

Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет  
экономики и сервиса

---

**Н.Л. ХАЛАЕВ**

# **ОПТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ**

**Часть I**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГЛАВЫ  
ТЕОРИИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ  
КАНАЛАХ**

Учебное пособие

Владивосток  
Издательство ВГУЭС  
2015

УДК 621.383(075.32)  
ББК 32.86  
Х17

Рецензент: Н.Н. Номоконова, д-р техн.  
наук, профессор

Халаев, Н.Л.  
Х17 ОПТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ. Часть I: Специальные физико-математические главы теории передачи данных в оптоэлектронных каналах [Текст] : учебное пособие / Н.Л. Халаев; отв. ред. Ю.А. Левашов. – Владивосток : Изд-во ВГУЭС, 2015. – 124 с.

ISBN 978-5-9736-0321-2

Изложено современное толкование принципов формирования и передачи информации в волоконных оптических линиях связи. Рассмотрены законы теории геометрической оптики и волновой теории, принципы формирования одномодовых и многомодовых оптических волноводов. Издание содержит методические указания по изучению принципов оптоэлектронной обработки информации и передачи данных.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению радиотехнических специальностей 03.03.03 «Радиофизика», 11.03.01 «Радиотехника», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 11.03.02 «Информационные технологии и системы связи», 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

УДК 621.383(075.32)  
ББК 32.86

ISBN 978-5-9736-0321-2

© Издательство Владивостокского  
государственного университета  
экономики и сервиса, 2015

## ВВЕДЕНИЕ

---

---

С фундаментальной точки зрения между световыми и другими электромагнитными волнами не существует отличий, за исключением того, что световые волны имеют значительно более высокую частоту. Световое излучение, как и всякое электромагнитное излучение, подчиняется законам корпускулярно-волновой теории. Необходимость освоения оптического диапазона определяется рядом принципиальных обстоятельств [1]:

- частота электромагнитных колебаний в оптическом диапазоне существенно выше, чем в радиодиапазоне, что определяет большую информационную емкость оптического канала;

- поскольку минимальный объем, в котором можно сфокусировать электромагнитное излучение, определяется длиной волны, размеры волноводов, по которым может передаваться излучение с малыми потерями, также должно быть порядка длины волны (поэтому световоды обладают существенно меньшими размерами);

- передача информации осуществляется фотонами, которые, в отличие от электронов, являются электрически нейтральными частицами, не взаимодействующими между собой и с внешним электрическим и магнитным полями, что позволяет исключить взаимные наводки, паразитные связи между элементами схемы, осуществлять идеальную гальваническую развязку – выполнять «оптический монтаж» исходя лишь из требуемых функциональных задач;

- применение оптических методов записи, хранения и обработки информации позволяет реализовать новые принципы параллельной обработки информации (на основе, например, голографических методов) и достигать высокого уровня плотности записи информации в оптических запоминающих устройствах.

Дисциплина «Специальные главы высшей математики» является прикладной частью оптоэлектроники, синтезирующей в себе достижения целого ряда областей науки и техники:

- классической оптики;
- полупроводниковой электроники;
- микро- и наноэлектроники;
- квантовой электроники;
- молекулярной химии и пр.

Физическую основу оптоэлектроники составляют процессы:

- преобразования оптических сигналов в электрические и наоборот;
- взаимодействия электромагнитных излучений оптического диапазона с веществом;

- распространения излучения в видимой, ультрафиолетовой и инфракрасной областях в различных средах.

Основу практически любой оптоэлектронной системы составляют генераторы и усилители когерентного и некогерентного излучения. Все возрастающее

значение приобретают оптоволоконные средства, фотоприемные устройства, оптроны, индикаторные приборы, элементы компьютерной техники и пр.

Специфичность построения дисциплины определяется и терминологическими особенностями. Наиболее часто употребляемые термины приводятся в работе авторов В.И. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков [2], наиболее полный глоссарий приводится в части II учебного пособия.

**Квантовая электроника** – область науки и техники, исследующая и применяющая квантовые явления для генерации, усиления и преобразования когерентных электромагнитных волн.

**Оптоэлектроника** – область науки и техники, исследующая и применяющая процессы взаимодействия оптического излучения с веществом для обработки, хранения, передачи и отображения информации.

**Оптическое излучение** – электромагнитное излучение оптического диапазона.

Оптический диапазон спектра составляют электромагнитные колебания, длина волн которых лежит в пределах 1 мм–10 нм. Внутри оптического диапазона выделяют: видимое излучение (0,38–0,78 мкм), инфракрасное излучение (0,78–1000 мкм), ультрафиолетовое излучение (0,01–0,38 мкм).

**Световые волны** – электромагнитные волны оптического диапазона.

**Монохроматическое излучение** – оптическое излучение, характеризующееся какой-либо одной частотой (одной длиной волны) световых колебаний.

**Квантовый усилитель** – усилитель электромагнитных волн, основанный на использовании вынужденного излучения.

**Квантовый генератор** – источник когерентного излучения, основанный на использовании вынужденного излучения.

**Лазер** – квантовый генератор оптического излучения.

**Мазер** – квантовый генератор электромагнитного излучения радиодиапазона.

**Вынужденное излучение** – когерентное электромагнитное излучение, возникающее в результате вынужденного излучения.

**Вынужденное испускание** – когерентное испускание фотона при новом переходе системы в результате взаимодействия с внешним электромагнитным полем.

**Когерентность** – согласованное протекание во времени и в пространстве колебательных и волновых процессов. Электромагнитная волна называется когерентной, если ее амплитуда, фаза, частота, направление распространения и поляризация постоянны или изменяются по определенному закону (упорядоченно).

# 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ

---

---

## 1.1. История развития оптоэлектронных средств

**И**стория оптоэлектроники неразрывно связана с историей оптики. Оптика (от др.-греч. *ὀπτική, optike'* – появление или взгляд) – раздел физики, рассматривающий явления, связанные с распространением электромагнитных волн преимущественно видимого и близких к нему диапазонов (инфракрасное и ультрафиолетовое излучение). Оптика описывает свойства света и объясняет связанные с ним явления. Методы оптики используются во многих прикладных дисциплинах, включая и оптоэлектронику, как разделах прикладной оптики.

Оптика является одной из древнейших наук. Освоение оптического излучения можно подразделить на два больших исторических этапа.

*Первый этап. Изучение наблюдаемых непосредственно глазом свойств видимого света.* Соответствует развитию классической оптики.

Эволюция взглядов на природу света иллюстрирует диалектический характер познания. Древние мыслители считали, что световые лучи исходят из глаз. На основе учения о зрительных лучах Эвклид и Птолемей создали теорию отражения света от плоских и сферических зеркал и положили начало *геометрической оптике*.

Теории зрительных лучей в древности противопоставлялась еще более фантастическая теория Эпикура и Лукреция о «*слепках*» с предметов, летящих во всех направлениях и попадающих в глаз.

Затем появилась *корпускулярная концепция* или теория истечения, поддерживаемая вначале Декартом, а затем Ньютоном. Согласно этой теории, свет представляет собой совокупность мельчайших частиц-корпускул, движущихся вдоль определенной траектории – светового луча. Этой теорией наглядно и естественно объяснялись такие явления, как прямолинейность распространения света в однородных средах, отражение света от поверхности зеркал, преломление светового луча на границе двух сред, а также его искривление при распространении света в неоднородных средах. Одновременно Х. Гюйгенсом была предложена интерпретация тех же явлений на основе понятий световой волны и волновой поверхности, согласно которой свет представляет собой волны, распространяющиеся в пространстве. Лучи света представляют собой чисто абстрактное понятие и определяются как кривые, ортогональные волновым поверхностям.

Первые инструменты для оптических исследований появились в результате наблюдений за тенью, отбрасываемой предметами, за отражением и преломлением света в драгоценных камнях, в воде или во льду, опытов, сделанных

с помощью линз и зеркал в Древнем Египте и государствах Месопотамии. Мысли, гипотезы и теории древних учёных, связанные со зрительными наблюдениями, были развиты древними греческими и индийскими философами. Особенно следует выделить развитие оптики в греко-римском древнем мире.

Самые ранние известные линзы были сделаны из полированных кристаллов, чистого кварца, например типа Нимруда (линза, найденная в городе Нимруд на территории древней Месопотамии, датируется 750 годом до н.э.) (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Линза Лэярда (линза Нимруда), 750–710 гг. до н.э.  
Британский музей, Лондон

Есть много подобных линз из древнего Египта, Греции и Вавилона. Древние греки заполняли стеклянные колбы водой, чтобы получить линзы. Однако в европейских странах о стеклянных линзах не думали до Средневековья.

Исаак Ньютон, исследуя преломление света, уже демонстрировал, что призма помогает диспергировать «белый» свет в спектр цветов и что линза и вторая призма могут реконструировать (вернуть) разноцветный спектр в белый свет. Он также показал, что цветные лучи света не меняют свои свойства. Выделил цветной луч и облучал ими различные объекты. Ньютон отметил, что независимо от того, был ли луч отражён или рассеян, или передан, цвет луча остался тем же самым. Таким образом, он заметил, что цвет – результат объектов, взаимодействующих со светом – его цветом, а не объектами, производящими цвет самостоятельно.

Однако Ньютон выступал против волновой теории света. Главным его доводом против волновой теории было отсутствие колеблющейся вещественной среды («эфира») в мировом пространстве. Явления, связанные с периодичностью (кольца Ньютона), в корпускулярной теории объяснялись тем, что частицы вращаются. Пространство, пробегаемое такой частицей за один оборот, сопоставлялось с некой длиной волны. Полярность (в современной терминологии – поляризация) Ньютон считал свойством только твердых частиц. Огибание,

дифракцию он пытался истолковать «отталкивательным» и «притягательным» действиями вещества на световые корпускулы. Вслед за Ньютоном в XVIII веке большинство ученых стали склоняться к корпускулярной теории, и волновая теория, блестяще развитая Гюйгенсом, сохранила лишь немногих последователей.

*Первый этап. Начала дифракционной оптики*

Только на рубеже XVIII–XIX вв. англичанином Т. Юнгом были начаты серьезные исследования интерференции и дифракции (рис. 1.2), а французом О. Френелем дано их полное теоретическое объяснение на основе волновой теории Гюйгенса. Кроме того, Френель показал, что представления о волновой природе не противоречат факту прямолинейности распространения света в однородной среде. Качественной и количественной точностью своих предсказаний волновая теория в первой половине XIX века победила теорию истечения. К концу XIX века Максвелл дал волнам Френеля электромагнитную интерпретацию и показал, что всякая световая волна является электромагнитным возмущением особого рода. Опыты Г. Герца и А.С. Попова экспериментально подтвердили это.



Рис. 1.2. Эскиз Томаса Юнга дифракции, представленный Королевскому обществу в 1803 г.

Электромагнитная теория, обобщенная в виде системы дифференциальных уравнений Максвелла, явилась вершиной первого «классического» этапа развития оптики и наших представлений о природе света.

*Второй этап. Исследования оптических спектров*

Этап тесно связан с теми революционными преобразованиями, которые претерпела физика в начале XX века. Характерно, что именно изучение оптических спектров поглощения и испускания привело к необходимости введения понятий о квантовых скачках и кванте действия  $h$  как минимальном действии, который ввел в 1900 году М. Планк для объяснения спектра излучения черного тела. Впоследствии постоянная  $h$ , имеющая размерность «действия» [Дж·с], была названа постоянной Планка. В 1905 году А. Эйнштейн на основе теории Планка возродил в новой форме корпускулярную теорию света, предположив, что планковские кванты энергии  $E = h\nu$  существуют в виде реальных частиц, названных им *световыми квантами* или *фотонами*. Таким образом, Эйнштейну удалось объяснить открытый ранее фотоэффект. Применив

эти понятия к атому, Нильс Бор в 1913 году объяснил простую связь частоты излучения  $\nu$  с разницей энергий между уровнями  $E_n$  и  $E_m$ :

$$\nu_{nm} = \left( \frac{E_n - E_m}{h} \right). \quad (1.1)$$

Фундаментальную роль для последующего развития квантовой электроники сыграла работа А. Эйнштейна (1917), в которой он на основании рассмотрения термодинамического равновесия системы молекул ввел понятие об *индуцированном излучении*. На возможность использования индуцированного излучения для наблюдения отрицательного поглощения (усиления) впервые указал в 1940 году В.А. Фабрикант.

