),$ то прямые y = kx + b – наклонные асимптоты кривой y = f(x) (при k = 0 – горизонтальные). При $x \to \pm\infty$ можем прийти к двум значениям для k. Если имеем одно значение для k, то при $x \to \pm\infty$ можем получить два значения для b.

## 5.11. Схема полного исследования функции и построение ее графика

Для полного исследования функции и построения ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

1. Указать область определения функции.
2. Найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика с осями координат и вертикальные асимптоты (если они существуют).
3. Установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции.
4. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
5. Определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
6. Найти невертикальные асимптоты графика функции.
7. Произвести необходимые дополнительные вычисления.
8. Построить график функции.

***Пример.*** Провести полное исследование функции $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$ и построить ее график.

Воспользуемся рекомендуемой схемой.

1. Данная функция определена для всех $x \in R$ .

2. Функция не имеет точек разрыва и, следовательно, график не имеет вертикальных асимптот и пересекает ось Ох при х = –3 и х = 0, а ось Оу – при у = 0.

3. Функция не является четной, нечетной, периодической.

4. Находим производную функции:

$$f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}};$$

$f'(x)=0$ при $x_1$ = –2 и не существует в точках $x_2$ = –3, $x_3$ = 0. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы (–∞, 3), (–3, –2), (–3, –2), (–2, 0), (0, +∞). Внутри каждого из полученных интервалов сохраняется знак производной, а именно: $f'(x)>0$ в интервалах (–∞, 3), (–3, –2), (0, +∞) и $f'(x)<0$ в (–2, 0). Это означает, что функция возрастает в интервале (–∞, –2), убывает в интервале (–2, 0)и возрастает в интервале (0, +∞). Так как в окрестности точки $x_1$ = –2 знак первой производной при увеличении х изменяется с «+» на «–», то $x_1$ = –2 является точкой максимума, $y_{max}=\sqrt[3]{4}$ . Для точки $x_3$ = 0 знак первой производной изменяется с «–» на «+», т.е. $x_3$ = 0 – точка минимума, $y_{min}$ = y(0) = 0. В точке $x^2$ = –3 функция не имеет экстремума, тат как в ее окрестности $f'(x)$ не меняет знака.

5. Находим вторую производную:

$f''(x)=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$, которая не равна нулю для любого конечного х. Поэтому точками перегиба могут быть только те точки кривой, в которых вторая производная не существует, т.е. $x_2$ = –3 и $x_3$ = 0. Определим знак $y''$ в каждом из интервалов, на которые найденные точки разбивают область определения функции: $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;-3)$, следовательно, кривая при $x\in(-\infty;-3)$ вогнута; $f'(x)<0$ при $x\in(-3;0)\cup(0;+\infty)$ , следовательно, на промежутках (–3; 0) и (0; +∞) кривая выпукла. Так как в окрестности точки $x_2$ = –3 вторая производная меняет знак, то точка М(–3; 0) является точкой перегиба. Точка $x_3$ = 0 не является точкой перегиба, так как в ее окрестности знак $f''(x)$ не меняется.

6. Вертикальных асимптот нет, так как данная функция не имеет бесконечных разрывов. График функции имеет невертикальную асимптоту

y = kx + b, если существуют пределы для k и b, указанные в правиле нахождения наклонной асимптоты. Вычислим их для данной функции:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x)(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2)}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2}$$

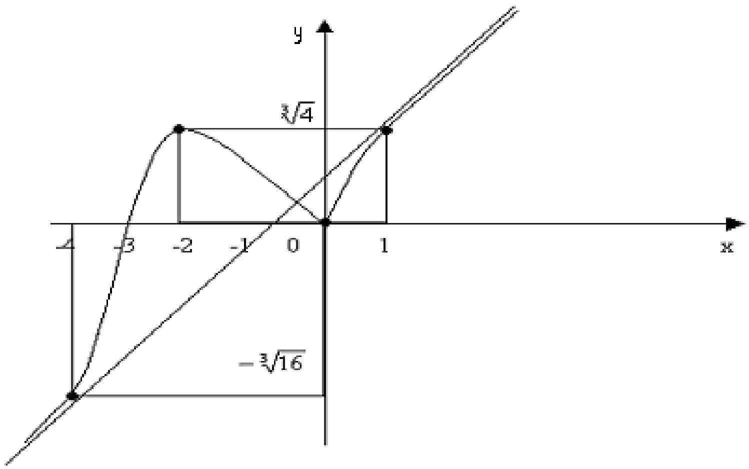
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{1+6/x+9/x^2}+\sqrt[3]{1+3/x}+1}=1.$$

Получили уравнение наклонной асимптоты: y = x + 1.

7. Прежде, чем строить график функции, целесообразно установить угол $\alpha$, под которым кривая пересекает ось абсцисс в точках $x_2 = -3$ и $x_3 = 0$. В этих точках $y'=\mathrm{tg}\alpha=\infty$ и $\alpha=\pi/2$. Так как в точке $x_3 = 0$ функция достигает нулевого минимума, то ее график не расположен ниже оси Ox в окрестности этой точки. Точка $x_3 = 0$ является точкой возврата графика функции.

9. По результатам исследования строим график функции.



## 5.12. Практические задачи на экстремум

***Пример.*** Каковы должны быть размеры (радиус основания R и высота H) открытого сверху цилиндрического бака максимальной вместимостью, если для его изготовления отпущено $S = 27\pi \approx 84{,}82$ м$^2$ материала?

*Решение.* Вместимость бака $V = \pi R^2 H$, а на его изготовление пойдет материал площадью $S = \pi R^2 + 2\pi RH$. Отсюда определяем высоту бака

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}.$$

Тогда вместимость бака

$$V = \pi R^2 \frac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \frac{SR - \pi R^3}{2} = V(R).$$

Найдем то значение R, при котором вместимость V(R) будет максимальной. Имеем:

$V' = \frac{1}{2}(S - 3\pi R^2)$, тогда $V' = 0$, если

$S - 3\pi R^2 = 0$, при этом $R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \sqrt{\frac{27\pi}{3\pi}} = 3$ì .

Так как $V'' = -3\pi R < 0$ для всех R>0, то при найденном значении R = 3 вместимость бака будет максимальной.

Высота бака находится из полученного выше соотношения:

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \frac{S - \pi \frac{S}{3\pi}}{2\pi\sqrt{S/(3\pi)}} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = 3\text{ì}\ .$$

*Ответ:* R=H=3см.

***Пример 2.*** Сечение оросительного канала имеет форму равнобокой трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона $\alpha$ боковых сторон этой трапеции сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

*Решение.* Определим площадь сечения канала как функцию угла $\alpha$, считая, что боковые стороны и меньшее основание трапеции равны a. Тогда, как видно из рисунка

$$S = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |CE| = \frac{2a + 2a\cos\alpha}{2} a \sin\alpha =$$
$$= a^2(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha).$$

Исследуем S как функцию аргумента $\alpha$ на экстремум. Имеем:

$$S' = a^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha).$$

В критических точках $S' = 0$, т.е.

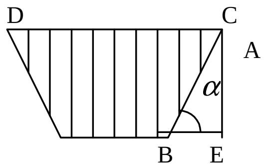
$\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0,\ \ 2\cos(3\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2) = 0.$

Так как $0 < \alpha < \pi/2$, то $\cos(\alpha/2) \neq 0$. Поэтому, если $\cos(3\alpha/2) = 0$, то $3\alpha/2 = \pi/2$ или $\alpha = \pi/3$.

Докажем, что при $\alpha = \pi/3$ функция S достигает наибольшего значения на отрезке $[0;\ \ \pi/2]$. Действительно,

$$S'' = a^2(-\sin\alpha - 2\sin 2\alpha),\ \ S''(\frac{\pi}{3}) = a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) = -a^2\,\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Поэтому при $\alpha = \pi/3$ имеем локальный максимум $S(\pi/3) = S_{max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, который на отрезке $[0;\ \ \pi/2]$ будет также наибольшим значением функции S, поскольку S(0) = 0, $S(\pi/2) = a^2 < S_{max}$.




