ББК 65.050.030.1я73+22.161.8я73
К 82

Рецензент: Ф.И. Бернацкий, д-р техн. наук,
профессор, гл. науч. сотрудник
ИАПУ ДВО РАН

Кривошеев В.П.
К 82 ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ: Практикум. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2005. – 76 с.

Практикум составлен для выполнения работ по дисциплине «Теория оптимального управления экономическими системами». Содержит теоретическую часть, задания, порядок выполнения и требования к отчету на пять лабораторных работ.

Предназначен студентам, обучающимся по специальности 061800 «Математические методы в экономике». Может быть полезен студентам, обучающимся по специальности 071900 «Информационные технологии и системы» при изучении дисциплины «Методы оптимизации».

ББК 65.050.030.1я73+22.161.8я73

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящего пособия является более глубокое освоение студентами основных разделов дисциплины «Теория оптимального управления экономическими системами»: аналитические и численные методы определения экстремума функций, динамическое программирование, принцип максимума. Для выполнения каждой из лабораторных работ требуется по 2 часа аудиторных занятий и в среднем по 3 часа самостоятельной работы. На самостоятельную работу выносится освоение теоретической части и оформление отчётов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
Аналитическое определение экстремума функции одной и нескольких переменных

1.1. Функции одной переменной

а) Постановка задачи: исследовать на экстремум функцию вида

$$y=f(x)=a_0+a_1 \cdot x+a_2 \cdot x^2 \qquad (1.1)$$

б) Необходимое условие экстремума: первая производная функции должна принимать значение, равное нулю.

$$dQ\,(x)/\,dx=0 \qquad (1.2)$$

Для функции (1.1) получим

$$d\,Q\,(x)/\,dx=\,a1+2a2 \cdot x \qquad (1.3)$$

$$x^*=-a1/2 \cdot a2 \qquad (1.4)$$

в) Достаточное условие экстремума: порядок впервые не обращающейся в ноль производной при выполнении условия (1.2) должен быть чётным. Причём, если значение этой производной положительное, то функция *Q(x)* имеет минимум, а если значение этой производной отрицательное, то функция *Q(x)* имеет максимум.

Для функции (1.1) имеем:

$$d\,Q\,(x)/\,dx=0$$

$$d^2\,Q\,(x)/\,dx^2=2 \cdot a2$$

При выполнении необходимого условия экстремума (1.2) получили порядок впервые не обращающийся в ноль производной четный (он равен 2). Следовательно, функция *Q(x)* имеет экстремум. Знак второй производной в данном примере определяется знаком коэффициента a_2.

1.2. Функция многих переменных

а) Постановка задачи: исследовать на экстремум функцию вида:

$$Q(x_1,x_2)=a_0+a_1 \cdot x_1 \quad +a_2 \cdot x_1^2+a_3 \cdot x_2+a_4 \cdot x_2^2+\,a_5 \cdot x_1 \cdot x_2. \qquad (1.5)$$

б) Необходимое условие экстремума: частные производные функции должны принимать значения, равные нулю

$$\partial Q(x_1\,...,x_n)/\partial x_1=0, \quad i=1,...,n \qquad (1.6)$$

Для функции (1.5) получим

$$\partial Q(x_1, x_2)/ \partial x_1=0,$$

$$2 \cdot a_2 \cdot x_1+a_5 \cdot x_2=-a1. \qquad (1.7)$$

$$\partial Q(x_1, x_2)/ \partial x_2=0,$$

$$a_5 \cdot x_1+2a_4 \cdot x_2=-a3 \qquad (1.8)$$

По формуле Крамера:

$$X_1^* = \Delta 1/\Delta \qquad (1.9)$$

$$X_2^* = \Delta 2/\Delta \qquad (1.10)$$

$$\Delta=4 \cdot a2 \cdot a4–a_5^2 \qquad (1.11)$$

$$\Delta 1=-2 \cdot a_1 \cdot a_4+a_3 \cdot a_5 \qquad (1.12)$$

$$\Delta 2=-2 \cdot a_2 \cdot a_3+a_1 \cdot a_5 \qquad (1.13)$$

Систему уравнений (1.7) и (1.8) можно решать методом подстановки.

в) Достаточное условие экстремума.

Разложим функцию Q ($x1$’…, xn) в ряд Тейлора относительно (x_1^*,…, x_n^*) и с учётом (1.6) получим

$$\Delta Q(x_1^*, \ldots, x_n^*)=0{,}5\sum_i\sum_j a_{ij} \cdot z_i\, z_j, \qquad (1.14)$$

где

$z_i=\Delta x_i=x^i - x_i*$

$z_j=\Delta x_j=x_j - x_j*$

Выражение (1.14) называется квадратичной формой.

Составляется матрица из вторых частных производных

$a_{ij} = \partial^2 Q(x_1,\ldots, x_n)/ \partial x_i \cdot \partial x_j$

в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ a_{21.}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

Квадратичная форма (1.14) является положительно-определённой, если все диагональные миноры матрицы (1.15) строго положительные. Квадратичная форма (1.14) является отрицательно-определённой, если все нечётные диагональные миноры матрицы (1.15) строго отрицательные, а чётные диагональные миноры матрицы (1.15) строго положительные.

Определение:

Функция $Q(x_1, \ldots, x_n)$ имеет минимум, если квадратичная форма (1.14) строго положительная.

Функция $Q(x_1, \ldots, x_n)$ имеет максимум, если квадратичная форма (1.14) строго отрицательная.

Для функции (1.5) имеем:

$$a_{11}= \partial Q(x_1, x_2)/\partial x_1 \, \partial x_1=2a_2$$

$$a_{22}= \quad \partial Q(x_1, x_2)/\partial x_2 \, \partial x_2 =2a_4$$

$$a_{12}= \partial Q(x_1, x_2)/\partial x_1\partial x_2 = a_{21}= \partial Q(x_1, x_2)/\partial x_2\partial x_1 =a_5$$

$$A=\left[\frac{2a_2 \;\; a_5}{a_5 \;\; 2a_4}\right]$$

Ниже приведены значения коэффициентов в уравнениях (1.1) (табл. 1) и (5) (табл. 2).

Таблица 1

Значения коэффициентов уравнения 1

№ п/п	a_0	a_1	a_2	№ п/п	a_0	a_1	a_2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	-20	20	29	20	-38	11
2	4	-22	19	30	18	-40	12
3	6	-24	18	31	16	-42	13
4	8	-26	17	32	14	-44	14
5	10	-28	16	33	12	-46	15
6	12	-30	15	34	10	-48	16
7	14	-32	14	35	8	-50	17
8	16	-34	13	36	6	-52	18
9	18	-36	12	37	4	-54	19
10	20	-38	11	38	2	-56	20
11	22	-40	10	39	20	-20	20
12	24	-42	9	40	22	-22	19
13	26	-44	8	41	24	-24	18
14	28	-46	7	42	26	-26	17

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
15	30	-48	6	43	28	-28	16
16	32	-50	5	44	30	-30	15
17	34	-52	4	45	32	-32	14
18	36	-54	3	46	34	-34	13
19	38	-56	2	47	36	-36	12
20	38	-20	2	48	38	-38	11
21	36	-22	3	49	40	-40	10
22	34	-24	4	50	42	-42	8
23	32	-26	5	51	44	-44	6
24	30	-28	6	52	46	-46	4
25	28	-30	7	53	48	-48	2
26	26	-32	8	54	50	-50	2
27	24	-34	91	55	52	-50	2
28	22	-36	10	56	48	-50	2

Таблица 2

№ п/п	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	2	3	4	5	6	7
1	100	38	2	51	51	20
2	101	37	3	52	32	19
3	102	36	4	53	22	18
4	103	35	5	54	16	17
5	104	34	6	55	12	16
6	105	33	7	56	10	15
7	106	32	8	57	8	14
8	107	31	9	58	6	13
9	108	30	10	59	4	12

Продолжение табл. 2

1	2	3	4	5	6	7
10	109	29	11	60	3	11
11	110	28	12	61	3	10
12	111	27	13	62	2	9
13	112	26	14	63	2	8
14	113	25	15	64	2	7
15	114	24	16	65	1	6
16	115	23	15	66	1	5
17	116	22	14	67	1	4
18	117	21	13	68	1	3
19	118	20	12	69	1	2
20	119	19	11	70	1	3
21	120	18	10	71	1	4
22	121	17	9	72	1	5
23	122	16	8	73	2	6
24	123	15	7	74	2	7
25	124	14	6	75	3	8
26	125	13	5	76	5	9
27	126	12	4	77	8	10
28	127	11	3	11	12	11
29	128	10	2	12	20	12
30	129	9	1	13	50	13
31	130	8	17	14	3	14
32	131	7	18	15	4	15
33	132	6	19	16	5	16
34	133	5	20	17	5	17
35	134	4	21	18	5	18
36	135	3	22	19	5	19

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6	7
37	136	2	23	20	6	20
38	137	1	24	21	6	21
39	138	1	25	2	5	22
40	138	2	26	2	6	23
41	138	3	27	3	7	24
42	138	4	28	4	7	24
43	138	5	29	5	8	24
44	139	6	30	6	8	25
45	140	7	32	7	8	25
46	141	8	34	7	8	25
47	141	8	35	7	8	26
48	142	8	36	7	8	26
49	143	8	37	7	8	27
50	144	8	38	7	8	29
51	145	8	39	7	8	30
52	146	8	40	7	8	31
53	147	8	41	7	9	31
54	148	8	42	7	9	32
55	149	8	42	7	10	33
56	150	8	43	7	11	34

Каждому студенту задаётся вариант индивидуального задания для исследования функций одной и нескольких переменных на экстремум соответственно из табл. 1 и 2.

1.3. Пример выполнения задания

Постановка задачи

Исследовать на экстремум функции:

1) $y=10-48x+16x^2$;
2) $y=133+5x_1+20x_1^2+17x_2+5x_2^2+17x_1x_2$.

Задание 1

Необходимое условие экстремума функции одной переменной:

$$\frac{dy}{dx}=0\ ;\ x=x^*.$$

$$y=10–48x+16x^2;$$

Находим производную, приравниваем её к нулю:

$$\frac{dy}{dx}=32x-48=0\ ;$$

$$x=x*=\frac{48}{32}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Достаточное условие экстремума функции одной переменной:

$$\frac{d^2x}{dx^2}=32\neq 0\ ;$$

$$\frac{d^2x}{dx^2}>0\ .$$

$$y^*=f(x^*)=f(1{,}5)=10-\frac{48\cdot 3}{2}+16\cdot(1{,}5)^2=-26\ .$$

Функция $y=10-48x+16x^2$ имеет минимум при x=1,5, так как порядок производной, впервые не обращающейся в нуль, четный (второй), и значение этой производной больше нуля.

Ответ:

$y^*=f(1{,}5)=-26$- минимум функции $y=10–48x+16x^2$.

Задание 2

Необходимое условие экстремума функции многих переменных:

$$y=f(x_1,\ldots,x_n).$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}=0\ ;$$

$$y=133+5x_1+20x_1^2+17x_2+5x_2^2+17x_1x_2;$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=5+40x_1+17x_2=0\\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2}=17+10x_2+17x_1=0\end{cases}\ ;$$

$$\begin{cases} 40x_1 + 17x_2 = -5 \\ 17x_1 + 10x_2 = -17 \end{cases};$$

Выражаем x_1 из первого уравнения и подставляем во второе.
Получаем уравнение:

$$-17\ (5+17\ x_2)/40 + 10\ x_2 = -17;$$

$$2{,}775\ x_2 = -14{,}875;$$

$$x_2 = -5\frac{40}{111}.$$

Подставляя значение x_2 в первое уравнение, получаем значение для x_1:

$$x_1 = \frac{239}{111} = 2\frac{17}{111};$$

$$x_1 = x_1^* = 2\frac{17}{111} \approx 2{,}1532;$$

$$x_2 = x_2^* = -5\frac{40}{111} \approx -5{,}3604.$$

Достаточное условие экстремума функций многих переменных.

Составляем матрицу из коэффициентов квадратичной формы. Для этого вычисляем вторые частные производные исходной функции:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_{1_i}^2} = 40;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 10;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1} = 17;$$

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 17 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

Диагональные миноры матрицы А:

$$d_1 = 40 > 0;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 40 & 17 \\ 17 & 10 \end{vmatrix} = 111 > 0;$$

Значит, квадратичная форма является положительно определенной, т.е. функция y=133+5x_1+20x_1^2+17x_2+5x_2^2+17x_1x$_2$ при $x_1 = 2\frac{17}{111} \approx 2{,}1532$; $x_2 = -5\frac{40}{111} \approx 5{,}3604$ будет иметь минимум.

$$y^* = f(x_1^*; x_2^*) =$$

$$=133+\frac{5\cdot 239}{111}+\frac{20\cdot 57121}{12321}-\frac{17\cdot 595}{111}+5\cdot\left(-\frac{595}{111}\right)^2-\frac{17\cdot 239\cdot 595}{111\cdot 111}=\frac{10303}{111}=92\frac{91}{111}\approx 92{,}8198$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
Определение оптимальной долговечности изделия аналитическим методом

2.1. Постановка задачи

Решается задача определения оптимальной долговечности (срока службы) изделия, участвующего в технологическом процессе, при котором затраты на планируемом временном отрезке T при использовании изделия с долговечностью T_∂ будут минимальны.