В 1954 году советские ученые Н.Г. Басов и А.М. Прохоров разработали конкретный проект, а американский физик Ч. Таунс создал действующий мазер на пучке молекул аммиака. Это был первый прибор, работавший на квантовых принципах, в основе которого лежало явление усиления электромагнитных колебаний с помощью индуцированного излучения. За эти работы Н.Г. Басову и А.М. Прохорову была присуждена Ленинская премия, а затем совместно с Ч. Таунсом – Нобелевская премия. Таким образом, 1954 год может быть назван годом рождения квантовой электроники как самостоятельной науки.

Методы, развитые первоначально в радиодиапазоне (первый аммиачный мазер работал на длине волны 1,25 см), затем были перенесены в оптический диапазон, и в 1960 году был создан лазер, а в 1961 года – газовый лазер на смеси гелия и неона.

## 1.2. Связь изучаемой дисциплины с другими дисциплинами

Целями освоения дисциплины «Специальные главы высшей математики» являются:

- получение знаний о современных оптико-электронных средствах и системах, формирование профессиональных компетенций в области оптико-электронного приборостроения;
- формирование и развитие у обучающихся знаний, умений и личностных качеств, необходимых им для реализации первых этапов расчета и проектирования современных оптико-электронных следящих систем, в управленческой и эксплуатационной деятельности при боевом применении и повседневном обслуживании оптико-электронных средств надводных кораблей и подводных лодок;
- формирование у выпускника базы знаний, умений и навыков для успешного выполнения задач боевого использования оптоэлектронных систем (ОЭС) в интересах обеспечения главного командного пункта (ГКП) подводных лодок (ПЛ) и надводных кораблей (НК) информацией об обстановке, и для эффективного применения оружия и обеспечения навигационной безопасности плавания в рамках должности командира боевой части ПЛ (НК);
- формирование у выпускника тактического мышления в соответствии с паспортом военно-учетной специальности [3].

Дисциплина «Специальные главы высшей математики» является одной из базовых в процессе обучения студентов по специальности «Радиоэлектронные системы и комплексы». Для освоения дисциплины «Специальные главы высшей математики» обучающемуся необходимы знания, умения, способности, приобретенные на первом и втором курсах обучения в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математика», «Информатика», «Правоведение», «Физика», «Основы теории радиосистем передачи информации» [Там же].



Дисциплина имеет логическую и содержательно-методическую взаимосвязь со следующими дисциплинами: «Математика», «Физика», «Информатика».

Указанные дисциплины должны обеспечивать следующие требования к «входным» знаниям, умениям, способностям и готовностям обучающегося.

*Студент должен знать:*

- основные понятия, теоремы и методы линейной алгебры и аналитической геометрии, теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории поля, рядов, дифференциальных уравнений, операционного исчисления, теории вероятностей и математической статистики, основы численных методов и математического моделирования;

- назначение, основные задачи и характеристики современных оптико-электронных средств, систем и каналов передачи данных;

- принципы построения оптико-электронных средств и систем, их подсистем и звеньев, а также работу в различных режимах их применения;

- способы и правила использования современных информационных технологий;

- фундаментальные понятия, законы и теории классической физики; физические основы механики, электричества и магнетизма, колебаний и волн;

- нормативные правовые акты РФ и нормы международного права по применению оружия, международного морского права и международного воздушного права;

- функциональные структуры систем пространственной обработки информации;

- фундаментальные пределы точности измерения параметров сигнала пространственными системами;

- основные понятия оптоэлектроники и методы оценки, анализа и решения задач передачи данных;

- сущность оптических процессов излучения и приема световых сигналов;

- механизмы формирования, характер, классификационные признаки и методы расчета электромагнитных полей, используемые при оценке эффективности оптоволоконных средств различного назначения;

- сущность процессов формирования оптических аномалий естественного и искусственного происхождения в различных физико-географических и погодных условиях;

- состав, назначение и методику использования руководящих и информационно-справочных документов для анализа свойств проводящих сред в интересах использования оптоволоконных средств;

- организацию и методику измерения, контроля и нормирования уровня и спектральных оптических характеристик объектов, поля помех, выявления источников повышенных помех;

- принципы формирования, передачи и приема телевизионного изображения и оптических сигналов;

- основные принципы построения, структурные, функциональные и принципиальные схемы оптико-электронных средств;

- основные научно-технические проблемы и перспективные направления развития специальных оптико-электронных средств;

- организацию эксплуатации измерительной техники специального назначения;

- меры и требования по обеспечению защиты государственной и коммерческой тайны и безопасности информации на технических средствах передачи информации и связи;
- основные положения технической эксплуатации средств связи;
- назначение, принцип работы и технические характеристики изучаемых средств связи и передачи информации;
- организацию использования различных видов связи и передачи информации при выполнении различных задач;
- глобальную морскую систему связи при бедствии и обеспечении безопасности мореплавания;
- опыт ведения радиоэлектронной борьбы в локальных войнах, конфликтах и специальных операциях;
- теоретические основы радиоэлектронной борьбы;
- основы боевого использования средств радиоэлектронной борьбы на надводных кораблях и подводных лодках;
- организацию защиты от технических средств разведки противника в армии и на флоте, а также от конкурентов в бизнесе;
- радиоэлектронные объекты военно-морских и военно-воздушных сил иностранных государств как объекты радиоэлектронной борьбы;
- организацию радиоэлектронной войны в военно-морских и военно-воздушных силах иностранных государств, возможности сил и средств радиоэлектронной войны;
- принципы построения и функционирования оптоэлектронных систем и комплексов;
- методы и алгоритмы обработки сигналов в оптоэлектронных системах и комплексах;
- принципы построения и функционирования систем, каналов, трактов основных образцов оптоэлектронных систем и комплексов;
- принципы построения и функционирования корабельных устройств обработки оптоэлектронной информации;
- алгоритмы первичной и вторичной обработки информации в судовых и наземных устройствах обработки оптоэлектронной информации;
- требования руководящих документов по технической эксплуатации и ремонту радиоэлектронных оптических средств;
- требования руководящих документов по применению оптоэлектронных средств;
- обязанности должностных лиц инженерного состава по применению оптоэлектронных средств;
- режимы работы оптоэлектронных средств и методику их применения;
- основные направления научных исследований в области использования образцов оптоэлектроники с учетом поступления перспективных образцов техники, в том числе морских роботизированных систем;
- основы устройства, организацию и способы применения оптических и оптоволоконных комплексов, меры безопасности при их эксплуатации.

*Студент должен уметь:*

- использовать математические методы в решении прикладных практических задач, выполнять вероятностные расчеты и статистическую обработку данных;
- использовать методы моделирования на ЭВМ при исследовании, анализе и проектировании оптоэлектронных средств и систем;

- определять рациональную структуру, передаточные функции оптоэлектронных средств и требования к параметрам их звеньев;
- анализировать устойчивость функционирования оптоэлектронных средств и синтезировать корректирующие звенья;
- применять знания физических законов при освоении техники и решении задач профессиональной деятельности;
- применять методы измерения параметров сигналов в оптических устройствах;
- прогнозировать и анализировать оптические характеристики, оценивать дальность действия оптоэлектронных средств;
- пользоваться электронно-вычислительными машинами и прикладным программным обеспечением в интересах решения задач анализа гидрофизических условий;
- оценивать работоспособность оптоэлектронных средств различного назначения;
- руководить использованием и самостоятельно обслуживать образцы радиоэлектронных оптических средств.

*Студент должен владеть:*

- математической символикой для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- методами построения математических моделей;
- методами выбора принципиальных схем и основных узлов оптоэлектронных средств;
- основными методами обработки экспериментальных данных и оценки полученных результатов;
- основными методами работы на персональных компьютерах с прикладными программными средствами и средствами современных информационных технологий;
- компьютерными технологиями сбора, хранения, обработки и использования информации, применяемой в сфере профессиональной деятельности;
- методами выбора и обоснования критериев эффективности функционирования технических систем;
- методикой оценки эффективности применения оптоэлектронных средств в различных условиях обстановки;
- навыками практического выполнения обязанностей операторов изучаемых образцов оптоэлектронных средств при их реальном применении;
- навыками ведения вахтенной документации.

*Студент к началу освоения дисциплины должен быть способен:*

- самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний и умений, в том числе используемых в областях, непосредственно не связанных со сферой деятельности, развивать профессиональные компетенции (ОК-6 ФГОС ВПО);
- понимать социальную значимость своей будущей профессии, цели и смысл государственной службы, обладать высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности в области применения и эксплуатации технических систем кораблей, защиты интересов личности, общества и государства (ОК-9);
- применять методы экспериментального исследования и обработки экспериментальных данных, оценивать полученные результаты с использованием вычислительной техники (ПК-2);

– использовать справочники, каталоги и другие источники информации, методы поиска, накопления, передачи, обработки и отображения информации по профилю деятельности с применением современных информационных технологий (ПК-3);

– к освоению новых образцов технических систем НК и ПЛ, программных и информационных технологий (ПК-5).

Содержание учебной программы (УП) дисциплины базируется на ФГОС ВПО. При этом изложенные в них указания по вопросам организации освещения обстановки дисциплиной конкретизируются, развиваются и обосновываются.

Освоение дисциплины «Специальные главы высшей математики» необходимо как подготовка компетенций студента для успешного освоения последующих специальных дисциплин.

### **1.3. Содержание дисциплины**

#### ***Введение в дисциплину***

История развития оптоэлектронных средств. Связь изучаемой дисциплины с другими дисциплинами специальности. Содержание изучаемой дисциплины. Балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения курсантов.

#### ***Уравнения электромагнитного поля***

Анализ двумерных линейных систем. Фурье-спектры. Вычислительные методы при обработке оптической информации. Компьютерная алгебра в оптике. Вейвлет-анализ.

#### ***Физические основы оптической обработки информации***

Дифракция и дисперсия. Когерентность оптических волн. Влияние когерентности на системы формирования изображений. Принципы голографии. Физические основы распространения излучения по оптическому волокну. Фундаментальные пределы в оптике. Зрение человека.

#### ***Базовые устройства и базовые операции в оптике***

Линзы. Лазеры. Реализация линзой операции двумерного преобразования Фурье. Компьютерная оптика. Адаптация в оптике. Электронная оптика.

#### ***Принципы построения оптических систем обработки информации***

Функциональная и структурная организации аналоговых оптических процессоров; принципы построения волоконно-оптических систем передачи.

#### ***Системы оптической обработки информации***

Пространственные фильтры. Оптические корреляторы когерентного и некогерентного типов. Приборы на поверхностных акустических волнах. Акусто-оптические процессоры корреляционного и спектрального типа с пространственным и временным интегрированием.

#### ***Системы оптической передачи информации***

Волоконно-оптические системы передачи информации. Многофункциональные волоконно-оптические системы передачи информации. Основные характеристики компонентов волоконно-оптических систем передачи. Функциональная схема линейной части фотоприемного тракта. Особенности аналоговых волоконно-оптических систем передачи.

#### ***Применение оптической обработки информации в гидроакустических системах***

Оптические датчики гидрофизической информации, обработка изображений в гидроакустических системах, системы распознавания образов с использованием

оптических спектров, обработка сигналов с использованием гибридных схем, применение волоконной оптики и электронной оптики.

Особенности производства и эксплуатации оптических устройств обработки информации. Особенности производства оптических устройств обработки информации. Особенности эксплуатации оптических устройств обработки информации. Особенности эксплуатации систем электронной оптики.

#### **Заключение**

Основные научно-технические проблемы и перспективы развития оптических устройств в радиотехнике.