## 5.13. Неопределенный интеграл и его свойства

*Первообразной функцией* для функции f(x) на данном промежутке называется такая функция F(x), производная которой равна данной функции на этом промежутке, т.е. $F'(x) = f(x)$.

*Неопределенным интегралом* от непрерывной функции f(x) на данном промежутке или от дифференциального выражения f(x)dx называется общее выражение для всех первообразных функций функции f(x).

*Обозначение:* $\int f(x)dx = F(x) + C,$ где $F'(x)$=f(x). Функция f(x) называется *подынтегральной функцией*, а выражение f(x)dx – *подынтегральным выражением.*

**Свойства неопределенного интеграла**

1. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x), d\int f(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$

3. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, (c - const).$

4. $\int [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$

**Таблица простейших неопределенных интегралов**

$$\int kdx = kx + C;$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, (m \neq -1);$$

$$\int 0 \cdot dx = C;$$

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C = -arcctgx + C;$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

## 5.14. Интегрирование разложением

Метод разложения основан на свойстве 4 неопределенного интеграла. Если f(x)=$f_1$(x)–$f_2$(x)+$f_3$(x), то $\int f(x)dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$

***Примеры.***

1. $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2}dx.$

Разделив почленно числитель на знаменатель, пользуясь свойствами 3 и 4, находим:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2}dx = \int (x^2 - 2x + 3)dx = \int x^2 dx - 2\int xdx + 3\int dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C.$$

2. $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx.$

Прибавляя и вычитая единицу из $x^4$, получаем:

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2dx} = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \int (x^2-1)dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^2dx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^3}{3} - x + \mathrm{arctg}x + C.$$

## 5.15. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента функции

Если $F(x) = \int f(x)dx, F'(x) = f(x),$ то $F(u) = \int f(u)du,$ где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от x. На ее основании получаем:

При пользовании формулами необходимо иметь в виду *простейшие преобразования дифференциала:*

1. $dx = d(x+b),$ где b – постоянная величина.
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax),$ где a – постоянная, $a \neq 0.$
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b),$ где a – постоянная, $a \neq 0.$
4. $\varphi'(x)dx = d\varphi(x).$

*Например:*

1. $\int (2x+3)^2 dx = \int (2x+3)^2 \frac{1}{2} d(2x+3) = \frac{1}{2}\int (2x+3)^2 d(2x+3) =$

$= \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^3}{3} + C = \frac{1}{6}(2x+3)^3 + C.$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx.$

Так как

$$d(x^2+3x+5) = (x^2+3x+5)' dx = (2x+3)dx,$$

то

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx = \int \frac{d(x^2+3x+5)}{x^2+3x+5} = \ln(x^2+3x+5) + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}.$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \int \frac{\frac{1}{3}d(3x)}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 3x + C.$$

## 5.16. Метод подстановки

Интегрирование путем *введения новой переменной* (метод подстановки) основано на формуле $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция переменной t.

***Пример 1.*** Найти интеграл $\int xe^{x^2} dx.$

*Решение:*

Положим $x^2 = t$, тогда $2xdx=dt$, $xdx = \frac{dt}{2}$. Подставляя полученные выражения в подынтегральное выражение, получим $\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}xdx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

Этот пример можно решить и по-другому:

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}xdx = \int e^{x^2}\frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

***Пример 2 .*** Найти интеграл: $\int x\sqrt{x-2}dx.$

*Решение:*

Чтобы избавиться от корня, положим, $\sqrt{x-2}=t.$ Возводя в квадрат это равенство, найдем x:

$x = t^2 + 2$, откуда $dx=2tdt$. Подставляя полученные выражения в подынтегральное выражение, находим

$$\int x\sqrt{x-2}dx=\int(t^2+2)t2tdt=\int(2t^4+4t^2)dt=2\int t^4dt+4\int t^2dt=$$

$$=2\frac{t^5}{5}+4\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

***Пример 3.*** Найти интеграл $\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx.$

*Решение:* Положим

$\sqrt{1+4\sin x}=t,$ откуда

$$1+4\sin x=t^2, 4\cos xdx=2tdt, \cos xdx=\frac{1}{2}tdt.$$

Следовательно,

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx=\int\frac{\frac{1}{2}tdt}{t}=\frac{1}{2}\int dt=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x}+C.$$

***Пример 4.*** Найти интеграл $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx.$

*Решение:*

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x+2}{(x^2+2x+1)+4}dx=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+4}dx=$$

$$=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+2^2}d(x+1)+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[(x+1)^2+2^2\right]}{(x+1)^2+2^2}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\ln\left[(x+1)^2+2^2\right]+\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

***Пример 5.*** Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$

*Решение:*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x+4-4-5)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2+9}}=$$

$$=\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

***Пример 6.*** Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$.

*Решение:*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-6x+9)-9+3}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-6}}=$$

$$=\ln\left|(x-3)+\sqrt{(x-3)^2-6}\right|+C=$$

$$=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+3}\right|+C.$$

## 5.17. Метод интегрирования по частям

Если $u=\varphi_1(x), v=\varphi_2(x)$ – дифференцируемые функции от *x*, то из формулы для дифференциала произведения двух функций d(uv)=udv+vdu получается *формула интегрирования по частям* $\int udv=uv-\int vdu.$

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет собой произведение алгебраической и трансцендентной функций.

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить *v* путем интегрирования.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к табличному формула применяется несколько раз. Иногда искомый интеграл определяется из алгебраического уравнения, получающегося с помощью интегрирования по частям.

*Найти интегралы:*

1. $\int x\sin xdx.$

Обозначим: $x=u, \sin xdx=dv.$

Для применения формулы необходимо знать еще v и du. Дифференцируя равенство x = u, получаем du = dx. Из того, что dv=sinxdx=d(-cosx), определяем v=-cosx.

Подставляя значения u,v,du,dv в формулу интегрирования по частям, находим

$$\int x\sin x dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C = \sin x - x\cos x + C.$$

2. $\int \arcsin x dx.$

Полагая $u = \arcsin x, dv = dx,$

определяем $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, v = x.$

$$\int \arcsin x \cdot dx = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

Следовательно, $= x\arcsin x + \dfrac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) =$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

## 5.18. Вычисление определенного интеграла, геометрические приложения определенного интеграла

*Теорема Ньютона-Лейбница.*

Определенный интеграл от непрерывной в данном промежутке функции равен разности значений любой первообразной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

*Замена переменной* в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_b^a f(x)dx = \int_\beta^\alpha f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t), a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta); t-$ новая переменная; $\alpha, \beta -$ новые пределы интегрирования.

*Интегрирование по частям* в определенном интеграле осуществляется по формуле:

$$\int_b^a u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

или

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

*Площадь криволинейной трапеции* ограниченной сверху графиком непрерывной кривой y=f(x), слева и справа, – соответственно, прямыми x=a, x=b, снизу – осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ или } S = \int_a^b ydx.$$

*Площадь криволинейной фигуры*, ограниченной сверху и снизу соответственно кривыми $y_1=f_1(x)$,$y_2=f_2(x)$, слева и справа – прямыми x=a, x=b, определяется формулой

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \text{ или } S = \int_a^b (y_1 - y_2)dx.$$

***Пример.*** Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y=x^2$, $y^2=x$.

Решая совместно систему уравнений $y=x^2$, $y^2=x$, находим абсциссы точек пересечения данных кривых: $x_1=0$, $x_2=1$. Следовательно, пределы интегрирования будут: a=0, b=1.