Суммарные затраты:

$$C_\Sigma(T, T_\partial) = C_{но}(T_\partial) + C_{1П}(T_\partial)\frac{T \cdot m}{T_\partial} + C_{1ГЭ}(T_\partial) \cdot T \cdot m \quad (2.1)$$

$$C_{НО}(T_\partial) = S_1(T_{\partial 0}) + K_{НО}(T_\partial - T_{\partial 0}) \quad (2.2)$$

– стоимость НИОКР;

$$C_{1П}(T_\partial) = S_2(T_{\partial 0}) + K_{1П}(T_\partial - T_{\partial 0}) + K_{2П}(T_\partial - T_{\partial 0})^2 \quad (2.3)$$

– стоимость серийного производства 1 изделия с долговечностью $Т_\partial$;

$$C_{1ГЭ}(T_\partial) = S_3(T_{\partial 0}) - K_{1ГЭ}(T_\partial - T_{\partial 0}) \quad (2.4)$$

– стоимость годовой эксплуатации 1 изделия с долговечностью $Т_\partial$;

где $T_{\partial 0}$ – выбранное базовое значение долговечности;

S_1, S_2, S_3 – стоимости НИОКР 1 изделия, серийного производства 1 изделия, стоимости годовой эксплуатации 1 изделия при долговечности $T_\partial = T_{\partial 0}$.

$K_{1П}$, $K_{2П}$, $K_{НО}$, $K_{1ГЭ}$ – коэффициенты, заданные числа.

2.2. Метод решения задачи

2.2.1. Решение задачи аналитическим методом по заданной целевой функции

Задаются значения следующих коэффициентов:

$$S_1, K_{НО}, K, K_{2П}, S_3, K_{1ГЭ}, T_{\partial 0}, T, m. \quad (2.5)$$

Подставив выражения (2.2), (2.3), (2.4) в выражение (2.1) с заданными коэффициентами и значениями T и m, а функция (2.1) примет вид:

$$C_{\Sigma} = \left[S_1(T_{\partial 0}) + K_{HO}(T_{\partial} - T_{\partial 0})\right] + \left[S_2(T_{\partial 0}) + K_{1\Pi}(T_{\partial} - T_{\partial 0}) + K_{2\Pi}(T_{\partial} - T_{\partial 0})^2\right]\frac{T \cdot m}{T_{\partial}}$$

$$+ \left[S_3(T_{\partial 0}) - K_{1\Gamma Э}(T_{\partial} - T_{\partial 0})\right] T \cdot m = S_1(T_{\partial 0}) + K_{H0}(T_{\partial}) - K_{HO}(T_{\partial 0}) + \frac{S_2(T_{\partial 0}) \cdot T \cdot m}{T_{\partial}} +$$

$$+ \frac{K_{1\Pi}{T_d}^2 Tm}{T_{\partial}} - \frac{K_{1\Pi}T_{\partial 0}Tm}{T_{\partial}} + \frac{K_{2\Pi}T_{\partial}^2 Tm}{T_{\partial}} - \frac{2K_{2\Pi}T_{\partial}T_{\partial 0}Tm}{T_{\partial}} + \frac{K_{2\Pi}T_{\partial 0}^2 Tm}{T_{\partial}} +$$

$$+ S_3(T_{\partial 0})Tm - K_{1\Gamma Э}T_{\partial}Tm + K_{1\Gamma Э}T_{\partial 0}Tm$$

$$C_{\Sigma} = S_1(T_{\partial 0}) + K_{1\Pi}Tm + S_3(T_{\partial 0})Tm + T_{\partial 0}(-K_{HO} - 2K_{2\Pi}Tm + K_{1\Gamma Э}Tm) +$$
$$+ T_{\partial}\left(K_{HO} + K_{2\Pi}Tm - K_{1\Gamma Э}Tm\right) + \frac{1}{T_{\partial}}\left(S_2(T_{\partial 0})Tm - K_{1\Pi}T_{\partial 0}Tm + K_{2\Pi}T_{\partial 0}^2 Tm\right) \quad (2.6)$$

Необходимые условия экстремума:

$$\frac{dC_{\Sigma}}{dT_{\partial}} = K_{HO} + K_{2\Pi}Tm - K_{1\Gamma Э}Tm - \frac{1}{T_{\partial}^2}\left(S_2(T_{\partial 0})Tm - K_{1\Pi}T_{\partial 0}Tm + K_{2\Pi}T_{\partial 0}^2 Tm\right) \quad (2.7)$$

$$\frac{dC_{\Sigma}}{dT\partial} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{T_{\partial}^2}\left(S_2(T_{\partial 0})Tm - K_{1\Pi}T_{\partial 0}Tm + K_{2\Pi}T_{\partial 0}^2 Tm\right) = K_{HO} + K_{2\Pi}Tm - K_{1\Gamma Э}Tm \quad (2.9)$$

$$T_{\partial}^{*} = \sqrt{\frac{T \cdot m \cdot \left(S_2(T_{\partial 0}) - K_{1\Pi}T_{\partial 0} + K_{2\Pi}T_{\partial 0}^2\right)}{K_{HO} + K_{2\Pi}Tm - K_{1\Gamma Э}Tm}}. \quad (2.10)$$

2.2.2. Решение задачи при аппроксимации исходной целевой функции в ряд Тейлора

Разложим функцию (2.7) в ряд Тейлора, ограничившись вторым порядком производной:

$$C_{\Sigma} = f(T_{\partial 0}) + \left.\frac{df(T_{\partial})}{dT_{\partial}}\right|_{T_{\partial 0}} \cdot \Delta T_{\partial} + \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{d^2 f(T_{\partial})}{d{T_{\partial}}^2}\right|_{T_{\partial 0}} \cdot \Delta T_{\partial}^2 + 0, \quad (2.11)$$

где $\Delta T_{\partial} = (T_{\partial} - T_{\partial 0})$.

$T_{\partial 0}$ – базовое значение T_{∂}.

Введем обозначения:

$$f(T_{\partial 0})-\left.\frac{df(T_\partial)}{dT_\partial}\right|_{T\partial 0}\cdot T_{\partial 0}-\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2 f(T_\partial)}{dT_\partial^{\ 2}}\right|_{T_{\partial 0}}\cdot T_{\partial 0}^2=a_0 \qquad (2.12)$$

$$\left.\frac{df(T_\partial)}{dT_\partial}\right|_{T_{\partial 0}}=a_1\,;\ \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2 f(T_\partial)}{dT_\partial^{\ 2}}\right|_{T_{\partial 0}}=a_2 \qquad (2.13)$$

Подставив (2.12) и (2.13) в (2.11), получим выражение функции одной переменной, приведённое в лабораторной работе № 1.

Требуется исследовать её на экстремум и полученное оптимальное значение T_∂ сравнить со значением, вычисленным по исходной целевой функции, вычислив относительную величину отклонения этих значений.

2.3. Пример выполнения задания

2.3.1. Постановка задачи

Решается задача определения оптимальной долговечности (срока службы) изделия, участвующего в технологическом процессе, при котором затраты на планируемом временном отрезке T при использовании изделия с долговечностью T_∂ будут минимальны.

Суммарные затраты:

$$C_\Sigma(T,T_\partial)=C_{но}(T_\partial)+C_{1П}(T_\partial)\frac{T\cdot m}{T_\partial}+C_{1ГЭ}(T_\partial)\cdot T\cdot m \qquad (2.1)$$

$$C_{НО}(T_\partial)=S_1(T_{\partial 0})+K_{НО}(T_\partial-T_{\partial 0}) \qquad (2.2)$$

– стоимость НИОКР ;

$$C_{1П}(T_\partial)=S_2(T_{\partial 0})+K_{1П}(T_\partial-T_{\partial 0})+K_{2П}(T_\partial-T_{\partial 0})^2 \qquad (2.3)$$

– стоимость серийного производства 1 изделия с долговечностью T_∂;

$$C_{1ГЭ}(T_\partial)=S_3(T_{\partial 0})-K_{1ГЭ}(T_\partial-T_{\partial 0}) \qquad (2.4)$$

– стоимость годовой эксплуатации 1 изделия с долговечностью T_∂;
где $T_{\partial 0}$ – выбранное базовое значение долговечности;

S_1, S_2, S_3 – стоимости НИОКР 1 изделия, серийного производства 1 изделия, стоимости годовой эксплуатации 1 изделия при долговечности $T_\partial = T_{\partial 0}$.

$K_{1П}$, $K_{2П}$, $K_{НО}$, $K_{1ГЭ}$ – коэффициенты, заданные числа.

2.3.2. Метод решения задачи

Решение задачи аналитическим методом по заданной целевой функции

Заданы следующие значения коэффициентов:

$S_1 = 20 \cdot 10^3 \cdot 1.01 = 20200$

$K_{HO} = 70 \cdot 10^3 \cdot 1.01 = 70700$

$S_2 = 3720 \cdot 1.01 = 3757.2$

$K_{1П} = 40 \cdot 1.015 = 40{,}6$

$K_{2П} = 200 \cdot 1.015 = 203$

$S_3 = 10^3 \cdot 1.015 = 1015$

$K_{1ГЭ} = 150 \cdot 1.015 = 152{,}25$

$T_{\partial 0} = 3$

$T = 10$

$m = 50$

Подставим выражения (2), (3), (4) в выражение (1) с заданными коэффициентами и значениями T и m. Тогда функция (1) примет вид:

$$C_\Sigma = \left[S_1(T_{\partial 0}) + K_{HO}(T_\partial - T_{\partial 0})\right] + \left[S_2(T_{\partial 0}) + K_{1П}(T_\partial - T_{\partial 0}) + K_{2П}(T_\partial - T_{\partial 0})^2\right] \cdot \frac{T \cdot m}{T_\partial}$$

$$+ \left[S_3(T_{\partial 0}) - K_{1ГЭ}(T_\partial - T_{\partial 0})\right] T \cdot m = S_1(T_{\partial 0}) + K_{H0}(T_\partial) - K_{HO}(T_{\partial 0}) + \frac{S_2(T_{\partial 0}) \cdot T \cdot m}{T_\partial} +$$

$$+ \frac{K_{1П} T_d{}^2 Tm}{T_\partial} - \frac{K_{1П} T_{\partial 0} Tm}{T_\partial} + \frac{K_{2П} T_\partial^2 Tm}{T_\partial} - \frac{2K_{2П} T_\partial T_{\partial 0} Tm}{T_\partial} + \frac{K_{2П} T_{\partial 0}^2 Tm}{T_\partial} +$$

$$+ S_3(T_{\partial 0})Tm - K_{1ГЭ} T_\partial Tm + K_{1ГЭ} T_{\partial 0} Tm$$

$$C_\Sigma = S_1(T_{\partial 0}) + K_{1П} Tm + S_3(T_{\partial 0})Tm + T_{\partial 0}(-K_{HO} - 2K_{2П} Tm + K_{1ГЭ} Tm) +$$
$$+ T_\partial \left(K_{HO} + K_{2П} Tm - K_{1ГЭ} Tm\right) + \frac{1}{T_\partial}\left(S_2(T_{\partial 0})Tm - K_{1П} T_{\partial 0} Tm + K_{2П} T_{\partial 0}^2 Tm\right) \quad (6)$$

Подставив заданные значения коэффициентов (5) в выражение (6), получим:

$$C_\Sigma = T_\partial(70700 + 203 \cdot 10 \cdot 50 - 152.25 \cdot 10 \cdot 50) + \frac{1}{T_\partial}(3757.2 \cdot 10 \cdot 50 - 40.6 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 50 +$$

$$+ 203 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 9) + 3(-70700 - 2 \cdot 203 \cdot 10 \cdot 50 + 152.25 \cdot 10 \cdot 50) + 20200 + 40.6 \cdot 10 \cdot 50 +$$

$$+ 1015 \cdot 10 \cdot 50 = 96075 \cdot T_\partial + 2731200 \cdot \frac{1}{T_\partial} + 3(-197575) + 548000$$

$$C_\Sigma = 96075 \cdot T_\partial + 2731200 \cdot \frac{1}{T_\partial} - 44725 \quad (7)$$

Необходимые условия экстремума:

$$\frac{dC_{\Sigma}}{dT_{\partial}} = K_{HO} + K_{2\Pi}Tm - K_{1ГЭ}Tm - \frac{1}{T_{\partial}^{2}}\left(K_{2}(T_{\partial 0})Tm - K_{1\Pi}T_{\partial 0}Tm + K_{2\Pi}T_{\partial 0}^{2}Tm\right)$$

$$\frac{dC_{\Sigma}}{dT\partial} = 0$$

$$\frac{1}{T_{\partial}^{2}}\left(K_{2}(T_{\partial 0})Tm - K_{1\Pi}T_{\partial 0}Tm + K_{2\Pi}T_{\partial 0}^{2}Tm\right) = K_{HO} + K_{2\Pi}Tm - K_{1ГЭ}Tm$$

$$T_{\partial}^{*} = \sqrt{\frac{T \cdot m \cdot \left(K_{2}(T_{\partial 0}) - K_{1\Pi}T_{\partial 0} + K_{2\Pi}T_{\partial 0}^{2}\right)}{K_{HO} + K_{2\Pi}Tm - K_{1ГЭ}Tm}} \qquad (8)$$

Тогда оптимальное значение долговечности (8) будет равно:

$$T_{\partial}^{*} = \sqrt{\frac{10 \cdot 50(3757.2 + 203 \cdot 9 - 40.6 \cdot 3}{70700 - (152.25 - 203) \cdot 10 \cdot 50}} = \sqrt{\frac{500 \cdot 5462.4}{70700 + 25375}} = \sqrt{\frac{2731200}{96075}} = \qquad (9)$$
$$= \sqrt{28.427} = 5.33$$

Решение задачи при аппроксимации исходной целевой функции в ряд Тейлора

Разложим функцию (7) в ряд Тейлора, ограничившись вторым порядком производной:

$$C_{\Sigma} = f(T_{\partial 0}) + \left.\frac{df(T_{\partial})}{dT_{\partial}}\right|_{T_{\partial 0}} \cdot \Delta T_{\partial} + \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{d^{2} f(T_{\partial})}{dT_{\partial}^{2}}\right|_{T_{\partial 0}} \cdot \Delta T_{\partial}^{2} + 0\,, \qquad (10)$$