### **1.4. Балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения студентов**

Балльно-рейтинговая система оценивания *индивидуальных результатов обучения студентов* по дисциплине «Специальные главы высшей математики» основана на положении о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов.

Основой модульного обучения является структурирование программы дисциплины на логически завершенные по тематике и по времени модули, несущие определенную функциональную нагрузку и связанные с заданными результатами обучения.

Балльно-рейтинговая система обеспечивает:

- упорядочение, прозрачность и расширение возможностей применения различных видов и форм текущего и промежуточного контроля качества процесса и результатов обучения на основе развития накопленного опыта в учреждениях высшего образования;
- формализацию процесса оценивания с целью структурирования, планирования и реализации непрерывного контроля результатов обучения;
- формирование у студентов мотивации к систематической работе как аудиторной, так и самостоятельной;
- развитие у студентов способностей к самооценке как средству саморазвития и самоконтроля;
- стимулирование студентов к освоению образовательных программ на базе объективности и глубокой дифференциации оценки результатов их учебной работы;
- повышение состязательности в учебе для активизации личностного фактора на основе ранжирования посредством оценки реального места, занимаемого студентом среди сокурсников в соответствии со своими результатами;
- рейтингование студентов по степени формирования компетенций, включающих как учебные результаты (знания, умения, навыки), так и личностные качества (дисциплина, ответственность, инициатива и др.);
- получение, накапливание и представление всем заинтересованным лицам информации об учебных достижениях студента за любой промежуток времени и на текущий момент;
- объективную базу для поощрения студентов (оказание материальной помощи, премирования и т.п.), отбора слушателей на продолжение обучения в аспирантуре;

– корректуру преподавателями учебно-методических материалов учебных дисциплин.

Балльно-рейтинговое оценивание результатов обучения студентов осуществляется в ходе текущего, рубежного контроля освоения учебных модулей и промежуточной аттестации освоения дисциплины. Мониторинг результатов обучения основан на использовании совокупности контрольно-рейтинговых мероприятий, определенным образом расположенных на всем интервале изучения дисциплины.

Данные мониторинга обобщаются на кафедре и в учебном отделе института. Баллы, характеризующие индивидуальный рейтинг студента, набираются им в течение всего периода обучения за выполнение отдельных видов учебных работ и проявленные при этом личностные качества. Количество планируемых баллов пропорционально объему и видам учебной нагрузки студента, а также уровню достижения учебных результатов.

Настоящая система оценивания обеспечивает формирование рейтинга студентов на основе комплексной оценки только учебных достижений при освоении ими основных образовательных программ на уровне усвоения знаний, формирования умений и развития личностных качеств.

Индивидуальный рейтинг учебных достижений студента складывается из семестровых рейтингов. Семестровый рейтинг определяется по сумме определенным образом взвешенных баллов (см. «Баллы, оценки, шкалы и рейтинги»), набранных в ходе освоения всех учебных дисциплин, в том числе и практик, предусмотренных учебным планом на протяжении семестра. Индивидуальный рейтинг по дисциплине определяется по сумме баллов, набранных в ходе контроля освоения дисциплины (ее модулей) или практики на протяжении одного или более семестров, в соответствии с программой дисциплины (т.е. определяются первый, второй и т.д. слушатели по дисциплине).

#### ***Виды и формы контроля результатов обучения***

Основными видами контроля уровня учебных достижений (знаний, умений, навыков и личностных качеств) в рамках индивидуальной балльно-рейтинговой системы по дисциплине в течение семестра являются:

- текущий контроль;
- рубежный контроль;
- промежуточная аттестация (сессия) по дисциплине.

*Текущий контроль* – это непрерывно осуществляемое «отслеживание» за уровнем усвоения знаний, формированием навыков и умений и развитием личностных качеств студента за фиксируемый период времени.

Формами текущего контроля могут быть:

- тестирование (письменное или компьютерное);
- летучки;
- отчетность по практическим и групповым занятиям;
- дискуссии, тренинги, круглые столы;
- собеседования.

Возможны и другие формы текущего контроля результатов, которые определяются преподавателями кафедры и фиксируются в рабочей программе дисциплины. Текущий контроль проводится в период аудиторной работы студента по расписанию.

*Рубежный контроль* по дисциплине осуществляется по завершении учебного модуля в часы, определяемые расписанием занятий в соответствии с формой

контроля. Рубежный контроль проводится с целью определения результатов освоения модуля в целом и возможного добора баллов, планируемых в ходе текущего контроля. В течение семестра проводится рубежный контроль.

В качестве форм рубежного контроля использованы:

- контрольная работа;
- семинар.

Формы контроля, порядок начисления баллов для рубежного контроля разработаны на кафедре исходя из специфики дисциплины.

*Промежуточная аттестация по дисциплине (сессия)* – это форма контроля, проводимая после завершения изучения дисциплины в семестре.

Промежуточная аттестация по данной дисциплине – дифференцированный зачет.

Формы контроля, порядок начисления баллов и фонды аттестационных материалов для промежуточного контроля разработаны кафедрой исходя из специфики дисциплины и учебного плана.

Балльно-рейтинговая система предоставляет возможность ритмично занимающимся студентам, набравшим необходимое число баллов на «хорошо» и «отлично» по шкале перерасчета баллов в оценку, автоматически получать оценку «хорошо» без участия в сессии.

#### ***Баллы, оценки, шкалы и рейтинги дисциплины***

Максимальная сумма баллов, которую курсант может набрать за семестр по дисциплине, составляет 100 баллов.

Так как в дисциплине предусмотрены текущий и рубежный контроль, то на них отводится 80 баллов, на промежуточную аттестацию – 20 баллов.

Минимальная (пороговая) сумма баллов, которая позволяет зачесть студенту освоение дисциплины на удовлетворительном уровне, составляет 61 балл.

Максимальное число баллов, которое студент может набрать по дисциплине в период промежуточной аттестации, составляет 20 баллов, а минимальное – 11 баллов.

В зависимости от вида занятий распределение баллов имеет различную величину.

Распределение баллов по точкам контроля представлены в табл. 1.1.

*Таблица 1.1*

#### **Распределение баллов по точкам контроля**

Вид занятия	Число занятий	Минимальный балл	Максимальный балл	Всего	
				мин. балл	макс. балл
Лекция	9	1,5	2,0	13,5	18,0
ГЗ	4	2,5	3,0	10,0	12,0
ПЗ	8	3,0	4,0	24,0	32,0
КР	2	4,5	6,0	9,0	12,0
С	1	4,5	6,0	4,5	6,0
ИТОГО:	24			61,0	80,0

Необходимым условием положительной аттестации по дисциплине (модулю) является получение такого числа баллов в каждой текущей точке контроля, которое обязательно должно превышать минимально установленное число баллов в этой точке.

Пересчет полученной суммы баллов по дисциплине за семестр в оценку производится по шкале, сопоставимой с оценками ECTS:

– «отлично» (A), если сумма баллов находится в пределах от 91 до 100 баллов включительно;

– «хорошо» (B – очень хорошо), если сумма баллов находится в пределах от 84 до 90 баллов включительно;

– «хорошо» (C – хорошо), если сумма баллов находится в пределах от 75 до 83 баллов включительно;

– «удовлетворительно» (D), если сумма баллов находится в пределах от 68 до 74 баллов включительно;

– «удовлетворительно» (E – посредственно), если сумма баллов находится в пределах от 61 до 67 баллов включительно;

– «неудовлетворительно» (F), если сумма баллов меньше 61 балла.



## 2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

---

---

Перед рассмотрением основных вопросов теории поля необходимо сделать ряд оговорок, чтобы избежать в дальнейшем принципиальных ошибок.

Принято считать, что возможны две формы существования материи: вещество и поле, однако свойства этих форм во многом схожи.

Вещество состоит из отдельных частиц: молекул, атомов, элементарных частиц. Распространяющееся электромагнитное поле тоже можно рассматривать как поток дискретных частиц – фотонов. Электромагнитное поле, как и вещество, характеризуется энергией, массой и импульсом. Разница лишь в том, что масса и импульс характерны для распространяющегося электромагнитного поля. В отличие от вещества электромагнитное поле не обладает массой покоя. Электромагнитные волны испытывают воздействие гравитационных сил. С другой стороны, такие волновые свойства, как дифракция и интерференция также присущи частицам небольших размеров. Известны, например, явления дифракции и интерференции электронов.

Важно отметить, что максвелловская теория электромагнитного поля учитывает только свойства макроскопических частиц вещества. Предполагается, что размеры рассматриваемой зоны пространства и расстояния от источников поля до рассматриваемой точки велики по сравнению с размерами молекул, а характерное для изменения электромагнитного поля время (период колебаний) велико по сравнению со временем, характерным для внутримолекулярных колебательных процессов.

За пределами максвелловской теории остаются такие явления, как излучение и поглощение веществом электромагнитных волн очень высокой частоты, чем, в частности, является световое излучение. Строгий анализ подобных явлений должен учитывать микроструктуру вещества и, следовательно, должен базироваться на квантовой теории поля. В пределах данного курса исследуются макроскопические свойства на грани молекулярного подхода. В этом состоит основная особенность изучаемого материала.

Разделение единого электромагнитного поля на электрическое и магнитное носит относительный характер: оно зависит от выбранной системы отсчета. Так, например, движущийся прямолинейно с постоянной скоростью заряд создает вокруг себя как электрическое, так и магнитное поле. Если же наблюдатель движется в том же направлении со скоростью заряда, то он наблюдает только электрическое поле.

Обе составляющие электромагнитного поля обладают пондеромоторными силами. Если в электрическое поле внести пробный заряд, то под действием этих сил заряд будет перемещаться. Аналогично магнитное поле изменяет направле-

ние движения пробного электрического заряда, а также ориентирует пробный постоянный магнит (магнитную стрелку).

Электрическое поле действует на неподвижные и подвижные заряды, магнитное – только на подвижные. Действие электромагнитного поля обладает определенной направленностью, поэтому для его описания вводятся векторные величины. Рассмотрим основные векторы, характеризующие электромагнитное поле.

## 2.1. Векторы электромагнитного поля и классификация сред

### 2.1.1. Векторы электромагнитного поля

*Напряженность электрического поля*  $\vec{E}$  определяется как сила, с которой электрическое поле действует на точечный положительный единичный заряд. Значит, между вектором  $\vec{E}$  и силой  $\vec{F}$ , действующей на точечный заряд  $q$ , существует простая связь:  $\vec{E} = \vec{F}/q$ . Заряд  $q$  должен быть достаточно малым, чтобы можно было пренебречь изменением распределения зарядов, создающих исследуемое поле. Поэтому данное соотношение необходимо представить в виде

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}, \left[ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}} \right]. \quad (2.1)$$

Символ  $q \rightarrow 0$  означает, что уменьшается не только величина заряда, но и размеры объекта, на котором распределен заряд.

Сила взаимодействия зарядов, а значит, и напряженность электрического поля в различных средах различны. Физически это объясняется следующим образом. Под действием электрического поля вещество поляризуется. В результате появляется дополнительное электрическое поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное электрическое поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме.

Поляризация – сложный физический процесс, непосредственно связанный с атомной структурой вещества. Упрощенно этот процесс можно объяснить следующим образом. Каждый атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. Суммарный заряд равен нулю. Соединения атомов образуют молекулы. Различают полярные и неполярные молекулы. В неполярных молекулах распределение положительных и отрицательных зарядов таково, что точка приложения равнодействующей сил поля, действующих на все электроны, совпадает с точкой приложения равнодействующей всех сил поля, действующих на протон. Это возможно лишь при условии, что центр тяжести всех электронов молекулы совпадает с центром тяжести всех ее протонов. В полярных молекулах центр тяжести электронов сдвинут относительно центра тяжести протонов. Поэтому полярную молекулу можно уподобить крошечному электрическому диполю – системе из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов  $[+q, -q]$ , расположенных на некотором малом расстоянии  $l$  друг от друга. Диполи обычно характеризуют дипольным моментом  $\vec{p}$ . Из курса физики известно, что дипольный момент – вектор, численно равный произведению величины заряда на расстояние между зарядами, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному:  $\vec{p} = l_0 p = l_0 q l$ , где  $l_0$  – орт век-

тора, соединяющего заряды  $+q$  и  $-q$ . Размерность дипольного момента – кулон, умноженный на метр [Кл·м] (кулон-метр).