Искомую площадь вычисляем по формуле:

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \text{ или } S = \int_a^b (y_1 - y_2)dx.$$

$$y_1 = \sqrt{x}, y_2 = x^2, \text{ т.к. при } x \in [0;1] \ \sqrt{x} \ge x^2.$$

$$S = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$\left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{X^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

*Длина дуги* кривой y=f(x), где $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx \text{ или } l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Вычислим длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$, отсекаемой прямой x=5.

Указанная дуга состоит из двух частей, симметричных относительно оси Ox. Вычислим длину одной из них. Находя производную функции $y^2=x^3$ и подставляя ее в формулу, получим

$$\frac{1}{2}l=\int_0^5\sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{1}{2}\int_0^5\sqrt{4+9x}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\int_0^5(4+9x)^{\frac{1}{2}}d(4+9x)=$$

$$=\frac{1}{18}\frac{(4+9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5=\frac{1}{27}(4+9x)\sqrt{4+9x}\Bigg|_0^5=\frac{1}{27}(49\cdot7-4\cdot2)=\frac{335}{27},$$

$$l=\frac{670}{27}=24\frac{22}{27}.$$

*Объем тела,* полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой y=f(x), справа и слева прямыми x=b и x=a, снизу осью Ох, вычисляется по формуле

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx \text{ или } V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

***Пример:***

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой xy=4, прямыми x=1, x=4 и осью Ох.

Из условия вытекает, что a=1,b=4. Из уравнения кривой xy=4 находим $y=\frac{4}{x}$, откуда $y^2=\frac{16}{x^2}$. *Следовательно,*

$$V_x=\pi\int_1^4 y^2dx=\pi\int_1^4\frac{16}{x^2}dx=16\pi\int_1^4\frac{dx}{x^2}=-16\pi\frac{1}{x}\Bigg|_1^4=-16\pi(\frac{1}{4}-1)=12\pi.$$

## 5.19. Функции нескольких переменных

Переменная величина z называется *функцией двух переменных величин x и y,* если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве.

Значение функции z=f(x;y) при x=a, y=b обозначается через f(a;b).

Совокупность всех точек (x;y), в которых определена функция нескольких переменных, называется *областью существования* или *областью определения функции.*

*Частной производной функции нескольких переменных* по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных z=f(x;y) по определению имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x;y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$ (частная производная по x),

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x;y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$ (частная производная по y).

При нахождении *частной производной* пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

*Полным дифференциалом* функции z=f(x;y) называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

*Полный дифференциал* функции z=f(x,y) вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Функция, имеющая полный дифференциал, называется *дифференцируемой.*

Из формулы $\Delta z = dz + \varepsilon \cdot (\rho); \varepsilon \to 0$, когда $\rho \to 0$ $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, следует, что $\Delta z \approx dz$ или

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

*Частными производными второго порядка* функции z=f(x,y) называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Обозначения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Употребляются и другие обозначения:

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Если смешанные производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ непрерывны, то результаты дифференцирования не зависят от порядка дифференцирования, т.е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

*Полный дифференциал второго порядка* имеет вид:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

***Пример:***

Найти частные производные второго порядка функции $z = (x^2 + y^2)^2$.

*Решение:* Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_x = 2(x^2 + y^2)2x = 4x^3 + 4xy^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_y = 2(x^2 + y^2)2y = 4x^2y + 4y^3.$$

Дифференцируя каждую из полученных функций по x и по y, получим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3 + 4xy^2) = (4x^3 + 4xy^2)'_x = 12x^2 + 4y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (4x^2y + 4y^3)'_y = 4x^2 + 12y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (4x^3 + 4xy^2)'_y = 8xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (4x^2y + 4y^3)'_x = 8xy.$$

Как и следовало ожидать,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

## 5.20. Экстремум функции нескольких переменных

*Максимумом (минимумом)* функции z=f(x,y) называется такое её значение $f(x_0, y_0)$, которое больше (меньше) всех других значений, принимаемых ею в точках, достаточно близких к точке $M_0(x_0, y_0)$ и отличных от неё.

Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума.*

Экстремум функции нескольких переменных может достигаться лишь в точках, лежащих внутри ее области определения, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль. Такие точки называются критическими. Для функции двух переменных z=f(x,y) критические точки находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0; \\ f'_y(x,y)=0. \end{cases}$$

Эти условия являются *необходимыми условиями* существования экстремума. *Достаточные условия экстремума* для функции z=f(x,y) выражаются с помощью определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2,$$

где $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, $(x_0,y_0)$ – точка, для которой $f'_x=0$ и $f'_y=0$, а именно:

1) если $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума: при A<0 (или C<0) – точка максимума, при A>0 (или C>0) – точка минимума,

2) если $\Delta < 0$то в точке $M_0$ нет экстремума.

3) если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума функции остается открытым (требуется дальнейшее исследование функции, например, по знаку приращения $\Delta f$ вблизи этой точки).

***Примеры:***

1. Исследовать на экстремум функцию

$$z=f(x,y)=x^3+y^3+9xy.$$

Находим частные производные первого и второго порядков:

$$f'_x(x,y)=3x^2+9y; f'_y(x,y)=3y^2+9x;$$

$$f''_{xx}(x,y)=6x; f''_{xy}(x,y)=9; f''_{yy}(x,y)=6y.$$

Обращая в нуль первые производные, получим систему уравнений для определения критических точек:

$$\begin{cases} 3x^2+9y=0; \\ 3y^2+9x=0. \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2+3y=0; \\ y^2+3x=0. \end{cases}.$$

Определяя y из первого уравнения и подставляя его выражение $y=-\frac{1}{3}x^2$ во второе уравнение, получим

$\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2+3x=0, x^4+27x=0$ или $x(x^3+27)=0$, откуда $x_1=0, x_2=-3.$

(Комплексные корни уравнения $x^3 + 27 = 0$ или $x^2 - 3x + 9 = 0$ не принимаем во внимание.)

Находим значения y, соответствующие значениям $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Из выражения $y = -\frac{1}{3}x^2$ имеем $y_1 = 0$, $y_2 = -3$. Получены две критические точки $M_1(0; 0)$, $M_2(-3; -3)$.

Вычислим значения частных производных второго порядка в этих точках:

$$\grave{A}_1 = f''_{xx}(0;0) = 0, B_1 = f''_{xy}(0;0) = 9, C_1 = f''_{yy}(0;0) = 0,$$
$$A_2 = f''_{xx}(-3;-3) = -18, B_2 = f''_{xy}(-3;-3) = 9, C_2 = f''_{yy}(-3;-3) = -18.$$

Находим определители:

$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^{\ 2} = 0 \cdot 0 - 9^2 = -81;$$
$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^{\ 2} = (-18)(-18) - 9^2 = 243.$$

В силу достаточных условий заключаем, что в точке $M_1$ нет экстремума, так как $\Delta_1 < 0$ в точке $M_2$ функция имеет максимум, ибо $\Delta_2 > 0$ и $A_2 < 0$ причем max f(x, y) = f(–3; –3) = 27

Найти экстремум функции

$$Z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 18x^2 - 18xy - 18y^2 + 57x + 138\ y + 290$$

Находим первые и вторые частные производные:

$$f'_x(x;y) = 3x^2 + 3y^2 - 36x - 18y + 57;$$
$$f'_y(x;y) = 6xy - 18x - 36y + 138;$$
$$f''_{xx}(x;,y) = 6x - 36; f''_{xy}(x;y) = 6y - 18; f''_{yy}(x;y) = 6x - 36.$$

Приравнивая нулю первые производные, получаем систему уравнений для определения критических точек:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 36x - 18y + 57 = 0; \\ 6xy - 18x - 36y + 138 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 6y + 19 = 0; \\ 2xy - 6x - 12y + 46 = 0. \end{cases}$$

Сложив почленно эти уравнения, получим уравнение $x^2 + y^2 + 2xy - 18x - 18y + 65 = 0$, которое можно переписать в виде $(x + y)2 - 18(x + y) + 65 = 0$.