где $\Delta T_{\partial} = (T_{\partial} - T_{\partial 0})$ (11)

Из выражения (10) с учетом (11) получим:

$$C_{\Sigma} = (96075 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2731200 - 44725) + (96075 - \frac{1}{9} \cdot 2731200) \cdot (T_{\partial} - 3) +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2731200}{27}) \cdot (T_{\partial} - 3)^{2} = 1153900 + 96075 \cdot T_{\partial} - 288225 - \frac{1}{3} \cdot 910400 \cdot T_{\partial} +$$
$$+ 910400 + \frac{910400}{9} \cdot T_{\partial}^{2} - 2 \cdot \frac{910400}{3} \cdot T_{\partial} + 910400$$

$$C_{\Sigma} = \frac{910400}{9} \cdot T_{\partial}^{2} - 814325 \cdot T_{\partial} + 2686475 \qquad (12)$$

a) Необходимое условие экстремума:

$$\frac{dC_\Sigma}{dT_\partial} = 0$$

$$\frac{dC_\Sigma}{dT_\partial} = 2 \cdot \frac{910400}{9} T_\partial - 814325 = 0$$

$$T_\partial^* = \frac{814325 \cdot 9}{2 \cdot 910400} = \frac{7328925}{1820800} = 4.025$$

b) Достаточное условие экстремума:

$$\frac{d^2 C_\Sigma(T_\partial)}{dT_\partial^{\ 2}} = 2 \cdot \frac{910400}{9} = 202311.1$$

Так как порядок, впервые не обращающейся в нуль производной равен 2 (четный), то функция имеет экстремум, а так как эта производная положительная, то функция имеет минимум.

$$T_{\partial \min}^* = 4.025$$

$$C_\Sigma(T_{\partial \min}^*) = \frac{910400}{9} \cdot 4.025^2 - 814325 \cdot 4.025 + 2686475 = 1047597.1$$

2.3.3. Результаты расчетов

Решая аналитическим методом данную задачу, получено оптимальное значение долговечности, равное $T_\partial^* = 5.33$. Оно отличается от оптимального значения долговечности, найденного методом разложения в ряд Тейлора, равного $T_\partial^* = 4.025$, на 25%.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3
Решение одномерной задачи статической оптимизации численными методами

3.1. Постановка задачи

Требуется найти экстремум функции $y = f(x)$,

где $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Левая граница интервала поиска: $x_{\min} = x^* - 0{,}3|x^*| = a$.

Правая граница интервала поиска: $x_{\max} = x^* + 0{,}4|x^*| = b$,

где x^* – точка экстремума функции $f(x)$, найденная аналитическим методом.

Погрешность нахождения экстремума $\varepsilon = 0{,}01(b - a)$.

При этом нахождение экстремума должно реализовываться следующими методами:

– половинного деления;
– «золотого» сечения;
– с использованием чисел Фибоначчи.

3.2. Метод половинного деления

Определяется интервал поиска (a, b).

Задается точность ε – точность местоположения экстремума от переменной u.

Сущность метода (на примере нахождения минимума):

Исходный интервал делится пополам, т.е. $(b_1 + a_1)/2 = u_1$

Далее делаются шаги вправо и влево на величину $\delta = (0.1, \dots ,0.5)\ \varepsilon$.

$u_1^1 = u_1 - \delta$, находим значения Q(u_1^1)

$u_1^2 = u_1 + \delta$, находим значения Q(u_1^2)

Затем сравниваем эти значения.

Если $Q(u_i^2) < Q(u_i^1)$, рассматриваем новый отрезок ($a_{i+1} = u_i^1$; $b_{i+1} = b_i$).

Затем сравниваем эти значения.

Далее процедура сокращения интервала поиска повторяется.

Процедуры сокращения интервала поиска заканчиваются когда $(b - a)\cdot(1/2)^i = < \varepsilon$.

Число обращений функций – $N = i\cdot 2$.

3.3. Метод «золотого сечения»

В этом методе отрезок $[a, b]$ разбивается точками x_1 и x_2, используя пропорцию золотого сечения:

$$|ab| / |x_1b| = |x_1b| / |ax_1| \text{ (для точки } x_1),$$

$$|ab| / |ax_2| = |ax_2| / |x_2b| \text{ (для точки } x_2)$$

К золотому сечению приводит деление отрезка на две неравные части таким образом, что отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части.

Здесь и далее x_1 будет левее x_2, а $|ax_1| = |x_2b|$,

т.е. если известна x_1, то $x_2 = b - (x_1 - a)$,

а если известна x_2, то $x_1 = a + (b - x_2)$.

Находим значение функции в этих точках. В случае минимизации функции при условии $F(x_1) \le F(x_2)$ отрезок $[a, b]$ сужается до длины с новыми границами: $a_1 = a$, $b_1 = x_2$, а при условии $F(x_2) < F(x_1)$ отрезок $[a, b]$ сужается до длины с новыми границами: $a_1 = x_1$, $b_1 = b$.

В случае максимизации функции при условии $F(x_1) \ge F(x_2)$ отрезок $[a, b]$ сужается до длины с новыми границами: $a_1 = a$, $b_1 = x_2$, а при условии $F(x_2) \le F(x_1)$ отрезок $[a, b]$ сужается до длины с новыми границами: $a_1 = x_1$, $b_1 = b$.

Далее процедура использования стратегии золотого сечения повторяется для большего отрезка в полученном интервале поиска. Поиск заканчивается, когда $b_i - a_i <= \varepsilon$, где i – число сокращений интервала поиска.

Число вычислений функции $N = i+1$

3.4. Метод с использованием чисел Фибоначчи

Используются следующие числа Фибоначчи, формируемые по алгоритму: $F_0 = F_1 = 1$; для $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ для i=2,3….. Например,

I	**0,**	**1,**	**2,**	**3,**	**4,**	**5,**	**6,**	**7…..**
Fi	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	2…..

Вначале вычисляют число $N=(b-a)/\varepsilon$. Затем в ряду чисел Фибоначчи находят пару соседних чисел, удовлетворяющих условию $F_{s-1} < N \le F_s$. Далее вычисляют $X_1 = a + dx \cdot F_{(s-2)}$ и $X_2 = a + dx \cdot F_{(s-2-1)}$ и значение функции в этих точках: $Q(X_1)$ и $Q(X_2)$. Далее движение в сторону экстремума выполняется по общей формуле: $X_{i+1} = X_t \pm sign\ (X_i - X_{i-1}) \cdot sign\ |Q(Xi) - Q(X_{i-1})|\ \Delta \cdot F_{s-2-i}$, i = 2, 3, … Здесь знак «+»ставится в задаче максимизации функции, а знак «–» ставится в задаче минимизации функции.

X_t есть значение X, при котором получено наилучшее значение функции на предыдущих шагах. $Sign\ (z)$ есть знаковая функция. $Sign\ (z)=-1$, если $z \le 0$. $Sign\ (z)=1$, если $z > 0$.

Признаком окончания поиска является условие, когда весь ряд чисел Фибоначчи будет исчерпан. Число вычислений функции при этом равно s–1.

3.5. Пример выполнения работы

Постановка задачи.

Требуется найти экстремум функции $y = f(x)$,

где $f(x) = 10 - 48x + 16x^2$

Левая граница интервала поиска: $x_{\min} = x^* - 0{,}3\left|x^*\right| = a = 1{,}05$.

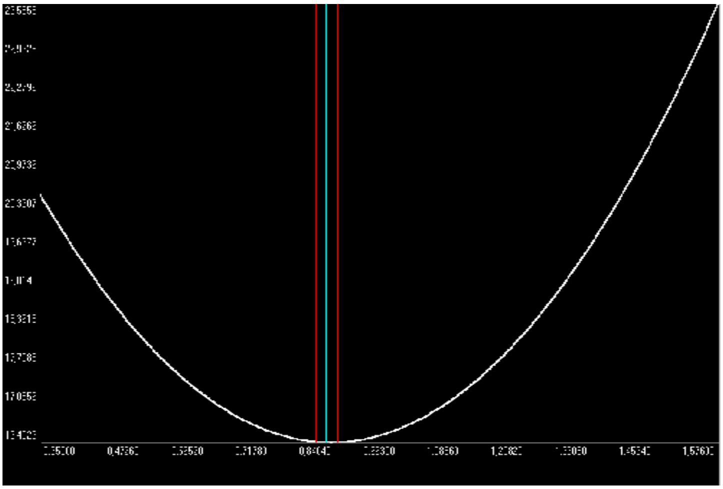
Правая граница интервала поиска: $x_{\max} = x^* + 0{,}4\left|x^*\right| = b = 2{,}1$, так как $x^* = 1{,}5$ – точка экстремума функции $f(x)$, найденная аналитическим методом.

Погрешность нахождения экстремума

$\varepsilon = 0{,}01(b - a) = 0{,}01(2{,}1 - 1{,}05) = 0{,}0105$

3.5.1. Поиск экстремума функции методом половинного деления

График функции



Левая граница отрезка [A, B]: A = 1,05

Правая граница отрезка [A, B]: B = 2,1

Требуемая точность: E = 0,01

б = 0.05 · E = 0,0005

***Шаг N*: 1**

Текущий отрезок [A, B]:

A = 1,05

B = 2,1

B–A = 1,05

Так как отрезок B–A > E, то отрезок сужается.

Отложим по обе стороны от середины текущего отрезка [A, B] точки

$U1 = (A + B)/2 - б = 1{,}5745$

$U2 = (A + B)/2 + б = 1{,}5755$

и отстоящие от середины отрезка [A, B] на расстояние *б*.

Вычислим значения функции в точках $U1$ и $U2$

$Q1 = F(U1) = -25{,}911196$

$Q2 = F(U2) = -25{,}908796$

Так как $Q1 <= Q2$, то далее сужается отрезок [A, B]:

$A = A = 1{,}05$

$B = U2 = 1{,}5755$

***Шаг N:* 2**

Текущий отрезок [A, B]:

A = 1,05

B = 1,5755

B–A = 0,5255

Так как отрезок B–A > E, то отрезок сужается.

Отложим по обе стороны от середины текущего отрезка [A, B] точки

$U1 = (A + B)/2 - б = 1{,}31225$

$U2 = (A + B)/2 + б = 1{,}31325$

и отстоящие от середины отрезка [A, B] на расстояние *б*.

Вычислим значения функции в точках $U1$ и $U2$

$Q1 = F(U1) = -25{,}435999$

$Q2 = F(U2) = -25{,}441991$.

Так как $Q1 > Q2$, то далее сужается отрезок [A, B]:

$A = U1 = 1{,}31225$

$B = B = 1{,}5755$

……………………..

***Шаг N:* 7**

Текущий отрезок [A, B]:

A = 1,492546875

B = 1,5099375

B–A = 0,017390625.

Так как отрезок $B–A > E$, то отрезок сужается.

Отложим по обе стороны от середины текущего отрезка $[A, B]$ точки

$U1 = (A + B)/2 – б = 1{,}5007421875$

$U2 = (A + B)/2 + б = 1{,}5017421875$

и отстоящие от середины отрезка $[A, B]$ на расстояние *б*.

Вычислим значения функции в точках $U1$ и $U2$

$Q1 = F(U1) = -25{,}9999911865234$

$Q2 = F(U2) = -25{,}9999514365234$

Так как $Q1 <= Q2$, то далее сужается отрезок $[A, B]$:

$A = A = 1{,}492546875$

$B = U2 = 1{,}5017421875$

***Шаг N:* 8**

Текущий отрезок $[A, B]$:

$A = 1{,}492546875$

$B = 1{,}5017421875$

$B–A = 0{,}00919531249999994$.

Так как отрезок $B – A < E$, то требуемая точность достигнута.
Точка минимума: $X_{min} = B = 1{,}5017421875$.
Значение функции в точке X_{min}: $F(X_{min}) = -25{,}9999514365234$.
Поиск окончен.

3.5.2. Поиск экстремума функции методом «Золотого сечения» Описание алгоритма поиска

Исследуемая функция: $10–48 \cdot x+16 \cdot x \cdot x$
Левая граница отрезка $[A, B]$: $A = 1{,}05$
Правая граница отрезка $[A, B]$: $B = 2{,}1$
Требуемая точность: $E = 0{,}01$

Разобьем текущий отрезок $[A; B]$ точками $X1$ и $X2$, используя пропорцию золотого сечения:

$|AB| / |X1\ B| = |X1\ B| / |A\ X1|$ (для точки $X1$)

$|AB| / |A\ X2| = |A\ X2| / |X2\ B|$ (для точки $X2$).

Здесь и далее $X1$ будет левее $X2$, а $|AX1| = |X2B|$,
т.е. если известна $X1$, то $X2 = B – (X1 – A)$,
а если известна $X2$, то $X1 = A + (B – X2)$.

***Шаг N:* 1**

Текущий отрезок $[A, B]$:

$A = 1{,}05$

$B = 2{,}1$

$B–A = 1{,}05$.

Так как отрезок $B–A > E$, то отрезок сужается.

$X1 = 1,449$, $F1 = F(X1) = -25,958384$

$X2 = 1,701$, $F2 = F(X2) = -25,353584$.

Так как $F1 <= F2$, то далее сужается отрезок $[A, B]$:
$A = A = 1,05$
$B = X2 = 1,701$.

***Шаг N:* 2**
Текущий отрезок $[A, B]$:

$A = 1,05$

$B = 1,701$

$B–A = 0,651$.

Так как отрезок $B–A > E$, то отрезок сужается.

$X1 = 1,29738$, $F1 = F(X1) = -25,3431221696$

$X2 = 1,45362$, $F2 = F(X2) = -25,9655823296$.