Суммарный дипольный момент объема  $\Delta V$  вещества равен геометрической сумме дипольных моментов  $\vec{p}_i$  молекул в этом объеме. Внешнее электрическое поле оказывает силовое воздействие на диполь, стремясь повернуть его таким образом, чтобы он был ориентирован по полю, причем момент приложенных к диполю сил, как следует из рис. 2.1, определяется выражением  $\vec{K} = [\vec{p}, \vec{E}]$ .

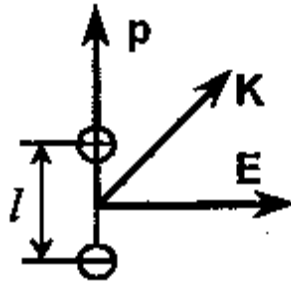


Рис. 2.1. Дипольный момент в полярной молекуле

Неполярные молекулы не обладают собственным дипольным моментом. Однако под действием внешнего электрического поля в такой молекуле перераспределяется отрицательный заряд, и она становится полярной, то есть начинает обладать дипольным моментом. Дипольные моменты отдельных молекул ориентируются по полю, и суммарный дипольный момент оказывается отличным от нуля. Такой процесс принято называть *электронной поляризацией*.

Полярные молекулы обладают собственными дипольными моментами. В отсутствие внешнего электрического поля дипольные моменты молекул ориентированы хаотически, и суммарный дипольный момент равен нулю. Под действием внешнего электрического поля происходит ориентация дипольных моментов отдельных молекул, в результате чего появляется суммарный дипольный момент рассматриваемого объема. Этот процесс называется *ориентационной поляризацией*. Очевидно, что ориентационная поляризация всегда сопровождается электронной поляризацией.

Указанные типы поляризаций являются основными только в газообразных и жидких средах. Поляризация твердых сред имеет некоторые особенности, но сущность явления остается той же.

Для характеристики поляризации вводится *вектор поляризованности*  $\vec{P}$ , определяемый как предел отношения суммарного дипольного момента вещества в объеме  $\Delta V$  к величине этого объема при  $\Delta V \rightarrow 0$ :

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}, \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]. \quad (2.2)$$

Ранее отмечалось, что в классической электродинамике рассматриваемый объем всегда предполагается большим по сравнению с объемом отдельной молекулы. Это относится и к случаю элементарного объема  $dV$ . Поэтому выражение  $\Delta V \rightarrow 0$  нельзя рассматривать в строго математическом смысле: при

любом уменьшении объема  $\Delta V$  его нужно считать достаточно большим по сравнению с объемом молекулы. Аналогичные допущения должны быть сделаны относительно элементарной длины  $dl$  и элементарной площади  $dS$ .

При не очень сильном внешнем поле величину индуцированного дипольного момента можно считать пропорциональной напряженности электрического поля с учетом некоторых параметров среды:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (2.3)$$

где  $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$  [Ф/м] – электрическая постоянная,  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость среды [безразмерная величина].

При рассмотрении многих процессов, происходящих в электромагнитном поле, удобно ввести *вектор электрического смещения*  $\vec{D}$ , связанный с вектором  $\vec{P}$  соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]. \quad (2.4)$$

С учетом (2.3) формулу (2.4) можно представить в виде

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (2.5)$$

где  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды [безразмерная величина]. Так как диэлектрическая восприимчивость вакуума считается равной нулю, то электрическую постоянную  $\epsilon_0$  можно рассматривать как абсолютную диэлектрическую проницаемость вакуума.

Наряду с  $\epsilon$  часто вводят *относительную проницаемость среды*  $\epsilon_r$ , связанную с  $\epsilon$  соотношением

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (2.6)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость может быть выражена через диэлектрическую восприимчивость:  $\epsilon_r (1 + \chi)$ .

Следует еще раз подчеркнуть, что выражения (2.3) и (2.5) являются приближенными.

В большинстве сред пропорциональность векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ , а значит, и векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  нарушается в сильных электрических полях. В некоторых веществах это происходит даже при сравнительно слабых полях. Кроме того, параметры  $\chi$  и  $\epsilon$  зависят от скорости изменения вектора  $\vec{E}$ : молекулы имеют инерцию и требуется некоторое время, чтобы их дипольные моменты изменили ориентацию под действием поля. В исследуемых в дисциплине вопросах можно считать соотношение (2.5) справедливым.

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое точечным зарядом  $Q$ , расположенным в безграничной среде, у которой  $\epsilon$  – скалярная постоянная ( $\epsilon = \text{const}$ ). Такую среду называют *однородной* и *изотропной* по отношению к электрическому полю. Определение этих терминов будет дано ниже. Согласно закону Кулона сила, с которой точечный заряд  $Q$ , в рассматриваемом случае действует на точечный заряд  $q$

$$\vec{F} = \vec{r}_0 \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2},$$

где  $r$  – расстояние между зарядами  $Q$  и  $q$ ,

$\vec{r}_0$  – единичный вектор, направленный вдоль  $r$  от  $Q$  к  $q$ , как показано на рис. 2.2.

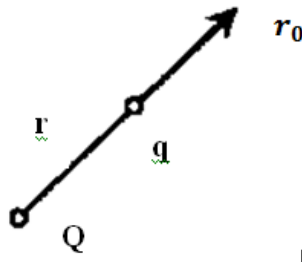


Рис. 2.2. К закону Кулона

Из указанного выражения и определения вектора  $\vec{E}$  (2.1) следует, что напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$ ,

$$\vec{E} = \vec{r}_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (2.7)$$

Переходя к вектору  $\vec{D}$  на основе равенства (2.5), отмечаем, что вектор  $\vec{D}$  в однородных изотропных средах не зависит от  $\epsilon$ . Следовательно, при  $\epsilon = \text{const}$  и одинаковом распределении свободных зарядов вектор  $\vec{D}$  имеет одинаковые значения в разных средах, то есть не зависит от «связанных» зарядов вещества. Эта особенность вектора  $\vec{D}$  в однородных изотропных средах характерна не только для точечного заряда, но и для поля, созданного любым более сложным распределением зарядов.

Под действием электрического поля, обладающего проводимостью, возникает электрический ток (ток проводимости), распределение которого удобно характеризовать вектором плотности тока проводимости

$$\vec{j} = \vec{i}_0 \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad \left[ \frac{A}{M^2} \right], \quad (2.8)$$

где  $\vec{i}_0$  – единичный вектор, показывающий направление тока (направление движения положительных зарядов) в рассматриваемой точке  $M$ ,  $\Delta S$  – плоская площадка, содержащая точку  $M$ , расположенная перпендикулярно вектору  $\vec{i}_0$ , а  $\Delta I$  – ток проводимости, протекающий через  $\Delta S$ . Вектор  $\vec{j}$  называют **вектором объемной плотности тока проводимости**.

Вектор  $\vec{j}$  связан с вектором  $\vec{E}$  соотношением

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2.9)$$

где  $\sigma$  – удельная проводимость среды  $\left[ \frac{C_M}{M} \right]$ . Это выражение является **законом Ома в дифференциальной форме**.

Сила, с которой электромагнитное поле воздействует на точечный электрический заряд, зависит не только от местоположения и величины заряда, но и от скорости его движения. Эту силу обычно раскладывают на две: электрическую и магнитную. Электрическая сила не зависит от движения заряда:

$$\vec{F}_e = q \vec{E}. \quad (2.10)$$

Магнитная сила  $\vec{F}_m$  зависит от величины и направления скорости движения заряда  $\vec{v}$  и всегда перпендикулярна ей:

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (2.11)$$

где  $\vec{B}$  [Тл = Вб/м<sup>2</sup>]- *вектор магнитной индукции*, характеризующий силовое воздействие магнитного поля. Магнитная индукция численно равна силе, с которой магнитное поле действует на единичный точечный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью перпендикулярно линиям вектора  $\vec{H}$ . Полная сила, действующая на точечный заряд  $q$ , находящийся в электромагнитном поле, – *сила Лоренца*

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2.12)$$

Магнитное поле действует не только на отдельные движущиеся заряды, но и на проводники, по которым течет ток. Например, сила  $\vec{F}$ , с которой однородное магнитное поле действует на прямолинейный проводник длиной  $l$  с током  $I$  определяется экспериментально установленным законом

$$\vec{F} = I \cdot l[\vec{l}_0, \vec{B}], \quad (2.13)$$

где  $\vec{l}_0$  – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением тока, то есть с направлением движения положительных зарядов в проводнике. Выражение (2.13) является следствием формулы (2.11).

Если в магнитное поле внести достаточно малую рамку, обтекаемую током  $I$ , то на нее будет действовать момент сил  $\vec{K}$ , стремящийся повернуть рамку таким образом, чтобы ее плоскость была перпендикулярна вектору  $\vec{B}$  (достаточная малость рамки определяется из требования, чтобы в ее пределах магнитное поле можно было считать однородным), как показано на рис. 2.3. Токи, протекающие вдоль сторон  $ab$  и  $cd$  рамки, направлены противоположно друг другу. Поэтому силы, с которыми магнитное поле действует на элементы  $ab$  и  $cd$  рамки, будут согласно формуле (2.13) равны по величине и противоположны по направлению. Значит, на рамку  $abcd$  будет действовать пара сил, стремящихся ее повернуть. Момент сил, действующий на достаточно малую плоскую рамку площадью  $S$ , находящуюся в магнитном поле, определяется выражением  $\vec{K} = I \cdot S[\vec{n}_0, \vec{B}]$ , где  $\vec{n}_0$  – орт нормали к плоскости рамки, образующий с направлением тока, обтекающего рамку, праввинтовую систему. Рамки с током обычно характеризуют величиной  $\vec{m} = n_0/S$ , называемой *магнитным моментом рамки*.

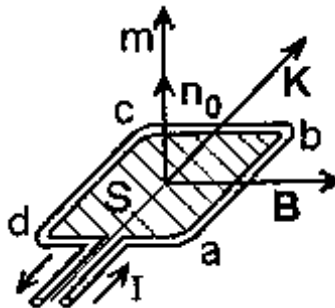


Рис. 2.3. Элементарная рамка с током в магнитном поле

Размерность вектора  $\vec{m} - [A \cdot m^2]$ . Выражая момент сил  $\vec{K}$  через магнитный момент рамки, получаем  $\vec{K} = [\vec{m}, \vec{B}]$ . Отметим, что данное выражение для  $\vec{K}$  аналогично записанному ранее выражению для момента сил, действующих на диполь, находящийся в электрическом поле. Момент сил, действующих на рамку, находящуюся в магнитном поле, стремится повернуть ее так, чтобы момент рамки совпадал с направлением вектора  $\vec{B}$ . Величина вектора  $\vec{B}$  зависит от свойств среды. Физически это объясняется следующим образом. Под действием магнитного поля вещество намагничивается. В результате появляется дополнительное магнитное поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное магнитное поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме.

Явление намагничивания – сложный физический процесс, непосредственно связанный с атомной структурой вещества. Упрощенно его можно представить следующим образом. Атомы и молекулы многих веществ обладают магнитным моментом и могут быть уподоблены маленьким рамкам с током. Каждая рамка с током создает собственное магнитное поле, пропорциональное магнитному моменту. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты направлены хаотично и суммарный магнитный момент рассматриваемого объема  $\Delta V$ , представляющий собой геометрическую сумму моментов  $\vec{m}_i$  отдельных молекул в объеме  $\Delta V$ , равен нулю, то есть магнитные поля отдельных молекул взаимно компенсируются. Под действием внешнего магнитного поля происходит ориентация магнитных моментов отдельных молекул, и суммарный магнитный момент оказывается отличным от нуля. Образующееся в результате намагничивания дополнительное магнитное поле может как ослаблять, так и усиливать первичное поле. Среды, в которых магнитное поле ослабляется, относятся к *диамагнитным*. Среды, в которых поле незначительно усиливается, являются *парамагнитными*. Среды, в которых происходит существенное усиление магнитного поля, – *ферромагнитными*.