Это квадратное уравнение относительно (x+y), решая его, находим $x + y = 13$, $x + y = 5$.

Вычитая почленно второе уравнение системы из первого, получаем

$x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 27 = 0$

или

$(x - y)^2 - 6(x - y) - 27 = 0$, откуда, решая опять квадратное уравнение, получим

$$x - y=9,\ x - y=-3.$$

Таким образом, для определения критических точек получены четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 13; \\ x - y = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 13; \\ x - y = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5; \\ x - y = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5; \\ x - y = -3. \end{cases}.$$

Решая эти системы, находим четыре критические точки $M_1(11;\ 2)$, $M_2(5;\ 8)$, $M_3(7;\ –2)$, $M_4(1;\ 4)$.

Вычисляем значения частных производных второго порядка в указанных точках:

$$A_1 = f''_{xx}(11;2) = 30, B_1 = f''_{xy}(11;2) = -6, C_1 = f''_{yy}(11;2) = 30;$$
$$A_2 = f''_{xx}(5;8) = -6, B_2 = f''_{xy}(5;8) = 30, C_2 = f''_{yy}(5;8) = -6;$$
$$A_3 = f''_{xx}(7;-2) = 6, B_3 = f''_{xy}(7;-2) = -30, C_3 = f''_{yy}(7;-2) = 6;$$
$$A_4 = f''_{xx}(1;4) = -30, B_4 = f''_{xy}(1;4) = 6, C_4 = f''_{yy}(1;4) = -30$$

и значения определителя $\Delta$:

$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^{\ 2} = 30 \cdot 30 - (-6)^2 = 864;$$
$$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^{\ 2} = (-6)(-6) - 30^2 = -864;$$
$$\Delta_3 = A_3C_3 - B_3^{\ 2} = 6 \cdot 6 - (-30)^2 = -864;$$
$$\Delta_4 = A_4C_4 - B_4^{\ 2} = (-30)(-30) - 6^2 = 864.$$

Так как $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$, то в точках $M_2$, $M_3$ экстремумов нет. Поскольку $\Delta_1 > 0$, $A_1 > 0$, то точка $M_1$ является точкой минимума, причем $\min f(x, y) = f(11;\ 2) = 10$.

Так как $\Delta_4 > 0$, $A_4 > 0$, то точка $M_4$ есть точка максимума, причем $\max f(x, y) = f(1;\ 4) = 570$.

## 5.21. Производная в данном направлении. Градиент функции

*Производной* функции $z = f(x, y)$ в данном направлении $l = \overrightarrow{PP_1}$ называется $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{P \to P_1} \dfrac{f(P_1) - f(P)}{P_1P}$, где f(P) и f(P1) – значения в точках P и $P_1$; $P, P_1 \in l$ .

Если функция z – дифференцируема, то справедлива формула $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$, где $\alpha$ – угол, образованный вектором $\bar{l}$ с осью OX.

***Пример***: Найти производную функции $z = 2x^2–3y^2$ в точке $P_1(1; 0)$ в направлении, оставляющим с осью OX угол в $120^0$.

*Решение*. Найдем частные производные данной функции и их значения в точке $P_1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x;\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=-6y;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_1}=4;\ \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_1}=0.$$

$$\cos\alpha=\cos 120^0=-\frac{1}{2},\ \sin\alpha=\sin 120^0=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Применяя формулу, получим: $\frac{\partial z}{\partial l}=4\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2.$

Знак минус показывает, что функция в данной точке и в данном направлении убывает.

*Градиентом функции* z=f (x; y) называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции: $\overline{\text{grad}z}=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$ Производная данной функции в направлении l связана с градиентом функции следующей формулой: $\frac{\partial z}{\partial l}=\text{ïð}_l\,\text{grad}z,$ т.е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т.е. при $\bar{l}=\overline{\text{grad}}\ \ z$ производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$

***Пример 2.*** Найти градиент функции $z=x^2y$ в точке P(1; 1).

*Решение*. Вычислим частные производные и их значения в точке P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2;$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1.$$

*Следовательно*, $\overline{\operatorname{grad} z} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

## 5.22. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней *наибольшего и наименьшего значений* или в критических точках этой области, или в точках, лежащих на границе области.

Для нахождения *наибольшего и наименьшего значений* функции в замкнутой ограниченной области необходимо:

1. Найти критические точки (лежащие внутри данной области) и вычислить в них значения функции.

2. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области.

3. Сравнить все полученные значения функции: самое большее (меньшее) и будет наибольшим (наименьшим) значением функции в данной области.

*Замечание 1*. В данном случае нет необходимости исследовать функцию на экстремум с помощью частных производных второго порядка. Требуется найти критические точки и значения функции в них.

*Замечание 2*. Для функции z=f(x,y) граница области обычно состоит из нескольких дуг (отрезков), уравнения которых y=f(x), где $a \le x \le b$ или $x = \varphi(y)$, где $c \le y \le d$, поэтому на соответствующих дугах границы данная функция является функцией одной переменной.

***Примеры:***

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x, y)=2x^2-2y^2$ в круге $x^2+y^2 \le 9$.

Данная функция имеет частные производные:

$$f_x(x, y)=4x; \quad f'_y(x, y)=-4x$$

Приравнивая нулю эти производные, получим систему уравнений, из которой находим $x_0=0$, $y_0=0$. Значение функции в критической точке $M_0(0, 0)$ равно нулю:

$$z_0=f(0, 0)= 2\cdot 0 - 2\cdot 0 = 0 .$$

Границей данной замкнутой области является окружность $x^2+y^2=9$ или $y^2=9-x^{2,}$ где $-3 \le x \le 3$. Функция $z=2x^2-2y^2$ на границе области становится функцией одной переменной x:

$$z(x)=2x^2-2(9-x^2)=4x^2-18, \text{ где } õ \in [-3;3].$$

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции z(x) на указанном отрезке. Дифференцируя эту функцию, получаем $z'(x)=8x$. Из уравнения $z'(x)=0$ находим единственную критическую точку $x_1=0$, в которой функция z(x) имеет значение $z_1=-18$. Вычислим её значения на концах отрезка [-3, 3], т. е. в точках x=-3, x=3:

$$z_2=z(-3)=4(-3)^2-18=18;$$

$$z_3=z(3)=4*3^2-18=18.$$

Сравнивая между собой числа $z_0$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, заключаем, что функция $z=2x^2-2y^2$ имеет наибольшее значение, равное 18 и наименьшее значение, равное -18, причём:

$$z_{наиб}=f(-3, 0)=f(3, 0)=18;$$

$$z_{наим}=f(0, -3)=f(0, 3)= -18.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x, y)=x^3+y^{3+}6xy$ в прямоугольнике с вершинами

A(-3, -3), B(-3, 2), C(1, 2), D(1, -3).

Возьмём частные производные данной функции:

$$f'_x(x,y)=3x^2+6y; \; f'_y(x,y)=3y^2+6x$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+6y=0; \\ 3y^2+6x=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+2y=0; \\ y^2+2x=0 \end{cases}$$

находим две критические точки $M_1(0, 0)$, $M_2(-2, -2)$, обе они принадлежат прямоугольнику ABCD.

Вычисляем значения функции в этих точках:

$$z_1=f(0, 0)=0, \; z_2=f(-2, -2)=8,$$

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции на границе прямоугольника ABCD. Эту границу удобно разбить на четыре отрезка AB, BC, CD, DA, на каждом из которых могут оказаться свои критические точки. Кроме того, необходимо учесть и концы отрезков, т. е. точки A, B, C и D.