Так как $F1 > F2$, то далее сужается отрезок $[A, B]$:
$A = X1 = 1,29738$
$B = B = 1,701$

***Шаг N:* 10**
Текущий отрезок $[A, B]$:

$A = 1,49602107020964$

$B = 1,51023501108321$

$B–A = 0,0142139408735766$.

Так как отрезок $B–A > E$, то отрезок сужается.

$X1 = 1,5014223677416$, $F1 = F(X1) = -25,9999676299201$

$X2 = 1,50483371355125$, $F2 = F(X2) = -25,9996261634129$.

Так как $F1 <= F2$, то далее сужается отрезок $[A, B]$:
$A = A = 1,49602107020964$
$B = X2 = 1,50483371355125$.

***Шаг N:* 11**
Текущий отрезок $[A, B]$:
$A = 1,49602107020964$
$B = 1,50483371355125$
$B–A = 0,00881264334161758$.
Так как отрезок $B–A < E$, то требуемая точность достигнута.
Точка минимума: $X_{min} = A = 1,49602107020964$.
Значение функции в точке X_{min}: $F(X_{min}) = -25,9997466898836$.
Поиск окончен.

3.5.3. Поиск экстремума функции методом с использованием чисел Фибоначчи

Исследуемая функция: 10–48 · x+16 · x · x
Левая граница отрезка [A, B]: A = 1,05
Правая граница отрезка [A, B]: B = 2,1
Требуемая точность: E = 0,01

$N = (B–A)/E = 105$

$F(s–1) = 89 < (N = 105) <= F(s) = 144$

Элементарный шаг - *delta* (*dm*) = (*B*–*A*)/*F*(*s*) = 0,00729166666666667
Подготовительный шаг
Вычислим значение функции на левой границе отрезка:

$X1 = A =$ 1,05

$U1 = Q(X1) =$ -22,76

Будут использоваться следующие числа Фибоначчи:
55
34
21
13
8
5
3
2
1

***Шаг N:* 1**
Шаг делается из точки $X1$ = 1,05,
при этом $Q(X1)$ = -22,76 вычислено шагом раньше.

Величина шага dx = (dm = 0,00729166666666667) · ($F(s–2–0)$=55) = 0,401041666666667.

$X2 = X1 + dx$ = 1,05 + 0,401041666666667=1,45104166666667.

$Q(X2)$ = -25,9616493055556.

Шаг оказался удачным, так как ($Q2$ = -25,9616493055556) <= ($R1$ = -22,76).
Точка $X2$ оказалась удачнее точки $X1$ из которой делали шаг.

Следующий шаг будет сделан из удачной точки полученной на этом шаге:

$X1 = X2$ = 1,45104166666667.

При этом будет использовано $Q1 = Q(X1=X2)$ = -25,9616493055556 уже вычисленное на проделанном шаге.

***Шаг N:* 2**

Шаг делается из точки $X1$ = 1,45104166666667,
при этом Q(X1) = -25,9616493055556 вычислено шагом раньше.

Величина шага dx = (dm = 0,00729166666666667) · (F(s–2–1)=34) = 0,247916666666667.

$X2$ = $X1$ + dx = 1,45104166666667 + 0,247916666666667 = = 1,69895833333333.

Q($X2$) = -25,3666493055556.

Шаг оказался неудачным, так как ($Q2$ = -25,3666493055556) > ($R1$ = =-25,9616493055556).

Точка $X2$ оказалась хуже точки $X1$, из которой делали шаг.

Следующий шаг будет сделан из более удачной точки $X1$,

но в противоположном направлении, т.е. знак приращения будет противоположен знаку приращения на неудачном шаге.

При этом будет использовано $Q1$ = Q($X1$) = -25,9616493055556, уже вычисленное шагом ранее.

***Шаг N:* 8**

Шаг делается из точки $X1$ = 1,509375,

при этом Q($X1$) = -25,99859375 вычислено шагом раньше.

Величина шага dx = (dm = 0,00729166666666667) · (F(s–2–7)=2) = 0,0145833333333333.

$X2$ = $X1$ + dx = 1,509375 + 0,0145833333333333=1,52395833333333.

Q($X2$) = -25,9908159722222.

Шаг оказался неудачным, так как ($Q2$ = -25,9908159722222) > ($R1$ = -25,99859375).

Точка $X2$ оказалась хуже точки $X1$, из которой делали шаг.

Следующий шаг будет сделан из более удачной точки $X1$,

но в противоположном направлении, т.е. знак приращения будет противоположен знаку приращения на неудачном шаге.

При этом будет использовано $Q1$ = Q($X1$) = -25,99859375 уже вычисленное шагом ранее.

***Шаг N:* 9**

Шаг делается из точки $X1$ = 1,509375,

при этом Q($X1$) = -25,99859375 вычислено шагом раньше.

Величина шага dx = (dm = 0,00729166666666667) · (F(s–2–8)=1) = 0,00729166666666667.

$X2$ = $X1$ – dx = 1,509375 – 0,00729166666666667=1,50208333333333.

Q($X2$) = -25,9999305555556.

Шаг оказался удачным, так как ($Q2$ = -25,9999305555556) <= ($R1$ = -25,99859375).

Точка $X2$ оказалась удачнее точки $X1$, из которой делали шаг.

Следующий шаг будет сделан из удачной точки, полученной на этом шаге:

$X1 = X2 = 1{,}50208333333333$.

При этом будет использовано $Q1 = Q(X1{=}X2) = -25{,}9999305555556$ уже вычисленное на проделанном шаге.

Все числа Фибоначчи исчерпаны. Итерации завершены.

$Q1 = -25{,}9999305555556$ $Q2 = -25{,}9999305555556$.

Так как $Q2 <= Q1$ то предыдущий шаг оказался удачным.

В качестве точки минимума принимается точка $X2$, которая оказалась лучше точки $X1$.

$X_{min} = 1{,}50208333333333$.

Сводная таблица результатов

№ метода	Наименование метода	X*	Y(X*)	ε	Число обращений к функции
1	Аналитический метод	1,5	-26	-	-
2	Метод половинного деления	1,50	-25,99	0,01	14
3	Метод «золотого» сечения	1,49	-25,99	0,01	11
4	Метод с использованием чисел Фибоначчи	1,50	-25,99	0,01	10

Вывод. Сравнивая результаты, полученные при вычислении экстремума функции численными методами с результатами аналитического метода, видим, что численные методы дают приблизительное значение экстремума функции, близкое к точному. Наиболее эффективным методом поиска оказался метод с использованием чисел Фибоначчи.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4
Решение многомерной задачи статической оптимизации численными методами

4.1. Постановка задачи

Задана функция: $Q(U_1, U_2, ..., U_{r-1}, U_r)$ (4.1)

конкретным выражением

$$f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 y + a_4 y^2 + a_5 xy ,$$

где $x = U_1, y = U_2$.

Границы интервалов поиска:

$x^{\min} = 0{,}9x^*, x^{\max} = 1{,}1x^*$;

$y^{\min} = 0{,}9y^*, y^{\max} = 1{,}1y^*$

Предельные значения производных:

$\frac{df}{dx} \le sigX \; , \frac{df}{dy} \le sigY$.

Начальные шаги по координатным осям:
Дельта*X*
Дельта*Y*
Базовый шаг в направлении градиента: *h*0
Заданное предельное значение модуля градиента: E
Найти экстремум функции методами:
Гаусса-Зейделя, градиента, наискорейшего спуска.
Требуется найти минимум функции.

4.2. Метод Гаусса-Зейделя

Описание алгоритма поиска

В этом методе последовательность переменных определяется рядом $U_1, U_2, ..., U_{r-1}, U_r$.

Алгоритм метода

Выбирается исходная точка поиска $U^0 = (U_1^0, U_2^0, ..., U_r^0)$

Вычисляется новая точка $U_1^1 = U_1^0 \pm sign \left.\frac{\Delta Q}{\Delta U_1}\right|_{U^0} \cdot h_1^1$,

где h_1^1 – величина рабочего шага.

Знак «+» ставится в задаче максимизации,
а знак «–» ставится в задаче минимизации.

Вычисляется величина $\Delta U_1 = U_1 - U_1^0$

Далее вычисляем

$$\Delta Q\big|_{U^0} = Q(U_1^0 + \Delta U, U_1^0, U_2^0, ..., U_r^0) - Q(U_1^0, U_2^0, ..., U_r^0)$$

Для произвольной переменной U_j^i:

$$U_j^i = U_{j1}^{i-1} \pm sign\frac{\Delta Q}{\Delta U_j}\bigg|_{U^{i-10}} \cdot h_j^i$$

Остановка поиска в направлении выбранной переменной производится, если функция перестает улучшаться, то есть при $\left|\frac{\Delta Q}{\Delta U_1}\right| \le \delta_1$, $\frac{\partial Q}{\partial U_1} \approx 0$. Затем изменяют следующую по порядку переменную до выполнения аналогичного условия.

Поиск заканчивается при выполнении условия:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\Delta Q(U_i)}{\Delta U_i}\right)^2} \le \Delta \quad , \quad \textit{или просто} \quad \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\Delta Q(U_i)}{\Delta U_i}\right)^2 \le \Delta_1,$$

4.2. Метод градиента

Алгоритм метода

Постановка задачи: $Q(U_1, U_2, ..., U_{r-1}, U_r) \to \min$

Формула градиента функции:

$$GradQ(U) = \nabla Q(U) = i_1\frac{\partial Q}{\partial U_1} + i_2\frac{\partial Q}{\partial U_2} + ... + i_r\frac{\partial Q}{\partial U_r},$$

где i_j – направляющие вектора по оси U_j. $\left|\nabla Q(U_1, .., U_r)\big|_{U^k}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial Q}{\partial U_j}\right)^2}$,

где U^k – точка приложения $\Delta Q(U)$

Признак окончания поиска:

$$\left|\nabla Q(U_1, .., U_r)\big|_{U^k}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial Q}{\partial U_j}\right)^2} \le \Delta \quad , \textit{где}\, \Delta - \textit{заданная} \quad \textit{величина}$$

Направление $Q(U_1, U_2, ..., U_{r-1}, U_r)$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha_j = \frac{\frac{\partial Q}{\partial U_j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\partial Q}{\partial U_k}\right)^2}}, \text{ где } j = \overline{1, r}.$$

Алгоритм поиска методом градиента:

Выбирается исходная точка поиска в области допустимых управлений (решений):

$U^1 = (U_1^1, U_2^1, ..., U_r^1)$.

В ней вычисляется значение функции, направляющие косинусы $\cos\alpha_j$ и оценки частных производных $\frac{\partial Q}{\partial U_j}$.

Перейдем от частных производных к отношению приращений:

$$\left.\frac{\Delta Q}{\Delta U_j}\right|_{U1} \approx \frac{\partial Q}{\partial U_j}$$

2. Направляющие косинусы вычисляются по следующей формуле:

$$\cos\alpha_j = \frac{\frac{\partial Q}{\partial U_j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\partial Q}{\partial U_k}\right)^2}}, \text{ где } j = \overline{1, r}.$$

1. Формируется шаг в направлении градиента следующим образом:

$$U_j^i = U_j^{i-1} \pm h^0 \cdot \cos\alpha_j, \text{ где } h^0 \cdot \cos\alpha_j = \Delta U_j^{i-1}$$

Знак «+» ставится в задачах максимизации,

«–» – в задачах минимизации.

Существуют различные способы формирования шага. Широко распространен способ формирования шага пропорционально модулю градиента.

$$\Delta U_j^i = h^0 \cdot \cos\alpha_j \cdot \left|\nabla Q(U)\right|_{U^{i-1}} = h^0 \cdot \frac{\frac{\Delta Q(U^{i-1})}{\Delta U_j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta U_k}\right)^2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta U_k}\right)^2} = h^0 \cdot \frac{\Delta Q(U^{i-1})}{\Delta U_j}.$$

h^0 – начальная величина шага.

2. Алгоритм движения вдоль j-й координатной оси:

$$U_j^i = U_j^{i-1} \pm h^0 \cdot \frac{\Delta Q(U^{i-1})}{\Delta U_j}.$$

При каждом шаге в направлении градиента вычисляется целевая функция в полученной точке и частные производные по каждой из переменных U_j.

Проверяется выполнение признака окончания поиска:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\Delta Q(U_i)}{\Delta U_i}\right)^2} \le \Delta \quad , \quad или \quad \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\Delta Q(U_i)}{\Delta U_i}\right)^2 \le \Delta_1 ,$$

где Δ, Δ_1 – малая величина.

4.3. Метод наискорейшего спуска

Алгоритм метода

Метод является синтезированным из двух описанных выше. В данном методе движение из исходной точки происходит в направлении градиента n до выполнения условия $\left|\frac{\Delta Q}{\Delta n}\right| \le \delta_1$, $\frac{\partial Q}{\partial n} \approx 0$. Из точки, в которой выполнено это условие, движение осуществляется в направлении градиента, т.е. перпендикулярно предыдущему направлению. Поиск заканчивается по тому же условию, что и в двух предыдущих.

4.4. Пример выполнения задания

Исследуемая функция

$$F(X, Y) = 100+38 \cdot x+2 \cdot x \cdot x+51 \cdot y+51 \cdot y \cdot y+20 \cdot x \cdot y$$

Интервал по X = [-374,86848,-339,16672]
Интервал по Y = [66,0288,72,9792]
Требуемая точность: E = 0,01
Начальный шаг $h0$ = 0,01
Сигма $sigX$ = 0,0001
Сигма $sigY$ = 0,0001
ДельтаX = 1E-5
ДельтаY = 1E-5

Координаты стартовой точки:
X начальное = -365,94304

Y начальное = 67,7664

4.4.1. Метод Гаусса-Зейделя

Значение функции в текущей точке $Fn(x, y)$ $F0$ = -4287,44717127684

Значение частной производной по *x* df/dy = -70,4441335983574

Значение частной производной по *y* df/dx = -355,687492992729

$df/dx < df/dy$. Начинаем поиск вдоль по оси *oy*

Вычислим новую точку $y = y - sign(df/dy) \cdot \mathrm{h}$ = 67,7689.