Намагниченность среды характеризуется **вектором намагниченности**  $\vec{M}$ , который определяется как предел отношения суммарного момента вещества в объеме  $\Delta V$  к величине этого объема при  $\Delta V \rightarrow 0$ :

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_{\Delta V} \vec{m}_i / \Delta V \right) \cdot \left[ \frac{A}{M} \right]. \quad (2.14)$$

При рассмотрении многих процессов в электромагнитном поле вместо вектора  $\vec{M}$  чаще используют **вектор напряженности магнитного поля**  $\vec{H}$ , связанный с  $\vec{M}$  соотношением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \left[ \frac{A}{M} \right], \quad (2.15)$$

где  $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная.

При не очень сильном внешнем магнитном поле можно считать, что вектор  $\vec{M}$  пропорционален вектору  $\vec{B}$ . В силу линейности уравнения (2.15) можно также считать пропорциональными векторы  $\vec{M}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (2.16)$$

Безразмерный коэффициент  $\chi_m$  – коэффициент магнитной восприимчивости. У диамагнитных сред параметр  $\chi_m$  отрицательный, у парамагнитных и ферромагнитных – положительный. У диамагнитных и парамагнитных сред  $|\chi_m| \ll 1$ , у ферромагнитных –  $\chi_m \gg 1$ .

Подставляя формулу (2.16) в формулу (2.15), получим

$$\vec{E} = \mu \vec{H}, \quad (2.17)$$

где  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ , [Гн/м] – абсолютная магнитная проницаемость среды. Магнитная восприимчивость вакуума считается равной нулю, поэтому магнитную постоянную  $\mu_0$  можно рассматривать как абсолютную магнитную проницаемость вакуума.

Наряду с абсолютной магнитной проницаемостью среды вводят также относительную магнитную проницаемость  $\mu_r$ , связанную с  $\mu$  соотношением

$$\mu = \mu_0 \mu_r, \text{ [Гн/м]} \quad (2.18)$$

Очевидно, что  $\mu_r = 1 + \chi_m$ .

Следует отметить важное свойство вектора  $\vec{H}$ . В средах, в которых  $\mu$  – скалярная постоянная (такие среды называют однородными и изотропными по отношению к магнитному полю), вектор  $\vec{H}$  не зависит от  $\mu$ . Поэтому при одинаковых источниках магнитного поля значения вектора  $\vec{H}$  в разных однородных изотропных средах будут одинаковы.

Для большинства сред при не очень сильных полях уравнение (2.17) передает взаимосвязь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . При этом для диамагнитных и парамагнитных веществ  $\mu_r$  обычно можно считать скалярной величиной, а для намагниченных ферромагнитных веществ  $\mu_r$  является тензором. Однако необходимо помнить, что уравнения (2.16) и (2.17), как и аналогичные уравнения для электрического поля (2.3) и (2.5), являются приближенными. Магнитная восприимчивость, а следовательно, и магнитная проницаемость ферромагнитных сред существенно зависят от величины магнитного поля. Кроме того, в ферромагнитных материалах намагниченность среды зависит не только от величины магнитного поля в данный момент, но и от того, как оно изменялось раньше (явление магнитного гистерезиса).

Векторы электромагнитного поля введены в результате обобщения огромного числа экспериментальных данных, выражением которых являются основные законы магнитного поля (закон Кулона, закон Фарадея и пр.).

### 2.1.2. Классификация сред

Свойства среды по отношению к электромагнитному полю определяются параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$ . Различают следующие среды:

- **линейные**, в которых параметры  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  не зависят от величины электрического и магнитного полей;
- **нелинейные**, в которых параметры  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  (или хотя бы один из них) зависят от величины электрического и/или магнитного полей.

Все реальные среды являются нелинейными. Однако при не очень сильных полях во многих случаях можно пренебречь зависимостью параметров  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  от величины электромагнитного поля и считать, что рассматриваемая среда линейна.

В ходе изучения материала будем обращаться и к линейным, и к нелинейным средам.



Зависимость параметров  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  от координат или от места в среде определяет однородность среды. **Однородными** называют среды, параметры которых не зависят от координат, то есть свойства среды одинаковы во всех точках. В противном случае среда **неоднородна**.

Если свойства среды одинаковы по разным направлениям (в длину, в ширину, в высоту), то среду называют **изотропной**. Среда, свойства которой различны по разным направлениям, называют **анизотропными**. В изотропных средах векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ , а также  $\vec{M}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  параллельны, а в анизотропных средах они могут быть не параллельными. В изотропных средах  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  – скалярные величины, в анизотропных, хотя бы один, является тензором. К анизотропным средам относятся:

- кристаллические диэлектрики,
- намагнитченная плазма,
- намагнитченный феррит.

В кристаллическом диэлектрике и намагнитченной плазме тензором является диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ . При использовании декартовой системы координат в общем случае тензор диэлектрической проницаемости может быть записан в виде матрицы

$$\|\epsilon\| = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (2.19)$$

Величины  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{xy}$ , ...,  $\epsilon_{zz}$  называют компонентами тензора  $\|\epsilon\|$ . В частных случаях некоторые из них могут равняться нулю. Форма уравнения (2.5) остается прежней:

$$\vec{D} = \|\epsilon\| \vec{E}. \quad (2.20)$$

Чтобы записать уравнение (2.20) в проекциях на оси декартовой системы координат  $x, y, z$ , нужно раскрыть правую часть уравнения по обычным правилам умножения матриц. В результате получим:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z, \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z, \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Непараллельность векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ , а также  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  в анизотропной среде объясняется тем, что в общем случае направление, возникающее в результате поляризации анизотропной среды вторичного электрического поля, созданного связанными зарядами вещества, составляет некоторый угол (отличный от 0 и  $\pi$ ) с направлением первичного электрического поля.

В намагнитченной ферромагнитной среде тензором является магнитная проницаемость. В общем случае в декартовой системе координат тензор может быть представлен в виде

$$\|\mu\| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}. \quad (2.22)$$

При этом форма уравнения (2.17) сохраняется:

$$\vec{B} = \|\mu\| \vec{H}. \quad (2.23)$$

Записывая уравнение (2.23) в проекциях на оси декартовой системы координат  $x, y, z$ , приходим к формулам, аналогичным (2.21).

Удельная проводимость  $\sigma$  также может быть тензорной величиной. Для таких сред закон Ома в дифференциальной форме (2.9) принимает вид

$$\vec{j} = \|\sigma\| \vec{E}. \quad (2.24)$$

## 2.2. Уравнения Максвелла

Фундаментальной задачей теории электромагнетизма явилось обобщение многочисленных экспериментальных результатов, касающихся электрических и магнитных явлений. Эта задача была решена в 70-х годах XIX века крупнейшим английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом, сформулировавшим уравнения, носящие его имя, которые полно и однозначно описывают всю совокупность электромагнитных явлений в макроскопических масштабах. Уравнения Максвелла в теории электромагнетизма играют такую же роль, как законы Ньютона в механике.

### 2.2.1. Система уравнений Максвелла в интегральной форме

*Первое уравнение Максвелла (полный ток и магнитное поле):*

$$\oint_L \vec{H} dl = \oint_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{dD}{dt} \right) dS \quad (2.25)$$

Уравнение читается так: «Циркуляция вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна потоку плотности полного тока через поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ ».

Под плотностью тока понимается сумма

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{св}} = \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{dD}{dt} \right) \left( \frac{A}{M^2} \right).$$

*Второе уравнение Максвелла (обобщенный закон ЭМИ):*

$$\oint_L \vec{E} dl = - \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} dS \quad (2.26)$$

Уравнение читается так: «Циркуляция вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна взятой с обратным знаком скорости изменения во времени потока вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ ».

*Третье уравнение Максвелла (электрическое поле и заряды):*

$$\oint_S \vec{D} dS = \oint_V \rho dV \quad (2.27)$$

Уравнение читается так: «Поток вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен суммарному электрическому заряду, сосредоточенному в объеме  $V$ , ограниченном этой поверхностью  $S$ ».

*Четвертое уравнение Максвелла (непрерывность линий вектора  $\vec{B}$ ):*

$$\oint_S \vec{B} dS = 0 \quad (2.28)$$

Уравнение читается так: «Поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  всегда равен нулю».

*Материальные уравнения ЭМП*

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}. \quad (2.29)$$

Это уравнение определяет линейную зависимость между вектором электрического смещения и вектором напряженности электрического поля, коэффициентом пропорциональности в котором является абсолютная диэлектрическая проницаемость.

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (2.30)$$

Это уравнение определяет линейную зависимость между вектором магнитной индукции и вектором напряженности магнитного поля, коэффициентом пропорциональности в котором является абсолютная магнитная проницаемость вещества.

### 2.2.2. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

*Физический смысл первого уравнения Максвелла (теорема о циркуляции магнитного поля)*

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (2.31)$$

Вихревое магнитное поле возникает в пространстве везде, где есть ток проводимости и/или изменяющееся электрическое поле, то есть ток смещения.

*Физический смысл второго уравнения Максвелла (закон индукции Фарадея)*

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (2.32)$$

Это уравнение есть обобщение закона электромагнитной индукции Фарадея. Вне зависимости от того, есть контур или его нет, в пространстве под действием переменного магнитного поля возникает вихревое электрическое поле. Проводящий контур только инструмент, с помощью которого обнаруживается это явление.

Электрическое и магнитное поля взаимосвязаны и взаимообусловлены: изменение одного из них во времени приводит к появлению другого в пространстве.

*Физический смысл третьего уравнения Максвелла (закон Гаусса)*

$$\text{div } \vec{D} = \rho. \quad (2.33)$$

Электрическое поле может быть (в отличие от уравнения 2, где описывается вихревое электрическое поле) и потенциальным. Источником потенциального электрического поля являются неподвижные электрические заряды. Силовые линии такого поля незамкнуты, они начинаются или заканчиваются на зарядах, уходят в бесконечность или приходят из нее.

*Физический смысл четвертого уравнения Максвелла (закон Гаусса для магнитного поля)*

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (2.34)$$

Магнитное поле может быть только вихревым. В природе не существует источников потенциального магнитного поля, то есть магнитных зарядов. Это значит, что силовые линии вектора  $\vec{B}$  не имеют истоков, то есть всегда замкнуты.

Материальные уравнения электромагнитного поля

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E} \quad (2.35)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} \quad (2.36)$$

*Общий вывод теории Максвелла:*

«Переменность во времени электрических и магнитных полей неизбежно приводит к распространению в пространстве электромагнитных волн».

### 2.2.3. Граничные условия для векторов электромагнитного поля

Весь предыдущий материал рассматривался в идеальных условиях безграничной среды. В реальных условиях ЭМП тем или иным способом ограничивается в пространстве. Границами пространства являются поверхности, на которых параметры среды изменяются скачкообразно, например металлические стенки. В этом случае компоненты ЭМП претерпевают разрыв в точках границы. Задача состоит в том, чтобы найти связи между векторами ЭМП на границе, которые удовлетворяли бы уравнениям Максвелла.