Ищем критические точки на отрезке AB, для которого x=-3, причём $-3 \le y \le 2$. На этом отрезке данная функция становится функцией одной переменной y:

$$z=f(-3, y)=-27+y^3-18y;\ z(y)=y^3-18y-27.$$

Производная этой функции $z' = 3y^2 - 18$ обращается в нуль при $y = -\sqrt{6} \approx -2{,}45$, $y = \sqrt{6} \approx 2{,}45$. Второго значения рассматривать не будем, так как оно не принадлежит отрезку AB, для которого $-3 \le y \le 2$. Вычислим значение функции z(y) при $y = -\sqrt{6}$:

$$z_3=z(-\sqrt{6})\text{-}(-\sqrt{6})^3-18(-\sqrt{6})-27=12\sqrt{6}-27 \approx 2{,}4.$$

На отрезке BC $y = 2(-3 \le x \le 1)$, поэтому $z = f(x, 2) = x^3 + 8 + 12x$

Функция $z(x) = x^3 + 12x + 8$ критических точек не имеет, так как ее производная $z'(x) = 3x^2 + 12$ в нуль не обращается.

На отрезке CD, где x=1 ($-3 \le y \le 2$), $z=f(1, y)=1+y^3+6y$, также нет критических точек.

На отрезке DA $y = -3(-3 \le x \le 1)$, поэтому $z = f(x, -3) = x^3 - 27 - 18x$.

Функция $z(x) = x^3 - 18x - 27$ имеет критическую точку $x = -\sqrt{6}$ (точка $x = \sqrt{6}$, в которой производная $z'(x) = 3x^2 - 18$ также обращается в нуль, отрезку DA не принадлежит).

Вычисляем значение функции z(x) в точке $x = -\sqrt{6}$:

$$z_4 = z(-\sqrt{6}) = (-\sqrt{6})^3 - 18(-\sqrt{6}) - 27 = 12\sqrt{6} - 27 \approx 2{,}4.$$

Осталось найти значение функции $z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в вершинах A,B,C,D:

$$z_5 = f(A) = f(-3,-3) = (-3)^3 + (-3)^3 + 6(-3)(-3) = 0;$$

$$z_6 = f(B) = f(-3,2) = (-3)^3 + 2^3 + 6(-3)2 = -55;$$

$$z_7 = f(C) = f(1,2) = 1^3 + 2^3 + 6 \cdot 1 \cdot 2 = 21;$$

$$z_8 = f(D) = f(1,-3) = 1^3 + (-3)^3 + 6(-3)1 = -44.$$

Сравнивая $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, $z_5$, $z_6$, $z_7$, $z_8$, заключаем, что функция $z = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике ABCD достигает наименьшего значения, равного 55, в точке B, наибольшего значения, равного 21, в точке C.

# 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 6.1. Основные определения. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Уравнение, связывающее независимую переменную x с искомой функцией y=f(x) и ее производными, называется *дифференциальным уравнением*.

*Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной искомой функции, фигурирующей в уравнении.

*Решить* дифференциальное уравнение – это значит найти такую функцию, которая удовлетворяет данному уравнению, т.е. превращает уравнение в тождество.

***Пример 1.*** Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d\acute{o}}{d\tilde{o}} = 2x. \qquad (1)$$

*Решение:* Из уравнения (1) следует, что

$$y=x^2+C, \qquad (2)$$

где C – произвольная постоянная.

О выражении (2) говорят, что оно есть *общий интеграл* (или *общее решение*) дифференциального уравнения (1).

Уравнение (2) есть уравнение семейства парабол, вершины которых лежат на оси ординат.

Чтобы выделить из этого семейства параболу, проходящую, например, через точку A(1;1), следует, соответственно, определить C. Подставляя x=1 и y=1 в (2), получим C=0, следовательно, уравнение параболы, проходящей через точку A(1; 1) есть $y=x^2$. (3)

Выражение (3) называется *частным интегралом* (или *частным решением*) дифференциального уравнения (1), а условие, чтобы кривая интеграла, являющегося решением дифференциального уравнения, проходила через точку (1; 1), называется *начальным условием.* Начальное условие дает возможность найти частный интеграл из общего.

Если дифференциальное уравнение имеет вид:

$$P(x)dx + Q(y)dy=0, \qquad (4)$$

то его называют дифференциальным уравнением с *разделенными переменными.*

Интегрируя, непосредственно получаем: $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$, где C – постоянная.

***Пример 2.*** Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{x^2}{y+1}-4x\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

*Решение:* Преобразуя, получаем: $\frac{x}{4}dx-(y+1)dy=0.$

Интегрируем: $\int\frac{x}{4}dx-\int(y+1)dy=C,$

откуда $\frac{x^2}{8}-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)=C.$

***Пример 3.*** Решить дифференциальное уравнение

$y'=e^{3x+y}$ при начальном условии y=0 для x=0.

*Решение:* Уравнение можно записать в следующем виде:

$$y'=e^{3x}\cdot e^{y}.$$

Разделяя переменные, получаем: $\frac{y'}{e^{y}}=e^{3x}$, или $e^{-y}y'=e^{3x}$, или $e^{-y}\cdot dy=e^{3x}\cdot dx$ .

Интегрируя, имеем: $\int e^{-y}dy=\int e^{3x}dx,$ откуда $-e^{-y}=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$

Находим значение C при начальном условии y=0 для x=0, имеем: $-e^{0}=\frac{1}{3}e^{0}+C$ , или $-1=\frac{1}{3}+C,$ откуда C=$-\frac{4}{3}$.

Подставляя это значение C, получаем частный интеграл:

$$-e^{-y}=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{4}{3},\ \text{или}\ e^{-y}=\frac{4-e^{3x}}{3},$$

откуда $-y=\ln\left|\frac{4-e^{3x}}{3}\right|,$ и, наконец, $y=-\ln\left|\frac{4-\mathring{a}^{3x}}{3}\right|=\ln\left|\frac{3}{4-e^{3x}}\right|.$

*Однородные уравнения.* Дифференциальное уравнение P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 называется *однородным,* если P(x, y) и Q(x, y) – однородные функции одинакового измерения n, т.е. функциями, для которых при любом k выполняются тождества

$$P(kx, ky) = k^n\,P(x, y),\ Q(kx, ky) = k^nQ(x, y).$$

Уравнение может быть приведено к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ и при помощи подстановки y = xu, где u – новая неизвестная функция, преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Можно также применять подстановку x = yu.

***Пример 4.*** Найти общий интеграл однородного уравнения $y' = e^{y/x} + \frac{y}{y}$.

*Решение:* Введем новую переменную u=y/x. Имеем:

$$y = ux, \text{ тогда } y' = u + xu'.$$

Следовательно, однородное уравнение принимает вид:

$$u + xu' = e^u + u, \text{ откуда } x\frac{du}{dx} = e^u, \text{ или } \frac{1}{e^u}du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x}, \text{ или } -e^{-u} = \ln|x| + \ln|\tilde{N}|$$

Отсюда $e^{-u} = -(\ln|x| + \ln|\tilde{N}|)$, или $e^{-u} = \ln\left|\frac{1}{xc}\right|$,

и, следовательно, $-u = \ln\ln\left|\frac{1}{xc}\right|$, или $u = -\ln\ln\left|\frac{1}{xc}\right|$,

Поскольку y=ux, имеем:

$$y = -x \cdot \ln \cdot \ln\left|\frac{1}{xc}\right|.$$

***Пример 5.*** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(y^2 - x^2)dx + 2xydy = 0$$

и запишем его в следующем виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

*Решение:* Разделив числитель и знаменатель правой части на $x^2$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}}.$$

Чтобы найти общий интеграл уравнения, введем вспомогательную переменную $u = \frac{y}{x}$.

Из этого равенства следует, что y = xu и $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.

Подставляя это выражение в заданное уравнение, получим

$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u}$, а после переноса u в другую часть уравнения получим, что

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{2u}, \text{ или } x\frac{du}{dx} = \frac{-u^2 - 1}{2u}.$$

Применив в последнем уравнении метод разделения переменных, получим $\frac{2u}{-u^2 - 1}du = \frac{1}{x}dx$.