Шаг 1

Значение функции в текущей точке $F(x, y)$ = -4288,33607252681

Значение частной производной по y df/dy = -355,432491051033

Значение функции лучше, чем предыдущее. Fn = -4288,33607252681 $F0$ = -4287,44717127684

Вычислим новую точку $y = y - sign(df/dy) \cdot \mathrm{h}$ = 67,7714

$F0 = Fn$ = -4288,33607252681

Шаг 2

Значение функции в текущей точке $F(x, y)$ = -4289,22433627688

Значение частной производной по *y* df/dy = -355,177489109337

Значение функции лучше, чем предыдущее. Fn = -4289,22433627688 $F0$ = -4288,33607252681

Вычислим новую точку $y = y - sign(df/dy) \cdot h$ = 67,7739

$F0 = Fn$ = -4289,22433627688

Шаг 3

Значение функции в текущей точке $F(x, y)$ = -4290,1119625268

Значение частной производной по *y* df/dy = -354,922498809174

Значение функции лучше, чем предыдущее. Fn = -4290,1119625268 $F0$ = -4289,22433627688

Вычислим новую точку $y = y - sign(df/dy) \cdot h$ = 67,7764

$F0 = Fn$ = -4290,1119625268

Шаг 4

Значение функции в текущей точке $Fn(x, y)$ = -4910,409048045

Значение частной производной по x $\frac{df}{dx}$ = -0,0100815668702126

Значение функции Fn -4910,409048045 лучше, чем предыдущее $F0$ = -4910,40903229825

Вычислим новую точку $x = x - sign(\frac{df}{dx}) \cdot h$ = -359,920774375

$F0 = Fn$ = -4910,409048045

Шаг 5

Значение функции в текущей точке $Fn(x, y)$ = -4910,40905754192

Значение частной производной по x $\frac{df}{dx}$ = -0,00507570803165436

Значение функции Fn -4910,40905754192 лучше, чем предыдущее $F0$ = -4910,409048045

Вычислим новую точку $x = x - sign(\frac{df}{dx}) \cdot h$ = -359,919524375

$F0 = Fn$ = -4910,40905754192

Шаг 6

Значение функции в текущей точке $Fn(x, y)$ = -4910,40906078881

Значение частной производной по x $\frac{df}{dx}$ = -8,14907252788544E-5

Значение функции Fn -4910,40906078881 лучше, чем предыдущее $F0$ = -4910,40905754192

Частная производная $\frac{df}{dx}$ = -8,14907252788544E-5 меньше $sigx$ = 0,0001

Проверка на достижения условия выхода

Корень суммы квадратов частных производных

A = 0,903524739755089

Так как A (0,903524739755089) <= E (0,1) то поиск окончен.

Экстремум найден.

$$X_{min} = -359,919524375 \quad Y_{min} = 70,0838999999962$$

Значение функции в точке экстремума

$$F(X_{min}, Y_{min}) = -4910,40906078881$$

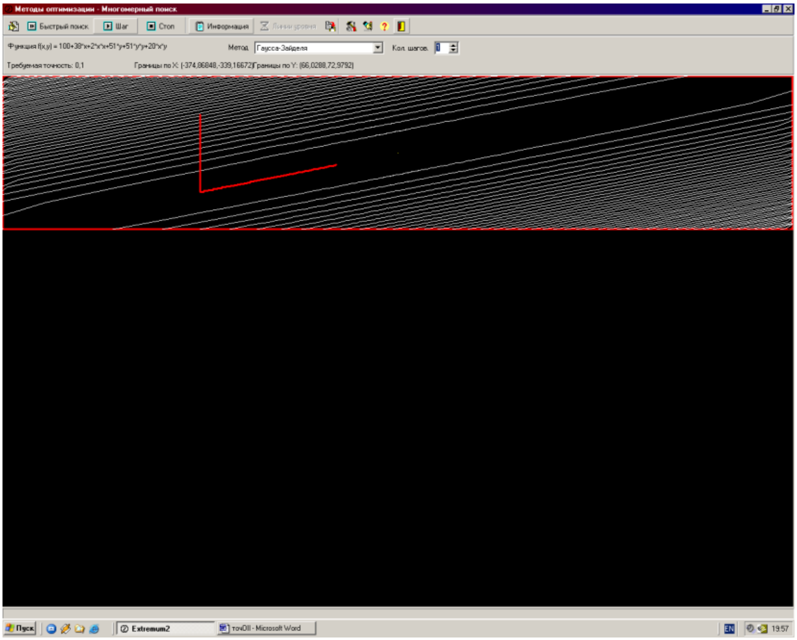
Экстремум найден.

$$X_{min} = -357,148864228791 \quad Y_{min} = 69,5297901322648$$

Значение функции в точке экстремума

$$F(X_{min}, Y_{min}) = -4910,74911253306$$

График функции



4.4.2. Метод градиента

Шаг 1

Делаем шаг из точки X = -365,94304 Y = 67,7664

Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4287,44717127684

Частная производная $^{df}\!/_{dx}$ (по X) = -70,4439589753747

Частная производная $^{df}\!/_{dy}$ (по Y) = -355,682899826206

Проверка на выход:

Корень суммы квадратов частных производных

A = 362,591611299687

Так как A (362,591611299687) > E (0,1), то продолжаем поиск.

Вычислим новые точки X и Y:

$X_{новое} = X - h0 \cdot {}^{df}\!/_{dx}$ = -365,238600410246

$Y_{новое} = Y - h0 \cdot {}^{df}\!/_{dy}$ = 71,3232289982621

Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -365,238600410246

Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по Y = 71,3232289982621

Шаг 2

Делаем шаг из точки X = -365,238600410246 Y = 71,3232289982621

Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4905,88566703646

Частная производная df/dx (по X) = 3,51038004737347

Частная производная df/dy (по Y) = 21,2024501524866

Проверка на выход:

Корень суммы квадратов частных производных

A = 21,4910832799483

Так как A (21,4910832799483) > E (0,1), то продолжаем поиск.

Вычислим новые точки X и Y

$X_{новое} = X - h0 \cdot df/dx$ = -365,27370421072

$Y_{новое} = Y - h0 \cdot df/dy$ = 71,1112044967372

Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -365,27370421072

Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по Y = 71,1112044967372

Шаг 3

Делаем шаг из точки X = -365,27370421072 Y = 71,1112044967372

Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4908,05924940115

Частная производная df/dx (по X) = -0,870526419021189

Частная производная df/dy (по Y) = -1,12612557131797

Проверка на выход:

Корень суммы квадратов частных производных

A = 1,42336750299776

Так как A (1,42336750299776) > E (0,1), то продолжаем поиск.

Вычислим новые точки X и Y

$X_{новое} = X - h0 \cdot df/dx$ = -365,26499894653

$Y_{новое} = Y - h0 \cdot df/dy$ = 71,1224657524504

Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -365,26499894653

Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по Y = 71,1224657524504.

Шаг 4

Делаем шаг из точки X = -358,290583220967 Y = 69,7531945287842
Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4910,68468116963

Частная производная ${df}/{dx}$ (по X) = -0,098241725936532

Частная производная ${df}/{dy}$ (по Y) = 0,0192777952179313

Проверка на выход:
Корень суммы квадратов частных производных
A = 0,100115284065187
Так как A (0,100115284065187) > E (0,1), то продолжаем поиск.
Вычислим новые точки X и Y:

$X_{новое} = X - h0 \cdot {df}/{dx}$ = -358,289600803708

$Y_{новое} = Y - h0 \cdot {df}/{dy}$ = 69,7530017508321

Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -358,289600803708

Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по Y = 69,7530017508321

Шаг 5

Делаем шаг из точки X = -358,289600803708 Y = 69,7530017508321
Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4910,68478057638

Частная производная ${df}/{dx}$ (по X) = -0,0981672201305628

Частная производная ${df}/{dy}$ (по Y) = 0,0192632433027029

Проверка на выход:
Корень суммы квадратов частных производных
A = 0,100039370503325
Так как A (0,100039370503325) > E (0,1), то продолжаем поиск.
Вычислим новые точки X и Y:

$X_{новое} = X - h0 \cdot {df}/{dx}$ = -358,288619131506

$Y_{новое} = Y - h0 \cdot {df}/{dy}$ = 69,752809118399

Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -358,288619131506

Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по $Y = 69{,}752809118399$

Шаг 6

Делаем шаг из точки $X = -358{,}288619131506$ $Y = 69{,}752809118399$

Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4910,68487983197

Частная производная df/dx (по X) = -0,0980938784778118

Частная производная df/dy (по Y) = 0,0192475272342563

Проверка на выход:

Корень суммы квадратов частных производных

$A = 0{,}0999643751516166$

Так как A (0,0999643751516166) <= E (0,1), то поиск окончен.

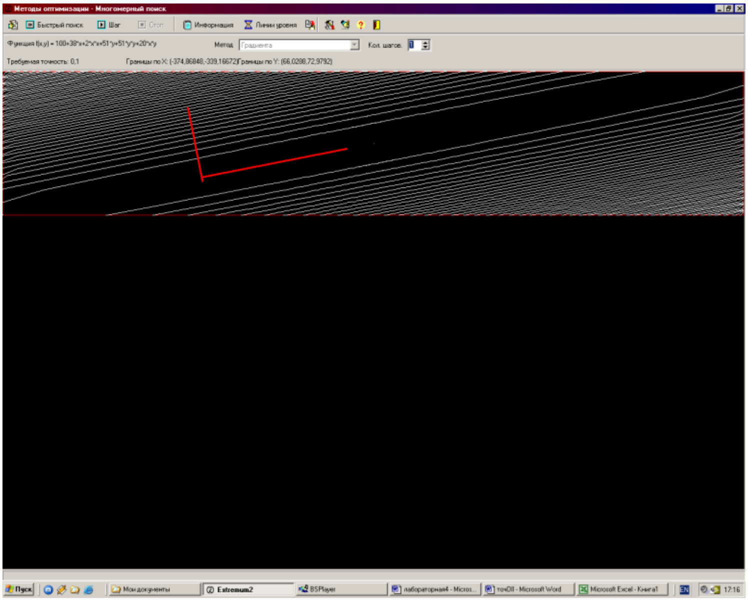
Экстремум найден.

$X_{min} = -358{,}288619131506$ $Y_{min} = 69{,}752809118399$

Значение функции в точке экстремума

$F(X_{min}, Y_{min}) = -4910{,}68487983197$

График функции



2.4.3. Метод наискорейшего спуска

Шаг 1

Делаем шаг из точки X = -365,94304 Y = 67,7664
Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4287,44717127684
Текущий шаг h = 0,1
Значение функции в текущей точке $F(X, Y)$ = -4287,44717127684
Значение частной производной по x df/dx = -70,4439589753747
Значение частной производной по y df/dy = -355,682899826206

Проверка на выход.
Корень суммы квадратов частных производных
A = 362,591611299687
Так как A (362,591611299687) > E (0,1), то продолжаем поиск.
Меняем направление. Вычислим направляющие косинусы.
Направляющий косинус по X $cosX$ = -0,194279064324938
Направляющий косинус по Y $cosY$ = -0,980946300856997
Значение частной производной по x df/dx = -70,4439589753747
Значение частной производной по y df/dy = -355,682899826206

Вычислим новую точку поиска.

$X_{новое} = X - sign(dfdx) \cdot |cosX| \cdot h$ = -365,923612093567

$Y_{новое} = Y - sign(dfdy) \cdot |cosY| \cdot h$ = 67,8644946300857

Значение функции в новой точке $F(X, Y)$ = -4323,1772158799

Проверка удачности шага.
Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -365,923612093567
Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по Y = 67,8644946300857

Шаг 2

Делаем шаг из точки X = -365,923612093567 Y = 67,8644946300857
Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4323,1772158799
Значение частной производной по x df/dx = -68,4043555520475
Значение частной производной по y df/dy = -345,288689713925

Вычислим новую точку поиска:

$X_{новое} = X - sign(\frac{df}{dx}) \cdot |cosX| \cdot h$ = -365,904184187135

$Y_{новое} = Y - sign(\frac{df}{dy}) \cdot |cosY| \cdot h$ = 67,9625892601714

Значение функции в новой точке $F(X, Y)$ = -4357,84801901889

Проверка удачности шага.

Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -365,904184187135

Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по Y = 67,9625892601714

Шаг 3

Делаем шаг из точки X = -365,904184187135 Y = 67,9625892601714

Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4357,84801901889

Значение частной производной по x $\frac{df}{dx}$ = -66,3647521287203

Значение частной производной по y $\frac{df}{dy}$ = -334,894479601644

Вычислим новую точку поиска.

$X_{новое} = X - sign(\frac{df}{dx}) \cdot |cosX| \cdot h$ = -365,884756280703

$Y_{новое} = Y - sign(\frac{df}{dy}) \cdot |cosY| \cdot h$ = 68,0606838902571

Значение функции в новой точке $F(X, Y)$ = -4391,45958069392

Проверка удачности шага.

Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -365,884756280703

Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по Y = 68,0606838902571

Шаг 4

Делаем шаг из точки X = -357,150410737705 Y = 69,5300131040769

Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4910,74909897527

Значение частной производной по x $\frac{df}{dx}$ = -0,00118045136332512

Значение частной производной по y $\frac{df}{dy}$ = 0,0582222128286958

Вычислим новую точку поиска.