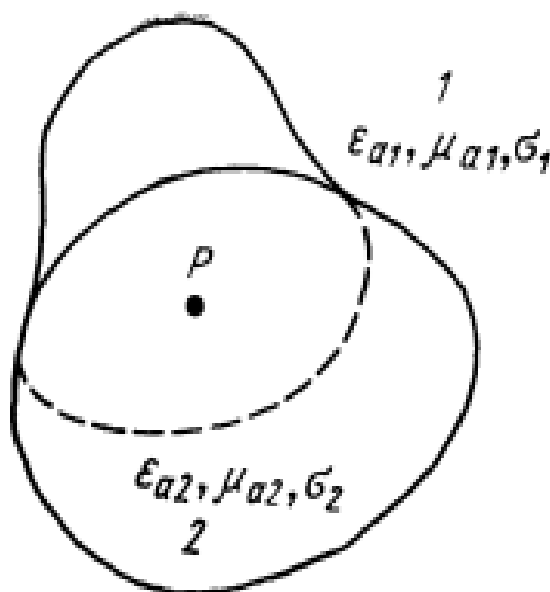


Рис. 2.4. К постановке задачи о граничных условиях

Математически постановка данной задачи выглядит следующим образом. На рисунке 2.4. представлено пространство с различными средами 1 и 2. Среда 1 в каждой своей точке обладает электродинамическими параметрами  $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1$ . Среда 2, находясь внутри области 1, занимает объем  $V$  с поверхностью  $S$ , раздела двух сред. Среда 2 имеет параметры  $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2$ .

На поверхности раздела выделена произвольная точка  $P$ , причем известно полное ЭМП в бесконечно малой окрестности этой точки, относящейся к области 1. Требуется отыскать ЭМП в той же окрестности, принадлежащей области 2.

Для решения поставленной задачи векторы электромагнитного поля необходимо разложить на тангенциальные (касательные) и нормальные (перпенди-

кулярные к поверхности раздела) составляющие, как показано на рис. 2.5 для вектора  $\vec{E}$ .

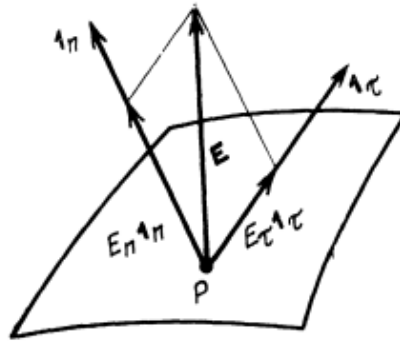


Рис. 2.5. Разложение вектора поля на тангенциальную и нормальную составляющую

Вектор  $\vec{E}$  может быть представлен в виде

$$\vec{E} = E_\tau \mathbf{1}_\tau + E_n \mathbf{1}_n, \quad (2.37)$$

где  $\mathbf{1}_\tau$  и  $\mathbf{1}_n$  – единичные векторы тангенциального и нормального направлений, соответственно (оба вектора лежат в плоскости, образованной вектором  $\vec{E}$  и нормалью к поверхности, проведенной в точке  $P$ ).

Рассмотрим отдельно тангенциальные и нормальные составляющие векторов на границе раздела.

#### Граничные условия для нормальных составляющих магнитного поля

Выполняются условия четвертого уравнения Максвелла  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

Обозначим через  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  векторные поля магнитной индукции в средах 1 и 2, соответственно, как показано на рис. 2.6.

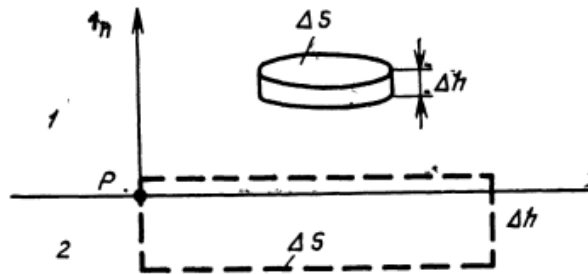


Рис. 2.6. К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля

Выделим в окрестности точки  $P$  цилиндрический объем с основаниями  $\Delta S$  и высотой образующей  $\Delta h$ , достаточно малый для того, чтобы считать  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  постоянными в пределах площадей  $\Delta S$ . Поток вектора магнитной индукции через суммарную поверхность запишется следующим образом:

$$\oint_{S_\Sigma} \vec{B} d\vec{S} \cong \vec{B}_1 \mathbf{1}_n \Delta S - \vec{B}_2 \mathbf{1}_n \Delta S + \text{поток через бок. поверхность}. \quad (2.38)$$

При приближении  $\Delta S$  к нулю (2.38) обращается в точное равенство.

Если же устремить к нулю высоту цилиндра  $\Delta h$ , то, соответственно, бесконечно малым станет поток через боковую поверхность. Следовательно,

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{S_{\Sigma}} \vec{B} d\vec{S} = \vec{B}_1 \mathbf{1}_n \Delta S - \vec{B}_2 \mathbf{1}_n \Delta S. \quad (2.39)$$

При устремлении всего объема к нулю справедливо будет уравнение

$$\vec{B}_1 \mathbf{1}_n - \vec{B}_2 \mathbf{1}_n = 0 \quad (2.40)$$

или

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (2.41)$$

Таким образом, *нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред непрерывны.*

Так как  $\vec{B} = \mu_{\alpha} \vec{H}$ , соотношение (2.41) может быть записано относительно напряженности магнитного поля

$$\mu_{\alpha 1} H_{1n} = \mu_{\alpha 2} H_{2n}. \quad (2.42)$$

Отсюда видно, что в общем случае напряженность магнитного поля на границе раздела двух сред *испытывает скачок.*

### Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля

Методика вывода остается прежней. Выполняются условия третьего уравнения Максвелла  $\text{div } \vec{D} = \rho$ . Возможны два случая.

*Случай 1* – плотность поверхностных электрических зарядов равна нулю.

Суммарный электрический заряд, заключенный внутри малой цилиндрической области (см. рис. 2.6), равен нулю. В соответствии с теоремой Гаусса

$$\oint_{S_{\Sigma}} \vec{D} d\vec{S} = \Delta Q = 0. \quad (2.43)$$

Отсюда следует

$$D_{1n} - D_{2n} = \varepsilon_{\alpha 1} E_{1n} - \varepsilon_{\alpha 2} E_{2n}. \quad (2.44)$$

Таким образом, *при отсутствии поверхностных электрических зарядов нормальные составляющие векторов электрического смещения на границе раздела двух сред непрерывны, в то время как нормальные составляющие напряженностей электрического поля в общем случае претерпевают скачок.*

*Случай 2* – на границе раздела равномерно распределен поверхностный заряд с плотностью  $\rho_{\text{нос}} \left[ \frac{Кл}{м^2} \right]$ .

В этом случае, очевидно, что высота цилиндра  $\Delta h$  не влияет на величину заряда. Имеет место неравенство  $D_{1n} \neq D_{2n}$ , а точнее

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{\text{нос}}. \quad (2.45)$$

Таким образом, при наличии заряженной границы раздела нормальные составляющие векторов электрического смещения испытывают скачок на величину плотности поверхностного заряда в исследуемой точке.

Физически это обусловлено тем, что заряд, расположенный на поверхности, создает собственное поле, ориентированное таким образом, что по одну сторону от границы раздела это поле складывается с внешним полем, а по другую – вычитается.

## Граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля

Задача о поведении на границе раздела тангенциальных составляющих магнитного поля решается на основе интегральной формулировки закона полного тока (циркуляция по контуру  $L$  вектора напряженности магнитного поля, вызванного протеканием тока  $\vec{I}_z$ , равна полному току, то есть  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_z$ ) для некоторого малого контура, проведенного в окрестности точки  $P$ , как показано на рис. 2.7. Контур построен так, что обе меньшие стороны пересекают границу раздела, одна из больших сторон располагается в области 1, а другая – в области 2.

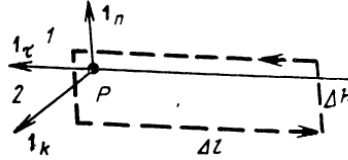


Рис. 2.7. К выводу граничных условий для тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля

Введем в точке  $P$  три взаимно ортогональных единичных вектора  $\mathbf{1}_t, \mathbf{1}_n, \mathbf{1}_k$ . Два первых, по-прежнему, являются единичными векторами тангенциального и нормального направлений, а вектор  $\mathbf{1}_k$  образует нормаль к плоскости, образованной первыми двумя векторами и лежит в плоскости границы раздела.

Будем считать, что на контуре задано такое направление обхода, которое с конца вектора  $\mathbf{1}_k$  наблюдается против часовой стрелки.

В обеих областях, разделяемых границей, протекают некоторые токи, которые могут включать как токи проводимости, так и токи смещения. По ранее проведенной методике применим к рассматриваемому контуру закон полного тока с учетом того, что размеры сторон контура настолько малы, что в его пределах можно считать векторы поля  $\vec{H}$  постоянными. Получим

$$\begin{aligned} \oint_{L_z} \vec{H} d\vec{l} &= (\vec{H}_1 \mathbf{1}_t - \vec{H}_2 \mathbf{1}_t) \Delta l + \text{циркуляция по бок. сторонам} = \\ &= (\delta_{np} \mathbf{1}_k + \delta_{em} \mathbf{1}_k) \Delta l \Delta h. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая.

*Случай 1.*

Электродинамические параметры обеих граничащих сред являются величинами конечными, значит, значение векторов плотности токов проводимости и смещения также конечны.

Устремляя высоту контура  $\Delta h$  к нулю, осуществим предельный переход. При этом величина циркуляции вектора  $\vec{H}$  по боковым сторонам также будет приближаться к нулю.

В силу предположения о конечности векторов плотности токов проводимости и смещения будем иметь переход

$$\begin{aligned} \text{от } \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\delta_{np} \mathbf{1}_k + \delta_{em} \mathbf{1}_k) \Delta l \Delta h &= 0 \\ \text{к } \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{L_z} \vec{H} d\vec{l} &= \vec{H}_1 \mathbf{1}_t \Delta l - \vec{H}_2 \mathbf{1}_t \Delta l = 0 \text{ или } H_{1t} = H_{2t}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Таким образом, при конечных значениях электродинамических параметров сред тангенциальные составляющие векторов напряженности магнитного поля

**непрерывны; следовательно, тангенциальные составляющие векторов магнитной индукции претерпевают разрыв:**

$$\frac{B_{1\tau} - B_{2\tau}}{\mu_{a1} - \mu_{a2}} \quad (2.48)$$

Случай 2.

Проводимость одной из граничных сред бесконечна.

Положим, что проводимость второй среды равна бесконечности. Подобное предположение делает невозможным применение формул (2.47). Дело в том, что при бесконечно большой проводимости среды глубина проникновения электромагнитных волн равна нулю на любой частоте. В результате токи проводимости протекают по поверхностной пленке нулевой толщины, так что предельный переход вида (2.47) дает отличный от нуля результат.

Для характеристики токов, протекающих по поверхности идеального проводника, введем понятие вектора плотности поверхностного тока  $\vec{\delta}_{нос}$ . Принцип введения этого вектора поясняет рис. 2.8.

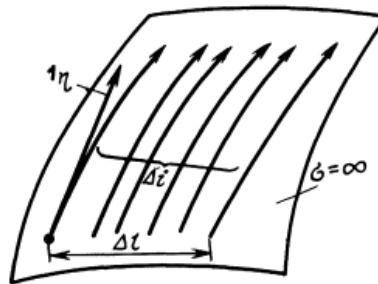


Рис. 2.8. К введению понятия плотности поверхностного тока

Прежде всего, введем единичный вектор, касательный к линиям тока в данной точке. Обозначим этот вектор через  $\mathbf{1}_\eta$ . Затем находим величину тока  $\Delta i$ , протекающего через отрезок  $\Delta l$ , перпендикулярный вектору  $\mathbf{1}_\eta$ . Далее плотность тока определим как предел отношения

$$\vec{\delta}_{нос} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} \mathbf{1}_\eta. \quad (2.49)$$

Теперь формулу (2.46) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \oint_{L_2} \vec{H} d\mathbf{l} = \vec{H}_1 \mathbf{1}_\tau \Delta l - \vec{H}_2 \mathbf{1}_\tau \Delta l = \vec{\delta}_{нос} \mathbf{1}_k \Delta l. \quad (2.50)$$

Также следует учесть, что внутри идеального проводника составляющие ЭМП должны равняться нулю. Так как среда 2 выбрана в качестве идеального проводника,  $\vec{H}_2 = \mathbf{0}$ . Получим

$$\vec{H}_1 \mathbf{1}_\tau = \vec{\delta}_{нос} \mathbf{1}_k. \quad (2.51)$$

Эта формула позволяет решить важную практическую задачу – определить плотность поверхностного тока  $\vec{\delta}_{нос}$  по магнитному полю  $\vec{H}_1$  на границе идеального проводника. С учетом того, что

$$\mathbf{1}_\tau = -[\mathbf{1}_n \mathbf{1}_k]. \quad (2.52)$$



и с учетом (2.51) можно записать

$$\vec{\delta}_{\text{маг}} = [\mathbf{1}_\tau \vec{H}_1]. \quad (2.53)$$

Таким образом, поверхностный ток на границе раздела с идеальным проводником (металлом) протекает в направлении, перпендикулярном вектору  $\vec{H}_1$ , и численно равен напряженности магнитного поля.

### Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля

Методика решения этой задачи совпадает с предыдущей. Отличие состоит в том, что вместо закона полного тока воспользуемся законом электромагнитной индукции (изменение во времени магнитного поля приводит к возникновению в пространстве электрического поля  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ).

В соответствии с этим законом для контура, изображенного на рис. 2.7, будем иметь

$$\begin{aligned} \oint_{L_2} \vec{E} d\mathbf{l} &= \vec{E}_1 \mathbf{1}_\tau \Delta l - \vec{E}_2 \mathbf{1}_\tau \Delta l + \text{циркуляция по бок. сторонам} = \\ &= -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \mathbf{1}_\tau \Delta l \Delta h. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Функция  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  для любых граничных сред является величиной конечной, поэтому предельный переход при  $\Delta h \rightarrow 0$  дает

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{L_2} \vec{E} d\mathbf{l} = \vec{E}_1 \mathbf{1}_\tau \Delta l - \vec{E}_2 \mathbf{1}_\tau \Delta l = 0, \quad (2.55)$$

отсюда

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \text{ и } \frac{D_{1\tau}}{\epsilon_{\alpha 1}} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_{\alpha 2}}. \quad (2.56)$$

Таким образом, тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела сред **непрерывны**, однако составляющие векторов электрического смещения **претерпевают разрыв**.

Рассмотрим отдельно граничные условия в том случае, когда средой 2 (см. рис. 2.7) является идеальный металл. Здесь, как уже известно, всегда  $\vec{E}_2 = 0$ . Если бы внутри идеального металла существовала конечная напряженность электрического поля, то это привело бы к протеканию здесь бесконечно больших токов проводимости и, как следствие, к выделению бесконечно большого количества тепла, что противоречит физической сущности задачи. Таким образом, с учетом сказанного граничное условие для идеального проводника принимает вид

$$\vec{E}_\tau = 0. \quad (2.57)$$

В соответствии с этим условием силовые линии электрического поля должны подходить к поверхности идеального металла по направлению нормали. Понятие «идеальный металл» является абстрактным, и на границе раздела с реальным металлом некоторая тангенциальная составляющая электрического поля всегда имеется. Однако часто она весьма мала, так что во многих задачах ее можно не учитывать.

### 3. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ НАПРАВЛЯЮЩИХ СРЕД

#### 3.1. Направляющие системы и направляемые волны

Электромагнитные волны могут свободно распространяться в пространстве, однако существуют волны, распространение которых возможно только при наличии каких-либо направляющих элементов (границ раздела сред, металлических, диэлектрических или полупроводящих трубок, стержней и пр.). Такие волны называют *направляемыми*. Совокупность направляющих элементов образует *направляющую систему*. ГОСТ 18238-72 устанавливает термин «Линия передач» – это устройство, ограничивающее область распространения электромагнитных колебаний и направляющее поток электромагнитной энергии в заданном направлении.

Линию передачи (ЛП), у которой поперечное сечение и другие параметры не меняются в продольном направлении, называются *однородными ЛП*.

На рисунке 3.1 показаны поперечные сечения некоторых используемых на практике линий передачи:

- а) двухпроводная ЛП;
- б) коаксиальная ЛП;
- в) экранированная двухпроводная ЛП;
- г) симметричная полосковая линия;
- д) несимметричная полосковая линия;
- е) диэлектрический волновод;
- ж) световод;
- з) прямоугольный волновод;
- и) круглый волновод;
- к) эллиптический волновод.

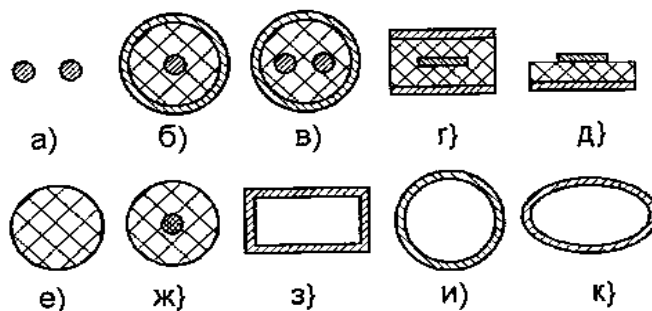


Рис. 3.1. Линии передачи однородных направляющих систем

Все ЛП делятся на два класса передачи:

- линии открытого типа (а, г, д, е, ж);
- линии закрытого типа (б, в, з, и, к).

Все линии передачи являются направляющими системами.

В ЛП закрытого типа вся передаваемая энергия сосредоточена в области, экранированной от внешней среды металлической оболочкой той или иной формы.

Линии передачи открытого типа – это такие ЛП, поперечное сечение которых не имеет замкнутого проводящего контура, охватывающего область распространения электромагнитной энергии.

ЛП открытого типа выполняются таким образом, чтобы подавляющая часть передаваемой энергии была сосредоточена в непосредственной близости к линии. Однако линии открытого типа подвержены влиянию внешних воздействий. На волны в таких линиях влияют электромагнитные поля, созданные другими источниками, и внешние воздействия (например, метеорологические: грозы, дождь, снег, обледенение).

По структуре поля направляемые волны делятся на:

- поперечные,
- электрические,
- магнитные;
- гибридные.

**Поперечными волнами, или ТЕМ-волнами** ( $T$  – первая буква английского слова transvers, что означает «поперечный»), называют волны, у которых  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны направлению распространения волны, то есть не имеют продольных составляющих. Согласно ГОСТ 18238-72 эти волны полагаются называть  $T$ -волнами. Однако это название практически не используется ни в зарубежной, ни в отечественной литературе. Сохранен общепринятый термин  $ТЕМ$ -волны.

**Электрическими волнами, или  $E$ -волнами**, называют волны, у которых вектор  $\vec{E}$  имеет как поперечные, так и продольную составляющую, а продольная составляющая вектора  $\vec{H}$  равна нулю. Часто  $E$ -волны называют *поперечными магнитными волнами* или  $ТМ$ -волнами.

**Магнитными волнами, или  $H$ -волнами**, называют волны, у которых вектор  $\vec{H}$  имеет как поперечные, так и продольную составляющую, а продольная составляющая вектора  $\vec{E}$  равна нулю.  $H$ -волны часто называют *поперечными электрическими волнами* или  $ТЕ$ -волнами.

**Гибридными, или смешанными, волнами** называют волны, у которых и вектор  $\vec{E}$ , и вектор  $\vec{H}$  наряду с поперечными составляющими имеют и продольные составляющие.

### 3.2. Метод комплексных амплитуд

Все реальные незатухающие периодические процессы можно представить либо в виде суммы гармонических колебаний, либо в виде непрерывного спектра гармонических колебаний. Изучение гармонических во времени электромагнитных полей представляет большой практический и теоретический интерес. Такие поля часто называют *монохроматическими*. В буквальном переводе

«монохроматический» означает «одноцветный». Название взято из оптики: как известно, каждому цвету соответствует колебание определенной частоты.

Рассмотрим *метод комплексных амплитуд* без привязки к каким-либо рассматриваемым характеристикам.

Имеем скалярную функцию, описывающую гармонический процесс и изменяющуюся по закону

$$\psi = \psi_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.1)$$

где  $\psi_m$  – амплитуда функции;  $\varphi$  – начальная фаза;  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ ; а  $f$  и  $T$  – частота и период колебания, соответственно.

Для упрощения анализа гармонических колебаний, используя уравнения Эйлера, вводим в рассмотрение комплексную функцию

$$\dot{\psi} = \psi_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \dot{\psi}_m e^{i\omega t}, \quad (3.2)$$

где  $\dot{\psi}_m = \psi_m e^{i\varphi}$  принято называть *комплексной амплитудой функции*  $\psi$ . Для перехода от комплексной функции  $\dot{\psi}_m$  к исходной функции  $\psi$  нужно взять от  $\dot{\psi}$  реальную часть

$$\psi = \text{Re } \dot{\psi} = \text{Re}(\dot{\psi}_m e^{i\omega t}). \quad (3.3)$$

Проведем ту же операцию для вектора  $\vec{a}$

$$\vec{a} = \vec{x}_0 a_{xm} \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{y}_0 a_{ym} \cos(\omega t + \varphi_2) + \vec{z}_0 a_{zm} \cos(\omega t + \varphi_3), \quad (3.4)$$

введем в рассмотрение комплексный вектор

$$\dot{\vec{a}} = \vec{x}_0 a_{xm} \exp[i(\omega t + \varphi_1)] + \vec{y}_0 a_{ym} \exp[i(\omega t + \varphi_2)] + \vec{z}_0 a_{zm} \exp[i(\omega t + \varphi_3)] = \dot{\vec{a}}_m \exp(i\omega t),$$

где

$$\dot{\vec{a}}_m = \vec{x}_0 a_{xm} e^{i\omega\varphi_1} + \vec{y}_0 a_{ym} e^{i\omega\varphi_2} + \vec{z}_0 a_{zm} e^{i\omega\varphi_3} \quad (3.5)$$

– комплексная амплитуда вектора  $\vec{a}$ .

Для перехода от комплексной амплитуде  $\dot{\vec{a}}_m$  к мгновенному значению исходной функции нужно вычислить реальную часть произведения  $\dot{\vec{a}}_m$  на  $\exp(i\omega t)$ :

$$\vec{a} = \text{Re}(\dot{\vec{a}}_m e^{i\omega t}) \equiv \text{Re} \dot{\vec{a}}. \quad (3.6)$$

Отметим, что в общем случае вместо разложения вектора  $\vec{a}$  по ортам декартовой системы координат может оказаться необходимым разложение по каким-либо другим ортогональным векторам, что не вносит никаких принципиальных изменений в порядок написания, следует только следить за верностью написания символов и индексов. Если функции  $\vec{a}$  и  $\psi$  удовлетворяют *линейным уравнениям*, то таким же уравнениям будут удовлетворять соответствующие комплексные функции  $\dot{\vec{a}}$  и  $\dot{\psi}$ . Однако определение комплексных функций во многих случаях оказывается проще определения исходных функций. Это объясняется тем, что дифференцирование комплексной функции по времени равносильно умножению ее на  $i\omega$ :

$$\frac{\partial \dot{\vec{a}}}{\partial t} = i\omega \dot{\vec{a}}; \quad \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial t} = i\omega \dot{\psi},$$

а интегрирование по времени – к делению на  $i\omega$ :

$$\int \dot{a} dt = \frac{\dot{a}}{i\omega}; \quad \int \dot{\psi} dt = \frac{\dot{\psi}}{i\omega}.$$

Перейдем к преобразованию уравнений Максвелла к виду в комплексной форме.

Уравнения Максвелла являются линейными дифференциальными уравнениями. Значит, при изучении монохроматических электромагнитных полей можно вместо векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  рассматривать *комплексные векторы*

$$\vec{E} = \vec{E}_m \exp(i\omega t) \quad \text{и} \quad \vec{H} = \vec{H}_m \exp(i\omega t).$$

Руководствуясь выражением (3.6), составим комплексные амплитуды  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$ .