Интегрируя, имеем:

$$\int \frac{2u}{-u^2 - 1}du = \int \frac{1}{x}dx, \text{ или } -\int \frac{2u}{u^2 + 1}du = \int \frac{1}{x}dx.$$

Отсюда

$$-\ln(u^2 + 1) + \ln C = \ln|x|, \text{ или } \ln|x| + \ln(u^2 + 1) = \ln C,$$

и, следовательно,

$$\ln\left|x(u^2 + 1)\right| = \ln C, \text{ или } x(u^2 + 1) = C.$$

Возвращаясь к переменной y=ux, получим:

$$x\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right) = C, \text{ или } \frac{y^2 + x^2}{x} = C,$$

откуда $y^2 + x^2 = Cx$.

Таким образом, получили общий интеграл заданного уравнения.

*Линейные уравнения.* Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ первой степени, относительно y и $y'$, называется *линейным.*

Если функция Q(x) = 0, то уравнение принимает вид $y' + P(x)y = 0$ и является *однородным* относительно y и $y'$, линейным дифференциальным уравнением. В этом случае переменные разделяются и общее решение уравнения имеет вид $y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

*Уравнение Бернулли.* Уравнение 1-го порядка вида $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, называется уравнением Бернулли. Оно приводится к линейному с помощью подстановки $r = y^{1-\alpha}$. Можно также применять метод вариации произвольной постоянной или подстановку y = uv.

Неизвестная функция y представляется в виде произведения двух неизвестных функций u = u(x) и v = v(x). Получаем: $u \cdot v' + P(x)uv = 0$, или $\frac{dv}{dx} = -P(x)v$, или $\frac{dv}{v} = -P(x)dx$, или $\ln v = -\int P(x)dx$, то есть $v = e^{\int -P(x)dx}$. Подставляя v в начальное уравнение, получаем еще одно уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' e^{\int -P(x)dx} = Q(x).$$

Решая его, находим u, а вместе с ним и y.

***Пример.*** Решить уравнение $xy' + y - e^x = 0$.

*Решение:* $xy' + y = e^x, y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} e^x, y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv'$. Получаем $u'v + \left( uv' + \frac{1}{x} uv \right) = \frac{1}{x} e^x; v' + \frac{1}{x} v = 0;$

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}; \ln|v| = -\ln|õ|; v = \frac{1}{x};$ подставляем в начальное уравнение: $u' \frac{1}{x} = \frac{1}{x} e^x; du = e^x dx; u = e^x + C$

Значит, $y = \frac{1}{x}(e^x + C)$.

## 6.2. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

1. *Однородное уравнение.* Линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами p и q без правой части имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

Если $k_1$ и $k_2$ – корни характеристического уравнения

$$\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0 \tag{2}$$

то общее решение уравнения (1) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если $k_1$ и $k_2$ вещественны и $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, если $k_1 = k_2$;

3) $y = e^{ax}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, если $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

2. *Неоднородное уравнение*. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

можно записать в виде суммы

$$y = y_0 + Y$$

где $y_0$ – общее решение соответствующего уравнения без правой части и Y – частное решение данного уравнения.

Функция Y может быть найдена *методом неопределенных коэффициентов* в следующих простейших случаях:

1. $f(x)=e^{ax} P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Если a не является корнем характеристического уравнения, т.е. $\varphi(a) \neq 0$, то полагают $Y = e^{ax}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если a есть корень характеристического уравнения, то $Y= x^r e^{ax} Q_n(x)$, где r – кратность корня a (r=1 или r=2).

2. $f(x)= e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$.

Если $\varphi(a \pm bi) \neq 0$, то полагают

$$Y= e^{ax}[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx],$$

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени $N = \max\{n,m\}$.

Если $\varphi(a \pm bi) = 0$, то полагают

$$Y= x^r e^{ax}[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx],$$

где r – кратность корня $a \pm bi$ (для уравнения 2-го порядка r = 1).

***Пример 1.*** Найти общее решение уравнения $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

*Решение.* Характеристическое уравнение $2k^2 - k - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$ и $k_2 = -\frac{1}{2}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения (первый вид) $y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$. Правая часть заданного уравнения $f(x) = 4xe^{2x} \equiv e^{ax}P_n(x)$. Следовательно, $Y = e^{2x}(Ax + B)$, так как n = 1 и r = 0. Дифференцируя Y два раза и подставляя производные в данное уравнение, получим:

$$2e^{2x}(4Ax + 4B + 4A) - e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}.$$

Сокращая на $e^{2x}$ и приравнивая, друг к другу, коэффициенты при первых степенях x и свободные члены в левой и правой частях равенства, имеем 5A=4 и 7A+5B=0, откуда A=$\frac{4}{5}$ и $B = -\frac{28}{25}$.

Таким образом, $Y = e^{2x}(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25})$, а общее решение данного уравнения примет вид

$$ó = Ñ_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + e^{2x}(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}).$$

***Пример 2.*** Найти общее решение уравнения $ó'' - 2ó' + ó = õå^õ$.

*Решение.* Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеем двукратный корень k=1. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = xe^x$; здесь a=1 и n=1. Частное решение $Y = x^2e^x(Ax + B)$, так как a совпадает с двукратным корнем k = 1 и, следовательно, r = 2.

Дифференцируя Y два раза, подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты, получим $A = \frac{1}{6}$, B=0. Следовательно, общее решение данного уравнения запишется в виде

$$ó = (Ñ_1 + Ñ_2 x)e^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

***Пример 3.*** Найти общее решение уравнения $y'' + y = x\sin x$.

*Решение:* Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = i$ и $k_2 = -i$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения будет $y = e^{ax}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, где $\alpha = 0$, $\beta = 1$:

$$Y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Правая часть имеет вид:

$$f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx],$$

где a = 0, b = 1, $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = x$. Ей соответствует частное решение $Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$ (здесь N = 1, a = 0, b = 1, r = 1).

Дифференцируя два раза и подставляя в заданное уравнение, приравниваем коэффициенты в обеих частях равенства при cosx, x cosx, sinx, x sinx. В результате получится четыре уравнения

$$2A+2D=0,$$
$$4C=0,$$
$$-2B+2C=0,$$
$$-4A=1,$$

из которых и определяются A=-1/4, B=0, C=0, D=1/4.

Поэтому $Y = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$

Общее решение примет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

3. *Принцип наложения решений*. Если правая часть уравнения (3) есть сумма нескольких функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

и $Y^i$($i = 1, 2, \ldots, n$) – соответствующие решения уравнений

$y'' + py' + qy = f_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)

то сумма

$$y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

является решением уравнения (3).

# 7. РЯДЫ

## 7.1. Числовые ряды

*Основные понятия*. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется *сходящимся*, если его частичная сумма $Sn = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ имеет предел при $n \to \infty$. Величина $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется при этом *суммой ряда*, а число $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ – *остатком ряда*. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак сходимости).

Обратное утверждение не верно.

Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если прибавить или отбросить конечное число его членов.

## 7.2. Признаки сходимости и расходимости знакоположительных рядов

1. *Признак сравнения 1.* Если $0 \le a_n \le b_n$, начиная с некоторого $n = n_0$, и ряд $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (2)

сходится, то ряд (1) также сходится. Если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

В качестве рядов для сравнения удобно, в частности, выбирать геометрическую прогрессию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n \ (a \neq 0)$, которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$, и гармонический ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, являющийся рядом расходящимся при $p \le 1$ и сходящимся при $p > 1$.

***Пример 1.*** Ряд $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^n} + \ldots$ сходится, так как здесь $a_n = \frac{1}{n\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$, причем геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, знаменатель которой $q = \frac{1}{2}$, сходится.

***Пример 2.*** Ряд $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\ldots$ расходится, так как его общий член $\frac{\ln n}{n}$ больше соответствующего члена $\frac{1}{n}$ гармонического ряда (который расходится).