$X_{новое} = X - sign(\frac{df}{dx}) \cdot |cosX| \cdot h$ = -357,148864228791

$Y_{новое} = Y - sign(\frac{df}{dy}) \cdot |cosY| \cdot h$ = 69,5297901322648

Значение функции в новой точке $F(X, Y)$ = -4910,74911253306

Проверка удачности шага.

Текущая точка по X приравнивается к новой вычисленной точке по X = -357,148864228791

Текущая точка по Y приравнивается к новой вычисленной точке по Y = 69,5297901322648

Шаг 5

Делаем шаг из точки X = -357,148864228791 Y = 69,5297901322648

Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4910,74911253306

Значение частной производной по x $\frac{df}{dx}$ = 0,00054540578275919

Значение частной производной по y $\frac{df}{dy}$ = 0,066409120336175

Вычислим новую точку поиска.

$X_{новое} = X - sign(\frac{df}{dx}) \cdot |cosX| \cdot h$ = -357,150410737705

$Y_{новое} = Y - sign(\frac{df}{dy}) \cdot |cosY| \cdot h$ = 69,5295671604527

Значение функции в новой точке $F(X, Y)$ = -4910,74911252246

Проверка удачности шага.

Так как $F(X_{новое}, Y_{новое})$ = -4910,74911252246 > = $F(X, Y)$ = -4910,74911253306, то делим шаг пополам.

Новый шаг h = 0,00078125

Так как текущее значение $h < sig$ (0,001), то приравниваем h к $h0$.

Шаг 6

Делаем шаг из точки X = -357,148864228791 Y = 69,5297901322648

Функция $F(X, Y)$ в данной точке = -4910,74911253306

Текущий шаг h = 0,1

Значение функции в текущей точке $F(X, Y)$ = -4910,74911253306

Значение частной производной по x $\frac{df}{dx}$ = 0,00054540578275919

Значение частной производной по y $\frac{df}{dy}$ = 0,066409120336175

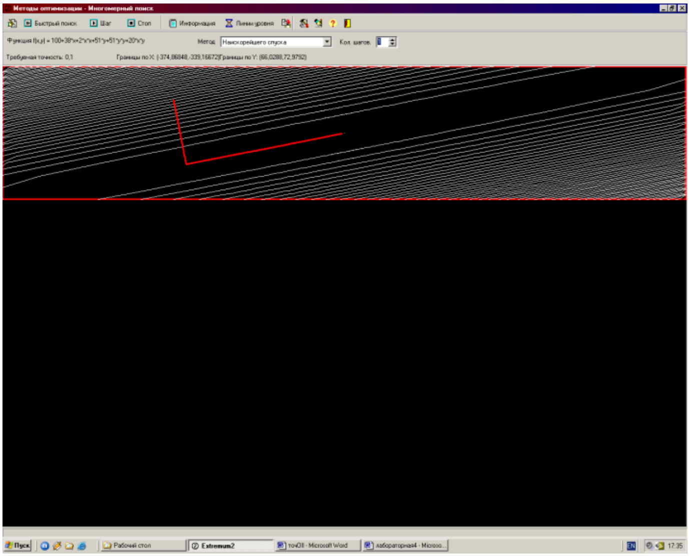
Проверка на выход.

Корень суммы квадратов частных производных

A = 0,0664113599566553

Так как A (0,0664113599566553) <= E (0,1), то поиск окончен.

График функции



Итоговая таблица

№ мето-да	Название метода	X^*	Y^*	$F(X^*,Y^*)$	E	Кол-во шагов	Кол-во вычис-лений целевой функции
1	Аналитичес-кий метод	-357,01	69,50	-4910,74	-	-	-
2	Метод Гаус-са-Зейделя	-359,91	70,08	-4910,40	0,1	2972	3328
3	Метод Градиента	-358,28	69,75	-4910,68	0,1	2455	7366
4	Метод наис-корейшего спуска	-357,14	69,52	-4910,74	0,1	11451	45817

Вывод: Сравнив результаты, полученные при вычислении экстремума функции численными методами, с результатами аналитического метода получили, что численные методы дают приблизительное значение экстремума функции, близкое к точному. Из численных методов самым эффективным оказался метод Градиента.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
Решение задачи оптимального вложения инвестиций, как задачи распределения, методом динамического программирования

5.1. Постановка задачи

Задан объем инвестиций $A = 5$. Требуется оптимально распределить этот объем на три мероприятия. Эффективность каждого мероприятия от вложенных инвестиций оценивается величиной прибыли $q_i(U_i)$.

$$Q = \sum_{i=1}^{3} q_i(U_i) \to \max_{u1,u2,u3 \in \Omega} \tag{5.1}$$

A – общий объем инвестиций;

U_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 – объем инвестиций в каждое мероприятие;

$q_i(U_i)$ – эффективность вложенных средств, которая выражается в виде составляющей эффекта вложенных средств (результат вложения средств в i-тое мероприятие – прибыль).

Нам даны следующие значения:

$$q_1(U_1) = 1{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot U_1 = 0{,}24\ U_1.$$

U_2	0	1	2	3	4	5
q_2	0	0,09	0,405	0,45	0,54	0,63

U_3	0	1	2	3	4	5
q_3	0	0,55	0,715	0,825	0,88	0,935

5.2. Метод решения

Данную задачу следует решать методом динамического программирования.

В основе динамического программирования лежит принцип оптимальности: «Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и управление, при которых система пришла в это состояние, последующее решение (управления) должны быть оптимальными по отношению к этому состоянию».

Сущность динамического программирования состоит в том, что задача большой размерности разбивается на ряд подзадач меньшей размерности (проводится декомпозиция). Это достигается разбивкой всего процесса на несколько стадий. Процесс решения задачи выполняется пошагово. На первом шаге вычисляют значение составляющей критерия оптимальности от одной стадии. На втором и последующих шагах оптимизируется суммарное приращение критерия оптимальности от вновь вводимой стадии процесса вместе с полученным результатом оптимизации на предыдущем шаге. Математически это представляется следующим образом:

Пусть критерий оптимальности имеет вид

$$Q=\sum_{i=1}^{N} q_i(S_{i-1},U_i)\ , \tag{5.2}$$

где S_i,U_i – соответственно состояние и управление i-ой стадии процесса. (i=1,2,…,N).

Последующие состояния определяются выражениями:

$$S_i = S_i(S_{i-1},U_i)\ . \tag{5.3}$$

Первый шаг оптимизации опишем выражением

$$F_{N-1,N}(S_{N-1}) = \max_{U_N}(\min) q_N(S_{N-1},U_N)\ .$$

Второй и последующий шаги описываются рекуррентным уравнением

$$F_{N-K,N}(S_{N-K}) = \max_{U_{N-K+1}}(\min)\left\{q_{N-K+1}(S_{N-K},U_{N-K+1}) + F_{N-K-1,N}(S_{N-K-1})\right\} \tag{5.4}$$

Выражения (5.3) и (5.4) называются функциональными уравнениями динамического программирования.

Пример выполнения задания:

1 шаг

$$F_1(S_1) = \max_{U_1=S_1}(S_1,U_1)$$

2 шаг

$$F_{1+2}(S_2) = \max_{U_2}[q_2(U_2) + F_1(S_1)]$$

$$S_2 = U_1 + U_2$$

3 шаг

$$F_{1+2+3}(S_3) = \max_{U_3}[q_3(U_3) + F_{1+2}(S_2)]$$

$$S_3 = A = U_1 + U_2 + U_3$$

$$S_3 = S_2 + U_3$$

5.3. Результаты расчетов

1 шаг	U_1	$q_1(U_1)$	$\max(q_1(U_1)) = F_1(S_1)$
S_1	$S_1^1 = 0$	0	0
	$S_1^2 = 1$	0,24	0,24
	$S_1^3 = 2$	0,48	0,48
	$S_1^4 = 3$	0,72	0,72
	$S_1^5 = 4$	0,96	0,96
	$S_1^6 = 5$	1,2	1,2

2 шаг		U_2	$q_2(U_2)$	$U_1 = S_2 - U_2$	$F_1(S_1)$	$q_2 + F_1$	$F_{1+2} = \max(q_2 + F_1)$
1	2	3	4	5	6	7	8
S_2=X	$S_2^1 = 0$	0	0	0	0	0	0
	$S_2^2 = 1$	0	0	1	0,24	0,24	0,24
		1	0,1	0	0	0,1	
	$S_2^3 = 2$	0	0	2	0,48	0,48	0,48
		1	0,09	1	0,24	0,33	
		2	0,405	0	0	0,405	

1	2	3	4	5	6	7	8
	$S_2^4 = 3$	0	0	3	0,72	0,72	0,72
		1	0,09	2	0,48	0,57	
		2	0,405	1	0,24	0,645	
		3	0,45	0	0	0,45	
	$S_2^5 = 4$	0	0	4	0,96	0,96	0,96
		1	0,09	3	0,72	0,81	
		2	0,405	2	0,48	0,885	
		3	0,45	1	0,24	0,69	
		4	0,54	0	0	0,54	
	$S_2^6 = 5$	0	0	5	1,2	1,2	1,2
		1	0,09	4	0,96	1,05	
		2	0,405	3	0,72	1,125	
		3	0,45	2	0,48	0,93	
		4	0,54	1	0,24	0,78	
		5	0,63	0	0	0,63	

3 шаг	U_3	$q_3(U_3)$	$S_2 = S_3 - U_3$	$F_{1+2}(S_2)$	$q_3 + F_{1+2}$	$\max(q_3 + F_{1+2}) = F_{1+2+3}$
S_3=A	0	0	5	1,2	1,2	1,51
	1	0,55	4	0,96	1,51	
	2	0,715	3	0,72	1,435	
	3	0,825	2	0,48	1,305	
	4	0,88	1	0,24	1,12	
	5	0,935	0	0	0,935	

В результате проделанных расчетов получено оптимальное распределение инвестиций объемом в 5 единиц на три мероприятия следующим образом:

$$U_1^* = 4, U_2^* = 0, U_3^* = 1$$

Таким образом, следует в первое мероприятие вложить 4 единицы инвестиций и в третье – 1 единицу.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
Решение классической задачи синтеза оптимального управления с использованием принципа максимума

6.1. Постановка задачи

Требуется минимизировать время перехода системы из начального состояния $y_1(0)=y_a^0$ в конечное $y(t_k)=y^k$.

Система описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = U(t), \qquad (6.1)$$

где $y(t)$ – фазовая координата, а $U(t)$ – управляющее воздействие $(-1 \le U(t) \le 1)$

6.2. Постановка задачи в математической форме

$$I = \int_0^t 1 \cdot dt \to \min U(t) \in \Omega \qquad (6.2)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1(t), y_2(t), U(t)) = y_2(t) \qquad (6.3)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1(t), y_2(t), U(t)) = U(t) \qquad (6.4)$$

$$y_1(0) = y_1^0 \qquad (6.5а)$$

$$y_2(0) = y_2^0 \qquad (6.5б)$$

$$y_1(t_k) = y_1^k \qquad (6.5в)$$

$$y_2(t_k) = y_2^k \qquad (6.5г)$$

$$-1 \le U(t) \le 1 \qquad (6.6)$$

Область допустимых управлений Ω удовлетворяет условию (6.6).

Требуется для заданных начальных [(6.5а) и (6.5б)] и конечных [(6.5в) и (6.5г)] граничных условий состояния системы построить:

1) построить траекторию движения системы в фазовом пространстве, обеспечивающую минимальное время перехода из начального в конечное;

2) траекторию неоптимального движения системы в фазовом пространстве;

3) построить графики изменения фазовых координат системы во времени при переходе системы из начального состояния в конечное за минимальное время;

4) построить графики изменения оптимального управления во времени, обеспечивающего минимальное время перехода из исходного состояния в конечное;

5) построить графики изменения фазовых координат системы во времени при переходе системы из исходного состояния системы в конечное;

6) построить графики изменения неоптимального управляющего воздействия.

6.3. Решение задачи принципом максимума

$$H(y(t),\psi(t)) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \times f_i(y(t),U(t)) \qquad (6.7)$$

В данной задаче:

$$H(y_1(t), y_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) = \psi_1 \times f_1(y_1(t), y_2(t), U(t)) + \psi_2 \times f_2(y_1(t), y_2(t), U(t)) \qquad (6.8)$$

С учетом конкретного математического описания системы (6.3) и (6.4) функция Гамильтона принимает вид:

$$H(y_1(t), y_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) = \psi_1 \times y_2(t) + \psi_2 U(t) \qquad (6.9)$$

Система дифференциальных уравнений, сопряженных системе (6.3) и (6.4) имеет вид:

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H(y_2(t), U(t), \psi_1(t), \psi_2(t))}{\partial y_1(t)} = 0 \qquad (6.10)$$

$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H(y_2(t), U(t), \psi_1(t), \psi_2(t))}{\partial y_2(t)} = \psi_1(t) \qquad (6.11)$$

Согласно принципу максимума при оптимальном управлении функция Гамильтона (9) принимает максимальное значение. Следовательно, для поиска оптимального управления $U^{опт}(t)$, нужно максимизировать функцию Гамильтона:

$$H(y_2(t), U(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) \to \max_{U(t)\in\Omega} \quad (6.12)$$

Так как функция Гамильтона (6.9) линейно зависит от управления $U(t)$, то оптимальное управление будет принимать значения: $U^{опт}(t)$=-1, если множитель при $U(t)$ в (6.9) имеет знак «-»; и $U^{опт}(t)$=1, если множитель при $U(t)$ в (6.9) имеет знак «+», т.е.:

$$U^{опт}(t)=sign\Psi_2(t),$$

где $sign\Psi_2(t)$ – знаковая функция.

В соответствии с алгоритмом решения задачи принципом максимума найденное выражение оптимального управления подставляют в систему сопряженных уравнений (6.3), (6.4), (6.10), (6.11).