2. *Признак сравнения 2.* Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ (в частности, если $a_n b_n$), то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

***Пример 3.*** Ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}:\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$ а ряд с общим членом $\frac{1}{n}$ расходится.

***Пример 4.*** Ряд $\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\ldots+\frac{1}{2^n-n}+\ldots$ сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-n}:\frac{1}{2^n}\right)=1,$ т.е. $\frac{1}{2^n-n}\approx\frac{1}{2^n}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{2^n}$ сходится, как геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

3. *Признак Даламбера.* Пусть $a_n > 0$ (начиная с некоторого $n = n_0$) и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$

Тогда ряд (1) сходится, если $q < 1$, и расходится, если $q > 1$. Если $q = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

***Пример 5.*** Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

*Решение.* Здесь $a_n=\frac{2n-1}{2^n};a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}<1$.

Следовательно, данный ряд сходится.

4. *Признак Коши.* Пусть $a_n \geq 0$ (начиная с некоторого $n = n_0$) и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$

Тогда ряд (1) сходится, если $q < 1$, и расходится, если $q > 1$. В случае, когда $q = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

5. *Интегральный признак Коши*. Если $a_n = f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x \ge n \ge 1$, то ряд (1) и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

С помощью интегрального признака доказывается, что ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3}$$

сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \le 1$. Сходимость многих рядов можно исследовать при помощи сравнения с соответствующим рядом Дирихле (3).

***Пример 6.*** Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \ldots$

*Решение*. Имеем: $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{4n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2n}} \approx \frac{1}{4n^2}$.

Так как ряд Дирихле при $p = 2$ сходится, то на основании признака сравнения 2 можно утверждать, что и данный ряд сходится.

## 7.3. Признаки сходимости знакопеременных рядов

Если ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$, (4)
составленный из абсолютных величин членов ряда (1), сходится, то ряд (1) также сходится и называется *абсолютно сходящимся*. Если же ряд (1) сходится, а ряд (4) расходится, то ряд (1) называется *условно (неабсолютно) сходящимся*.

Для исследования на абсолютную сходимость ряда (1) можно использовать для ряда (4) известные *признаки сходимости знакоположительных рядов*. В частности, ряд (1) сходится абсолютно, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

В общем случае из расходимости ряда (4) не следует расходимость ряда (1). Но если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, то расходится не только ряд (4), но и ряд (1).

*Признак Лейбница*. Если для знакочередующегося ряда

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots \ (b_n \ge 0) \tag{5}$$

выполнены условия:

а) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то ряд (5) сходится.

Для остатка ряда $R_n$ в этом случае справедлива оценка $|R_n| \leq b_{n+1}$.

***Пример 7.*** Исследовать сходимость ряда

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots$$

*Решение.* Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$, то данный ряд сходится абсолютно.

***Пример 8.*** Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$ сходится, так как выполнены условия признака Лейбница. Этот ряд сходится неабсолютно (условно), так как ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится (гармонический ряд).

*Примечание.* Для сходимости знакочередующегося ряда не достаточно, чтобы его общий член стремился к нулю.

Признак Лейбница утверждает лишь, что знакочередующийся ряд сходится, если абсолютная величина общего члена ряда стремится к нулю монотонно.

Так, например, ряд $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{5^k}+\ldots$ расходится, несмотря на то, что его общий член стремится к нулю (монотонность изменения абсолютной величины общего члена здесь, конечно, нарушена). Действительно, здесь $S_{2k}=S'_k+S''_k$, где $S'_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}, S''_k=-(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^k})$, причем $\lim\limits_{k\to\infty}S'_k=\infty$ ($S'_k$ – частичная сумма гармонического ряда), в то время как предел $\lim\limits_{k\to\infty}S''_k$ существует и конечен ($S''_k$ – частичная сумма сходящейся геометрической прогрессии), следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}=\infty$.

С другой стороны, для сходимости знакочередующегося ряда выполнение признака Лейбница не необходимо: знакочередующийся ряд может сходиться, если абсолютная величина его общего члена стремится к нулю не монотонно. Так ряд $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$ сходится и при том абсолютно, хотя признак Лейбница и не выполнен: абсолютная величина общего члена ряда хотя и стремится к нулю, но не монотонно.

## 7.4. Функциональные ряды

*Область сходимости.* Множество значений аргумента x, для которых функциональный ряд $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ (1) сходится, называется областью сходимости этого ряда. Функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, а x принадлежит области сходимости, называется суммой ряда, а $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ – остатком ряда.

В простейших случаях для определения области сходимости ряда (1) достаточно применить к этому ряду известные признаки сходимости, считая *x* фиксированным.

***Пример 1.*** Определить область сходимости ряда

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots \qquad (2)$$

*Решение.* Обозначив через $u_n$ общий член ряда, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|(x+1)^{n+1}2^n n|}{2^{n+1}(n+1)|(x+1)^n|}=\frac{|x+1|}{2}.$$

На основании признака Даламбера можно утверждать, что ряд сходится (и при том абсолютно), если $\frac{|x+1|}{2}<1$, т.е. при $-3 < x < 1$; ряд расходится, если $\frac{|x+1|}{2}>1$, т.е. если $-\infty < x < -3$ или $1 < x < \infty$. При $x = 1$ получаем гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, который расходится, а при $x =-3$ – ряд $-\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$, который (в соответствии с признаком Лейбница) сходится (неабсолютно).

Итак, ряд сходится при $-3 \le x < 1$.

*Степенные ряды*. Для всякого степенного ряда

$$c_0 + c_1(x–a) + c_2(x – a)^2 + \ldots + c_n(x – a)n + \ldots$$

($c_n$ и a – действительные числа) существует такой интервал (интервал сходимости) $|x – a| < R$ с центром в точке $x = a$, внутри которого ряд сходится абсолютно; при $|x – a| > R$ – ряд расходится. Радиус сходимости $R$ может быть в частных случаях равен также 0 и ∞. В концевых точках интервала сходимости $x = a \pm R$ возможна как сходимость, так и расходимость степенного ряда. Интервал сходимости определяют обычно с помощью признаков Даламбера или Коши, применяя их к ряду, членами которого являются абсолютные величины членов данного ряда.

# 8. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

## 8.1. Применение понятия производной в экономике

Издержки производства K однородной продукции являются функцией ее объема x, т.е. K=K(x).

Отношение $\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x+\Delta x)-K(x)}{\Delta x}$ называется *средними издержками*, а предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$ – *предельными издержками* производства при объеме продукции x.

Если U(x) является функцией выручки, а Z(x) функцией прибыли, то можно говорить о предельной выручке и предельной прибыли. При этом изучении некоторых экономических вопросов необходимо знать процентное изменение зависимой переменной при изменении независимой переменной на 1%. Определяется это с помощью понятия эластичности. *Эластичностью* функции y=f(x) называется

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y}\cdot y'(x). \text{ Его обозначают } E_x(y) = \frac{x}{y}y'(x).$$

Можно говорить об эластичности издержек производства $E_x(K) = \frac{x}{K}K'(x)$, об эластичности спроса относительно цены или предложения:

$$E_p(q) = \frac{p}{q}q'(p),$$

$$E_s(q) = \frac{s}{q}q'(s),$$

где p – цена, q – спрос, s – предложение некоторого товара.

***Пример.*** Функция полных издержек имеет вид $K(x)=x^3+2x^2+x$.

Исследовать характер изменения этой функции, а также функции средних издержек. Рассчитать эластичность полных издержек *K(x)* и средних издержек $K(x) = \frac{K(x)}{x}$ и убедиться в том, что $E_x(K) = E(K) - 1$ вычислить $E_x(K), E_x(\overline{K})$ при x=10. Сделать соответствующий вывод.

*Решение.* $K(x)=x3+2x^2+x$. По смыслу задачи функция определена лишь для x>0, $K'(x) = 3x^2+4x+1>0$, $K''(x) = 6x+4>0$ для всех x>0, т.е. издержки производства с ростом объема продукции возрастают все быстрее.