Решение этой системы при заданных граничных условиях (6.5а), (6.5б), (6.5в) и (6.5г) можно получить в фазовом пространстве

$$y_1(t) = \zeta(y_2(t)) \quad (6.14)$$

или во временной области

$$y_1(t) = \varphi_1(t)\,. \quad (6.15)$$

$$y_2(t) = \varphi_2(t)\,. \quad (6.16)$$

При решении системы уравнений (6.3), (6.4), (6.10), (6.11) в фазовом пространстве оптимальное управление является функцией фазовых координат. При решении системы уравнений (6.3), (6.4), (6.10), (6.11) во временной области оптимальное управление является функцией времени. Покажем это, рассмотрев систему уравнений (6.10) и (6.11).

Из (6.10) следует:

$$\psi_1(t) = const = c_1\,. \quad (6.17)$$

Подставим (6.17) в (6.11):

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = c_1 \quad (6.18)$$

и проинтегрируем (6.18)

$$\psi_2(t) = c_1 t + c_2\,. \quad (6.19)$$

Заметим, что функция (6.19) линейна. Следовательно, $\Psi_2(t)$ только один раз может сменить знак (рис. 1).

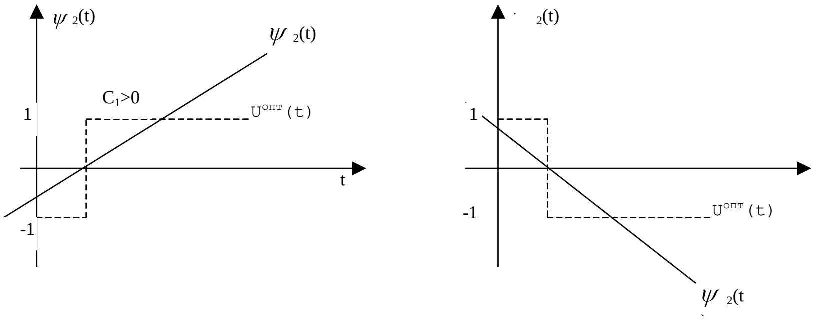


Рис. 1. Графики функций $\Psi_2(t)$ и $U^{опт}(t)$

В соответствии с (6.13) оптимальное управление тоже только один раз меняет знак и может переключаться со значения (-1) на (+1) или со значения (+1) на (-1).

6.4. Построение фазовых траекторий

Построим фазовые траектории движения системы для случая $U^{опт}(t)$=+1. При этом система уравнений (3) и (4), описывающая рассматриваемую систему, примет вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2(t) \tag{6.20}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 1 \tag{6.21}$$

Поделим (6.20) на (6.21):

$$\frac{dy_1}{dy_2} = y_2(t) \tag{6.22}$$

и проинтегрируем (6.22):

$$y_1(t) = \int y_2(t)\,dy_2 + C_3 \tag{6.23}$$

$$y_1(t) = \int y_2(t)\,dy_2 + C_3$$

$$y_1(t) = \frac{y_2^2(t)}{2} + C_3 \tag{6.24}$$

Уравнение (6.24) описывает движение системы в фазовом пространстве при $U(t)$=1. Графики функции (6.24) для различных y^0 приведены на рис. 2. Они представляют собой параболы с ветвями, симметричными относительно оси $y_1(t)$, и вершинами слева.

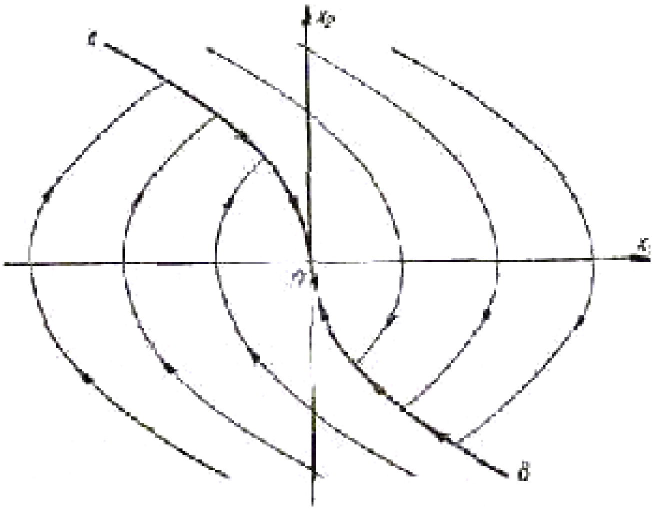


Рис. 2. Графики движения системы в фазовом пространстве в зависимости от начальных условий и функции управления

Построим фазовые траектории движения системы для случая $U^{опт}(t)$=-1. При этом система уравнений (3) и (4), описывающая рассматриваемую систему, примет вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2(t) \tag{6.25}$$

$$dy_2 = -1. \tag{6.26}$$

Решение системы уравнений (6.25) и (6.26) найдем аналогично предыдущему случаю:

$$y_1(t) = \frac{-y_2^2(t)}{2} + C_4. \tag{6.27}$$

Графики функций для различных y^0 приведены на рис. 2. Они представляют собой параболы с ветвями, симметричными относительно оси y_1(t), и вершинами справа.

Заметим, что фазовая координата $y_2(t)$ является скоростью изменения фазовой координаты $y_1(t)$. Поэтому в положительной полуплоскости относительно оси $y_1(t)$ (т.е. для $y_2(t)>0$) координата $y_1(t)$ может только возрастать, а в отрицательной полуплоскости относительно оси $y_1(t)$ (т.е. для $y_2(t)<0$) координата $y_1(t)$ может только убывать.

Геометрически задача оптимального управления сводится к тому, что из заданной исходной точки фазового пространства с координатами (y_1^0, y_2^0) нужно перейти в заданную конечную точку с координатами (y_1^k, y_2^k) и при этом осуществить лишь один переход с одной траектории, проходящей через точку с координатами (y_1^0, y_2^0), на траекторию с координатами (y_1^k, y_2^k). Если переход из начальной точки в конечную выполнен при числе переходов с одной траектории на другую больше одного, то в данной задаче управление выбрано не оптимальным.

Пусть конечным состоянием является начало координат ($y_1^0=0$, $y_2^0=0$). Полуветви парабол, по которым можно попасть в точку ($y_1^0=0$, $y_2^0=0$), образуют линию переключения, которую обозначим MON. Уравнение линии переключения в этом случае имеет вид:

$$y_1=-y_2^2/2 \cdot sign(y_2(t)) \tag{28}$$

Задача на максимальное быстродействие будет решена, если из начальной точки выбирается управление, при котором обеспечивается выход на линию переключения. При встрече с этой линией осуществляется переключение знака управления на противоположный, что обеспечивает переход на линию переключения и спуск по ней в конечную точку.

Причем, если начальная точка расположена правее линии переключения, то движение из нее нужно осуществлять при $U=1$. Если начальная точка расположена правее линии переключения, то движение из нее нужно осуществить при $U=-1$.

Таким образом, оптимальное управление формируется условиями:

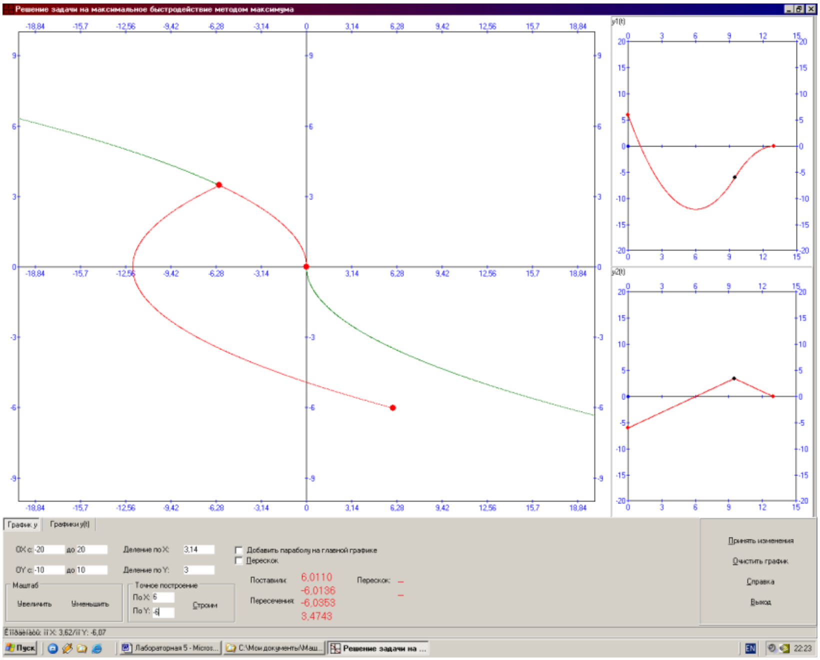
$$\text{если } y_1(t)<-y_2^2/2 \cdot sign(y_2(t)), \text{ то } U^{\text{опт}}(t)=1 \tag{29}$$

$$\text{если } y_1(t)>-y_2^2/2 \cdot sign(y_2(t)), \text{ то } U^{\text{опт}}(t)=-1. \tag{30}$$

В том случае, если начальная точка расположена на линии переключения, т.е. $y_1(t)=-y_2^2/2 \cdot sign(y_2(t))$, то $U^{\text{опт}}(t)=1$ (31); если $y_2(t)<0$ или $U^{\text{опт}}(t)=-1$, если $y_2(t)>0$ (32).

В этом случае переключения знака управления не требуется. Математически это означает, что за время перехода из начальной точки в конечную функция $\Psi_2(t)$ не изменяла знак.

Результатом моделирования оптимального перехода системы из заданного начального в заданное конечное состояние являются графики движения системы в фазовом пространстве и во временной области. Начальное и конечное состояния системы задаются преподавателем.

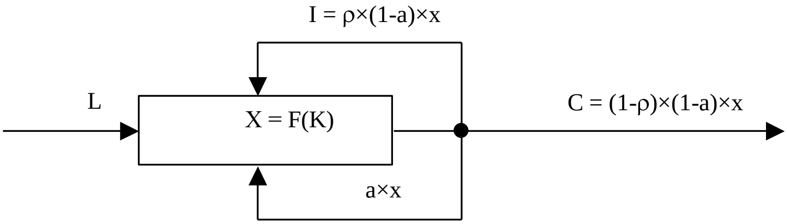


Решение задачи на максимальное быстродействие методом максимума
y1(t)
y2(t)
График y
Графики y(t)
OX с: -20 до 20
OY с: -10 до 10
Деление по X: 3,14
Деление по Y: 3
Масштаб
Увеличить
Уменьшить
Точное построение
По X: 6
По Y: -6
Строим
Добавить параболу на главной графике
Перескок
Поставили: 6,0110
-6,0136
Пересечения: -6,0353
3,4743
Перескок:
Принять изменения
Очистить график
Справка
Выход
Пуск
Лабораторная 5 - Micros...
C:\Мои документы\Маш...
Решение задачи на ...
EN
22:23

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7
Решение задачи динамической оптимизации с использованием модели макроэкономики

7.1. Постановка задачи

Рассмотрим модель Солоу.



где L – число занятых;
X – валовой общественный продукт (ВОП);
I – инвестиции;
K – фонды;
C – фонд непроизводственного потребления.
ν – годовой темп прироста числа занятых;
μ – доля выбывших за год основных производственных фондов;
a – коэффициент прямых затрат (доля промежуточного продукта в ВОП);
ρ – норма накопления (доля валовых инвестиций в ВОП).

$$-1 < \nu < 1;$$

$$0 < \mu < 1;$$

$$0 < a < 1;$$

$$0 < \rho < 1.$$

В каждый момент времени годовой выпуск определяется линейной, однородной, производственной функцией: $X = F(K,L)$. Эта функция является функцией Кобба-Дугласа: $F(K,L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$.

Годовой выпуск на одного работника: $f(k) = A \cdot k^{\alpha}$.

Прирост фондов за время Δt определяется как:

$$\Delta k = -\mu k \cdot \Delta t + I \cdot \Delta t \qquad (7.1)$$

Разделим правую и левую часть выражения (7.1) на Δt:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -\mu K + I \tag{7.2}$$

$$K(0) = K_0 \tag{7.3}$$

$$\frac{dK}{dt} \approx \frac{\Delta K}{\Delta t} = -\mu K + I$$

$$(1-a)\cdot X \ \text{– ВОП} \tag{7.4}$$

$$I = \rho\cdot(1-a)\cdot X \tag{7.5}$$

$$C = (1-\rho)\cdot(1-a)\cdot X \tag{7.6}$$

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1-a)\cdot X \tag{7.7}$$

Введем относительные показатели:

$$k = \frac{K}{L}; \quad x = \frac{X}{L}; \quad i = \frac{I}{L}; \quad c = \frac{C}{L}. \tag{7.8}$$

$$x = \frac{F(K,L)}{L} = f(k)$$

$$i = \rho(1-a)x \tag{7.9}$$

$$c = (1-\rho)(1-a)x \tag{7.10}$$

Модель (7.7) представим в виде:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}(k, L) = \frac{dk}{dt}\cdot L + k\cdot\frac{dL}{dt} \tag{7.11}$$

$$dL = (\nu L)dt$$

$$\frac{dL}{dt} = \nu L \tag{7.12}$$

Выражение (7.12) подставляем в (7.11) и получим:

$$\frac{dk}{dt} = \nu Lk + L\cdot\frac{dk}{dt} \tag{7.13}$$

С учетом (7.7) модель Солоу (7.13) примет вид:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a)f(k) \tag{7.14}$$

$$\lambda = \mu + \nu; \quad \rho \neq const$$

$$c = (1-\rho)(1-a)x \tag{7.15}$$

$$\rho = \frac{1-c}{(1-a)\,f(k)} \tag{7.16}$$

Подставим (7.16) в (7.14) и получим:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k - c + (1-a)\,f(k) \tag{7.17}$$

– модель динамики.

$$0 < c_{\min} < c(t) \le f(k) \tag{7.18}$$

7.2. Постановка задачи оптимального управления

Максимизировать дисконтированную полезность от потребления за длительный интервал времени

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot U(c(t))dt \to \max_{c(t)\in\Omega} \tag{7.19}$$

где δ – параметр дисконтирования.

U(C) – функция полезности.

$$U > 0, \quad \frac{dU}{dc} > 0, \quad \frac{d^2U}{dc^2} < 0.$$

$$\lim_{c\to 0} \frac{dU}{dc} = \infty; \quad \lim_{c\to\infty} \frac{dU}{dc} = 0$$

Графически типовая функция полезности представлена на рис. 3.

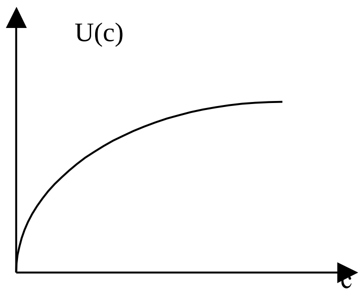


Рис. 3. Функция полезности

7.3. Метод решения задачи

Данную задачу будем решать с использованием принципа максимума.

От задачи максимизации функционала (19) перейдём к задаче минимизации:

$$-I=-\int_0^{\infty} e^{-\delta t}U(c(t))dt \to \min_{c(t)\notin\Omega} \qquad (7.20)$$

$$0 \le c_{\min} \le c(t) \le f(k)$$

$$\frac{dK}{dt}=-\lambda k-c(t)+(1-a)f(k) \qquad (7.21)$$

формируем функцию Гамильтона:

$$H=-\psi_0(e^{-\delta t}\cdot U(c(t))+\psi_1(t)(-\lambda k-c(t)+(1-a)f(k))\cdot e^{-\delta t} \qquad (7.22)$$

Принимая ψ_0 = -1 , получим

$$H=e^{-\delta t}(U(c(t)))+\psi_1(t)(-\lambda k-c+(1-a)f(k)) . \qquad (7.23)$$

Введём обозначение $q=\psi_1(t)\cdot e^{-\delta t}$ (7.24)

Запишем сопряженное уравнение:

$$\frac{dq}{dt}==-\frac{\partial H}{\partial k}=-\left(e^{-\delta t}\cdot\left(-\psi_1(t)\cdot\lambda+\psi_1(t)(1-a)\frac{df(k)}{dk}\right)\right). \qquad (7.25)$$

Развернем левую часть уравнения (7.25) с учётом (7.24):

$$\begin{gathered}\frac{d\psi_1(t)}{dt}e^{-\delta t}+(-\delta)e^{-\delta t}\psi_1(t)=e^{-\delta t}(\psi_1(t)(\lambda-(1-a)f^{/}(k))\\ \frac{d\psi_1(t)}{dt}=(\delta+\lambda)\psi_1(t)-(1-a)f^{/}(k)\psi_1(t).\end{gathered} \qquad (7.26)$$

Дополним сопряженное уравнение (7.26) математическим описанием системы (7.21):

$$\frac{dk}{dt}=-\lambda k-c(t)+(1-a)\cdot f(k) .$$

Далее нужно максимизировать функцию H (7.23) по функции управления $c(t)$ и совместно решить уравнения (7.21) и (7.26).

Учитывая нелинейность уравнений (7.21) и (7.26), решение целесообразно выполнять численно

$$\psi_1(i\Delta t) = \psi_1((i-1)\Delta t) - \left\{\psi_1(t)\big|_{t=(i-1)\Delta t}\left[(1-a)f'(k)\big|_{t=(i-1)\Delta t} - (\lambda+\delta)\right]\right\}\Delta t \qquad (7.27)$$

$$k(i\Delta t) = k((i-1)\Delta t) + \left[(1-a)f(k)\big|_{t=(i-1)\Delta t} - \lambda k\big|_{t=(i-1)\Delta t} - c\right]\cdot\Delta t \qquad (7.28)$$

i =1,2,3, …………

Для выбора начального значения $k(0)$ и минимального значения $c_{\min}$ используем статическое состояние системы.

Условие статического состояния системы:

$$\frac{dk}{dt} = 0 \qquad (7.29)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0 \qquad (7.30)$$

$$(1-a)f(k) - \lambda k - c = 0 \qquad (7.31)$$

$$(1-a)f'(k) - (\lambda+\delta) = 0\,. \qquad (7.32)$$

Из (7.31) и (7.32) найдем значения k^* и c^* для статического состояния системы

$\dfrac{df(k)}{dk} = A\cdot\alpha\cdot k^{\alpha-1}$ – подставим в (7.32) и получим:

$$k^* = \left(\frac{\lambda+\delta}{(1-a)A\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad (7.33)$$

Из (7.31)

$$c^* = (1-a)f(k^*) - \lambda k^* \qquad (7.34)$$

Функцию полезности возьмём в виде

$$U(c)=c \qquad (7.35)$$

Теперь функция Гамильтона примет вид

$$H = e^{-\delta t}(c(t) + \psi_1(t)(-\lambda k(t) - c(t) + (1-a)f(k)) \qquad (7.36)$$

Алгоритм решения задачи

1. Задают начальные значения функций $k(0)$ и $\psi(0)$ при i =1, подставляют их в функцию Гамильтона (7.36) и максимизируют эту функцию по $c(t)$. При этом будет получено значение $c(0)$.

2. При $k(0)$, $c(0)$ и $\psi(0)$ по формулам (7.27) и (7.28) вычисляют значения $k(1)$ и $\psi(1)$ при i =2.

3. Процедуры, выполненные в пунктах 1 и 2 повторяют далее для $i = 3,4,5, \ldots\ldots$

Расчёт заканчивается при достижении установившегося состояния системы по признаку

$$\left|\frac{k_i - k_{i-1}}{k_i}\right| \le \delta \tag{7.37}$$

Так как функция H линейна относительно c(t), то максимальное значение H достигается при $c^{\min}$, если $(1\text{-}\Psi_1(t)) \le 0$, и при $c^{\max}$, если $(1\text{-}\Psi_1(t)) \ge 0$, т.е.

$$\begin{aligned} &c(i\Delta t) = 0{,}01 \cdot c^*, \text{если } \psi_1 > 1 \\ &c(i\Delta t) = f(k)\big|_{t=i\Delta t}, \text{если } \psi_1 < 1 \end{aligned} \tag{7.38}$$

Результаты расчетов

Даны следующие значения параметров (задаются преподавателем):

A = 10;

$\alpha = 0.5;$

$\lambda = 1.25;$

$\rho = 0.8;$

$a = 0.4;$

$\delta = 10;$

$U(c) = c.$

$\Delta t = 0.01$

По формулам (7.33) и (7.34) найдем значения k^* и c^*, при которых система приходит в статическое состояние.

$$k^* = \left(\frac{1.25 + 10}{(1 - 0.4) \cdot 10 \cdot 0.5}\right)^{\frac{1}{0.5-1}} = 0.071$$

$$f(k^*) = 10 \cdot \sqrt{0.071} = 2.667$$

$$c^* = (1 - 0.4) \cdot 2.667 - 1.25 \cdot 0.071 = 1.6002 - 0.08875 = 1.511$$

Зададим начальные условия k(0) и $\psi_1(0)$ для t = 0 ($i = 1$)

Рассмотрим первый случай:

t = 0

$k_0 > k^* = 1.5 \cdot k^* = 0.1065$

$\psi_1(0) > 1$

$\psi_1(0) = 1.5$

Тогда $c(0) = 0{,}01 \cdot c^* = 0{,}015$

$i = 1$

$$k(0.01) = k(0) + ((1-0.4)f(k_0) - 1.25k_0 - c_0) \cdot 0.01 = 0.1065 + (0.6 \cdot 10 \cdot \sqrt{0.1065} -$$
$$-1.25 \cdot 0.1065 - 0.015) \cdot 0.01 = 0.1065 + (1.9431 - 0.1331) \cdot 0.01 = 0.125$$

$$\psi_1(0.01) = \psi_1(0) - (\psi_1(0) \cdot ((1-0.4) \cdot 0.5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{k_0}} - (1.25 + 10))) \cdot 0.01 = 1.5 -$$

$$-1.5 \cdot (0.6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{0.1065}} - 11.25) \cdot 0.01 = 1.5 + 0.031 = 1.531$$

$c(0.01) = 0.01 \cdot c^* = 0.015$

i = 2

$$k(0.02) = 0.125 + (0.6 \cdot 10 \cdot \sqrt{0.125} - 1.25 \cdot 0.125 - 0.015) \cdot 0.01 = 0.125 + (2.1213 -$$
$$-0.1563 - 0.015) \cdot 0.01 = 0.125 + 0.0195 = 0.1445$$

$$\psi_1(0.02) = 1.531 - (1.531 \cdot (0.6 \cdot 0.5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{0.125}} - 11.25)) \cdot 0.01 = 1.531 -$$
$$-(1.531 \cdot (8.4853 - 11.25)) \cdot 0.01 = 1.531 + 0.042 = 1.573$$

$c(0.02) = 0.01 \cdot c^* = 0.015$

i = 3

$$k(0.03) = 0.144 + (0.6 \cdot 10 \cdot \sqrt{0.1445} - 1.25 \cdot 0.1445 - 0.015) \cdot 0.01 = 0.1445 + (2.2808 -$$
$$-0.186 - 0.015) \cdot 0.01 = 0.1445 + 0.0207 = 0.1652$$

$$\psi_1(0.03) = 1.573 - (1.573 \cdot (0.6 \cdot 0.5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{0.1445}} - 11.25)) \cdot 0.01 = 1.573 -$$
$$-(1.573 \cdot (7.892 - 11.25)) \cdot 0.01 = 1.573 + 0.0528 = 1.6258$$

$c(0.03) = 0.01 \cdot c^* = 0.015$

Результаты расчетов для первого случая приведены в табл. 1:

$M^T =$

шаг	t	K(iΔt	ψ_1(iΔt)	C(iΔt)
	0	1	2	3
0	0	0,107	1,5	0,015
1	0,01	0,125	1,531	0,015
2	0,02	0,144	1,573	0,015
3	0,03	0,165	1,626	0,015
4	0,04	0,187	1,689	0,015
5	0,05	0,211	1,762	0,015
6	0,06	0,235	1,845	0,015
7	0,07	0,262	1,938	0,015
8	0,08	0,289	2,043	0,015
9	0,09	0,317	2,158	0,015
10	0,1	0,347	2,286	0,015
11	0,11	0,378	2,427	0,015
12	0,12	0,41	2,582	0,015
13	0,13	0,443	2,751	0,015

И всего 691 шаг. Представим на графиках зависимость *K*(*t*) и *C*(*t*):

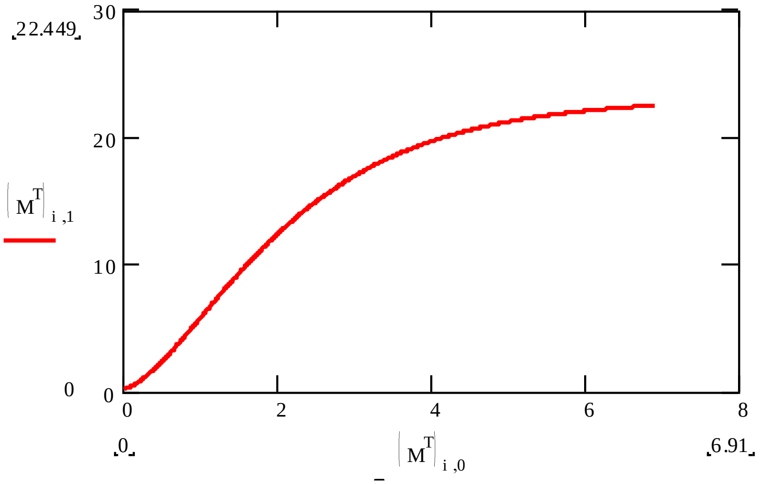


Рис. 4. График зависимости *K*(*t*)

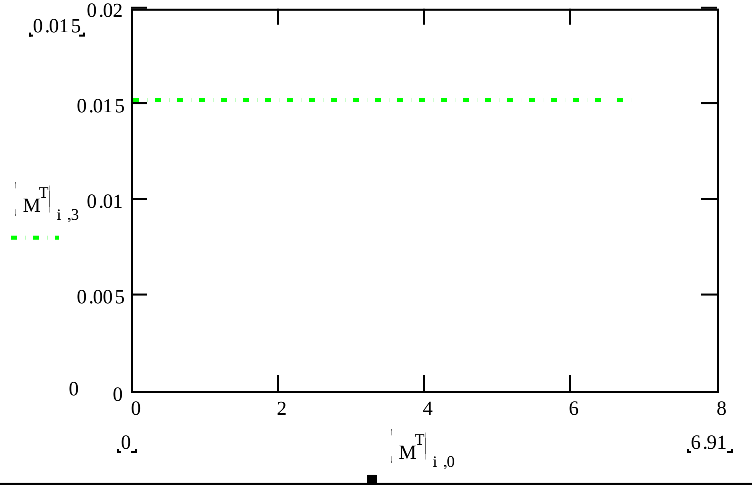


Рис. 5. График зависимости $C(t)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Акулич И.Д. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1993.

Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. – М.: Наука, 1984.

Жданов С.А. Методы и рыночная технология экономического управления. – М.: Дело и Сервис, 1999.

Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1979.

Колемаев В.А. Математическая экономика. Учебник для ВУЗов. – М.:ЮНИТИ, 1998.

Сборник задач по математике для ВТУЗов / Под ред. А.В. Ефимова. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1990.

СОДЕРЖАНИЕ