Средние издержи $\overline{K}(x)=\dfrac{K(X)}{x}=x^2+2x+1$ по смыслу задачи также определены лишь для x>0.

$\overline{K'}(x)=2x+2>0$ для x>0, $\overline{K''}(x)=2>0,$ т.е. и средние издержки с ростом x растут все быстрее.

Рассчитаем эластичности:

$$E_x(K)=\frac{x}{x^3+2x^2+x}\cdot(3x^2+4x+1)=\frac{3x^2+4x+1}{x^2+2x+1}.$$

$$E_x\overline{(K)}=\frac{x}{x^2+2x+1}\cdot(2x+2)=\frac{2x(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x}{x+1}.$$

Покажем, что

$$E_x\overline{(K)}=E(K)-1.$$

$$E(K)-1=\frac{3x^2+4x+1}{x^2+2x+1}-1=\frac{3x^2+4x+1-x^2-2x-1}{x^2+2x+1}=$$

$$=\frac{2x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x}{x+1}=E_x\overline{(K)}.$$

Вычислим $E_x(K)$, $E_x\overline{(K)}$ при x=10.

$E_{10}(K)\approx 2{,}8,\ \ E_{10}\overline{(K)}\approx 1{,}8$

При увеличении объема продукции с 10 единиц на 1%, т.е. до 10,1 единиц, полные издержки увеличиваются приблизительно на 2,8%, а средние на 1,8%.

## 8.2. Определение кривой цены равновесия

Цена товара является *функцией времени p(t)*, где t измеряется, например, неделями. Спрос определяется уравнением $q=70-3p+6\dfrac{dp}{dt}$, а предложение $-s=7p-50+10\dfrac{dp}{dt}$. Определить кривую равновесия цен при начальной цене $p_0$.

*Решение.* Запишем условия равновесия: q=s, или $70-3p+6\dfrac{dp}{dt}=7p-50+10\dfrac{dp}{dt}$

Решим полученное уравнение.

$$4\frac{dp}{dt}+10p-120=0;$$

$$\frac{dp}{dt}=-2{,}5p+30;\frac{dp}{dt}=-2{,}5(p-12);\frac{dp}{p-12}=-2{,}5\cdot dt$$

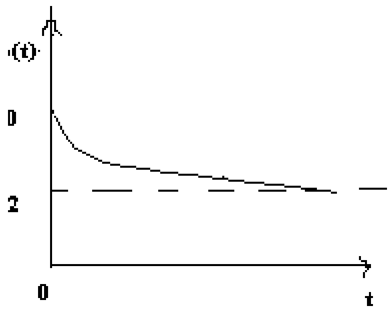
Интегрируя, получим

$$\ln|p-12|=-2{,}5t+\ln C, p-12=Ce^{-2,5t}, p(t)=Ce^{-2,5t}+12.$$

При t=0, $p(0) = p_0$, отсюда $p_0 = C + 12$, $C = p_0 – 12$. Окончательно

$$p(t)=(p_0-12)e^{-2,5t}+12.$$

Так как p(t)>0, то придадим $p_0$, например значение 20, получим прямую равновесия при начальной цене $p_0 = 20$: $p(t)=8e^{-2,5t}+12$ .




Чтобы для каждой недели сохранилось равновесие, цена товара должна определяться полученной формулой. *Например:* p(1)=12,7; p(2)=12,1. С течением времени цена асимптотически приближается к значению 12, которое на длительный период должно быть ценой равновесия.

# 9. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Понятие скалярных и векторных величин. Примеры.
2. Линейные операции над векторами и их свойства.
3. Единичный вектор.
4. Проекция вектора на ось, составляющая вектора по оси.
5. Арифметическое n-мерное векторное пространство.
6. Определение линейной комбинации векторов, линейной зависимости векторов.
7. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов.
8. Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.
9. Модуль вектора (формула). Расстояние между двумя точками.
10. Направляющие косинусы.
11. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов, их свойства, геометрический смысл.
12. Условие ортогональности, коллинеарности, компланарности векторов.
13. Определение совместной (несовместной), однородной, определенной (неопределенной) систем линейных уравнений.
14. Понятие свободных и базисных переменных.
15. Однородные системы линейных уравнений, их свойства. Фундаментальная и общая система решений.
16. Представление систем линейных уравнений в векторной и матричной форме.
17. Определитель и его свойства. Минор, алгебраическое дополнение элемента.
18. Методы вычисления определителей.
19. Матрицы. Действия над матрицами. Элементарные преобразования строк и столбцов матриц.
20. Обратная матрица. Методы вычисления обратной матрицы.
21. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
22. Ранг матрицы. Нахождение ранга матрицы. Теорема и ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.
23. Линейно-зависимые и линейно-независимые строки (столбцы) матрицы.
24. Теорема Кронкера–Капелли. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

25. Понятие линейного оператора. Представление линейного оператора.

26. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

27. Квадратичная форма. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Знакоположительные и знакоотрицательные квадратичные формы.

28. Уравнение прямой на плоскости.

29. Понятие нормального и направляющего векторов.

30. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой.

31. Каноническое уравнение кривых второго порядка.

32. Понятие функциональной зависимости. Виды зависимости. Способы задания функции.

33. Понятие предела. Основные теоремы о пределах.

34. Бесконечно малые и большие функции и их свойства.

35. Первый и второй замечательные пределы.

36. Односторонние пределы, определение. Теорема о равенстве односторонних пределов.

37. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва.

38. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функции, непрерывной на отрезке. Другое определение непрерывности.

39. Определение производной, ее физический, геометрический, экономический смысл.

40. Основная таблица производных. Свойства производной. Производная сложной функции.

41. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей вида: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$.

42. Дифференциал функции и его свойства. Связь дифференциала с производной.

43. Теорема о дифференцируемых функциях.

44. Возрастающие и убывающие функции. Необходимое и достаточное условие монотонности.

45. Понятие экстремума функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума. Критические точки 1 рода.

46. Выпуклость функции. Точки перегиба. Достаточное условие выпуклости (вниз, вверх) функции. Критические точки 2 рода. Необходимое и достаточное условие существования точек перегиба.

47. Асимптоты графика функции.

48. Неопределенный интеграл, его свойства, геометрический смысл. Методы интегрирования.

49. Определенный интеграл, его свойства, геометрический смысл. Формула Ньютона-Лейбница.

50. Геометрическое приложение определенного интеграла.

51. Функции нескольких переменных. Примеры функции двух переменных.

52. Частные производные первого и второго порядка.

53. Полный дифференциал функции двух переменных.

54. Понятие производной по направлению. Градиент функции.

55. Локальный экстремум, необходимое и достаточное условие локального экстремума.

56. Условие экстремум. Функция Лангранжа.

57. Предельные величины, эластичность функции двух переменных.

58. Дифференциальные уравнения. Основные понятия. Теорема существования единственности решения.

59. Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка.

60. Методы решения дифференциальных уравнений второго порядка.

61. Сходимость ряда. Свойства сходимости рядов. Необходимый признак сходимости.

62. Гармонический ряд. Ряды с положительными членами.

63. Признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, интегральный признак сходимости рядов.

64. Ряды с членами произвольного знака. Признак Лейбница.

65. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости.

66. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 4 изд. – М.: Наука, 1980.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1, Т. 2. – М.: Наука, 1985.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1983.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1985.
5. Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г.И. Кручковича. – М: Высшая школа, 1985.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1., Линейная алгебра и основы математического анализа: Учебное пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.
7. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2.: Специальные разделы математического анализа: Учебное пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

# ОГЛАВЛЕНИЕ



Учебное издание

Одияко Наталья Николаевна
Голодная Наталья Юрьевна

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 10.04.06. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,4.
Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 400 экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57