Пусть для электрического поля

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_2) + \vec{z}_0 E_{zm} \cos(\omega t + \varphi_3),$$

где  $E_{xm}$ ,  $E_{ym}$  и  $E_{zm}$  – амплитуды составляющих вектора  $\vec{E}$ ;  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  – начальные фазы составляющих вектора электрического поля.

Для магнитного поля

$$\vec{H} = \vec{x}_0 H_{xm} \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{y}_0 H_{ym} \cos(\omega t + \varphi_2) + \vec{z}_0 H_{zm} \cos(\omega t + \varphi_3),$$

где  $H_{xm}$ ,  $H_{ym}$  и  $H_{zm}$  – амплитуды составляющих вектора  $\vec{H}$ ;  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  – начальные фазы составляющих вектора магнитного поля.

Тогда комплексная амплитуда  $\vec{E}_m$  будет

$$\vec{E}_m = \vec{x}_0 E_{xm} e^{i\omega\varphi_1} + \vec{y}_0 E_{ym} e^{i\omega\varphi_2} + \vec{z}_0 E_{zm} e^{i\omega\varphi_3},$$

а магнитного поля  $\vec{H}_m$  будет

$$\vec{H}_m = \vec{x}_0 H_{xm} e^{i\omega\varphi_1} + \vec{y}_0 H_{ym} e^{i\omega\varphi_2} + \vec{z}_0 H_{zm} e^{i\omega\varphi_3}.$$

Если составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются синфазно, то есть  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_c$ , то выражения упростятся

$$\vec{E}_m = e^{i\omega\varphi_c} (\vec{x}_0 E_{xm} + \vec{y}_0 E_{ym} + \vec{z}_0 E_{zm}),$$

$$\vec{H}_m = e^{i\omega\varphi_c} (\vec{x}_0 H_{xm} + \vec{y}_0 H_{ym} + \vec{z}_0 H_{zm}).$$

то 
$$\text{Если } \vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi), \text{ а } \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t + \varphi),$$
  

$$\vec{E}_m = \vec{E}_m \cdot e^{i\varphi}, \text{ а } \vec{H}_m = \vec{H}_m \cdot e^{i\varphi}. \quad (3.7)$$

### 3.3. Связь между поперечными и продольными составляющими векторов электромагнитного поля

Рассмотрим произвольную бесконечно протяженную однородную направляющую систему, ориентированную вдоль оси  $Z$ . Будем считать, что направляющая система не вносит потерь.

В области, где отсутствуют сторонние источники, комплексные амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , соответствующие волне, бегущей вдоль линии передачи, могут быть представлены в виде

$$\vec{E}_m = \vec{E}_0(\xi, \eta) e^{\pm i\beta z}, \vec{H}_m = \vec{H}_0(\xi, \eta) e^{\pm i\beta z}, \quad (3.8)$$

где  $\beta = \text{const}$  – коэффициент фазы, а  $\xi$  и  $\eta$  – координаты, изменяющиеся в поперечном сечении рассматриваемой линии передачи. Выбор конкретной системы координат зависит от формы поперечного сечения. Множитель  $e^{-i\beta z}$  соответствует волне, бегущей в положительном направлении оси  $z$ , а множитель  $e^{+i\beta z}$  – волне, бегущей в обратном направлении. Для определенности будем считать, что волна распространяется в положительном направлении. Если потребуется рассмотреть волны, бегущие в обратном направлении, это всегда должно быть оговорено.

Векторы  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$  должны удовлетворять однородным уравнениям Гельмгольца  $\Delta^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$  и  $\Delta^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$ , соответственно. С учетом формул (3.8) эти уравнения с учетом  $\epsilon$  и  $\mu$  принимают вид

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{E}_m + \gamma_{\perp}^2 \vec{E}_m = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \vec{H}_m + \gamma_{\perp}^2 \vec{H}_m = 0, \quad (3.9)$$

где  $\gamma_{\perp}^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \beta^2$  – поперечное волновое число, а оператор  $\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2$ .

Отсюда следует, что в тех случаях, когда векторы  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$  (оба или один из них) имеют продольные составляющие, нахождение поля направляемой волны может быть сведено к определению составляющих  $\dot{E}_{mz}$  и  $\dot{H}_{mz}$ , так как поперечные составляющие векторов поля выражаются через продольные. Проецируя уравнения Максвелла на оси  $x$  и  $y$  декартовой системы координат и учитывая, что в рассматриваемом случае дифференцирование по переменной  $z$  эквивалентно умножению на  $(-i\beta)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} + i\beta \dot{H}_{my} &= i\omega \epsilon \dot{E}_{mx}, & -i\beta \dot{H}_{mx} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} &= i\omega \epsilon \dot{E}_{my}, \\ \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} + i\beta \dot{E}_{my} &= -i\omega \mu \dot{H}_{mx}, & -i\beta \dot{E}_{mx} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} &= -i\omega \mu \dot{H}_{my}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Система уравнений (3.10) позволяет выразить составляющие  $\dot{E}_{mx}$ ,  $\dot{E}_{my}$ ,  $\dot{H}_{mx}$  и  $\dot{H}_{my}$  через  $\dot{E}_{mz}$  и  $\dot{H}_{mz}$ . После несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{\perp}^2 \dot{E}_{mx} &= -i \left( \beta \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} \right), \\ \gamma_{\perp}^2 \dot{E}_{my} &= -i \left( \beta \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} \right), \\ \gamma_{\perp}^2 \dot{H}_{mx} &= i \left( \omega \epsilon \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} \right), \\ \gamma_{\perp}^2 \dot{H}_{my} &= -i \left( \omega \epsilon \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система уравнений (3.11) связывает поперечные и продольные составляющие векторов поля в декартовой системе координат. Для выражения этой связи в произвольной системе координат необходимо перейти к векторной форме уравнений (3.11). Введем векторы:

$$\vec{\dot{E}}_{m\perp} = \vec{x}_0 \dot{E}_{mx} + \vec{y}_0 \dot{E}_{my}, \quad (3.12)$$

$$\vec{\dot{H}}_{m\perp} = \vec{x}_0 \dot{H}_{mx} + \vec{y}_0 \dot{H}_{my}, \quad (3.13)$$

связанные  $\vec{\dot{E}}_m$  и  $\vec{\dot{H}}_m$  соотношениями:

$$\vec{\dot{E}}_m = \vec{\dot{E}}_{m\perp} + \vec{z}_0 \dot{E}_{mz} \text{ и } \vec{\dot{H}}_m = \vec{\dot{H}}_{m\perp} + \vec{z}_0 \dot{H}_{mz}.$$

Подставляя в (3.12) вместо  $\dot{E}_{mx}$  и  $\dot{E}_{my}$  их выражения из (3.11), получаем равенство

$$\gamma^2_{\perp} \dot{E}_{m\perp} = -i\beta \left( \vec{x}_0 \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} \right) + i\omega\mu \left( -\vec{x}_0 \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} + \vec{y}_0 \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} \right),$$

которое может быть переписано в виде

$$\gamma^2_{\perp} \dot{E}_{m\perp} = -i\beta \text{grad}_{\perp} \dot{E}_{mz} + i\omega\mu [\vec{z}_0, \text{grad}_{\perp} \dot{H}_{mz}], \quad (3.14)$$

где оператор  $\text{grad}_{\perp} = \vec{x}_0 \partial/\partial x + \vec{y}_0 \partial/\partial y = \text{grad} - \vec{z}_0 \partial/\partial z$ .

Аналогично доказывается равенство

$$\gamma^2_{\perp} \dot{H}_{m\perp} = -i\beta \text{grad}_{\perp} \dot{H}_{mz} + i\omega\epsilon [\vec{z}_0, \text{grad}_{\perp} \dot{E}_{mz}]. \quad (3.15)$$

Продольные составляющие  $\dot{E}_{mz}$  и  $\dot{H}_{mz}$  удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2_{\perp} \dot{E}_{mz} + \gamma^2_{\perp} \dot{E}_{mz} = 0 \text{ и } \nabla^2_{\perp} \dot{H}_{mz} + \gamma^2_{\perp} \dot{H}_{mz} = 0, \quad (3.16)$$

вытекающим из (3.9).

Таким образом, для определения поля  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн достаточно найти составляющие  $\dot{E}_{mz}$  и  $\dot{H}_{mz}$  путем решения уравнений (3.16) с учетом краевых условий, соответствующих рассматриваемой направляющей системе, а для вычисления поперечных составляющих использовать (3.14) и (3.15).

У  $TEM$ -волн продольные составляющие векторов  $\dot{E}_m$  и  $\dot{H}_m$  отсутствуют ( $\dot{E}_{mz} = 0$  и  $\dot{H}_{mz} = 0$ ). Однако соотношения (3.11) или эквивалентные им равенства (3.14) и (3.15) оказываются полезными и в этом случае.

### 3.4. Общие свойства электрических, магнитных и гибридных волн

В случае электрических ( $\dot{E}_{mz} \neq 0, \dot{H}_{mz} = 0$ ), магнитных ( $\dot{H}_{mz} \neq 0, \dot{E}_{mz} = 0$ ) и гибридных ( $\dot{E}_{mz} \neq 0, \dot{H}_{mz} \neq 0$ ) волн постоянная  $\gamma_{\perp}$  отлична от нуля. Это следует из равенств (3.14) и (3.15). Для каждой конкретной линии передачи она может быть определена в результате решения уравнений (3.16) и учета краевых условий, соответствующих этой ЛП. Постоянная  $\gamma_{\perp}$  зависит от формы и размеров поперечного сечения ЛП и от типа распространяющейся волны, но не зависит от частоты.

Выражая коэффициент  $\beta$  из (3.9), получаем

$$\beta = \sqrt{k^2 - \gamma^2_{\perp}}. \quad (3.17)$$

Так как  $k = 2\pi f\sqrt{\varepsilon\mu}$ , то в зависимости от частоты подкоренное выражение в (3.17) может быть положительным (при  $k > \gamma_{\perp}$ ), равным нулю (при  $k = \gamma_{\perp}$ ) или отрицательным (при  $k < \gamma_{\perp}$ ).

В первом случае параметр  $\beta$  – действительное число и фазы составляющих векторов поля в фиксированный момент времени  $t = t_0 = \text{const}$  линейно зависят от координаты  $z$ , что является признаком распространения волны вдоль оси  $z$ .

В третьем случае  $k < \gamma_{\perp}$ . Подкоренное выражение (3.17) оказывается отрицательным, и  $\beta = -i|\beta|$ . Знак в правой части последнего равенства выбран из физических соображений: при этом множитель  $\exp(-i\beta z) = \exp(-|\beta|z)$  и амплитуды составляющих векторов  $\dot{E}_m$  и  $\dot{H}_m$  экспоненциально убывают вдоль оси  $z$ . Если принять  $\beta = i|\beta|$ , то амплитуды векторов поля будут возрастать с удалением от источников, что в рассматриваемой задаче физически невозможно. Фазы составляющих векторов поля в данном случае не зависят от координат: поле имеет характер стоячей волны и экспоненциально убывает вдоль оси  $z$ . Переноса энергии вдоль линии передачи в этом не происходит. Подчеркнем, что экспоненциальное убывание поля вдоль ЛП не связано с потерями энергии: рассматривается идеальная направляющая система, в которой потери отсутствуют.

Во втором случае параметр  $\beta = 0$ . Такой режим называется *критическим*. Частота  $f = f_{\text{кр}}$ , определяемая из условия  $k = \gamma_{\perp}$ , называется *критической частотой*

$$f_{\text{кр}} = \frac{\gamma_{\perp}}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (3.18)$$

Соответствующая этой частоте критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\gamma_{\perp}} \quad (3.19)$$

Выражая  $\gamma_{\perp}$  из (3.19) и подставляя в (3.17), получаем

$$\beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - (2\pi/\lambda_{\text{кр}})^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} \quad (3.20)$$

Как видно, параметр  $\beta$  является действительной величиной, то есть поле (3.8) представляет собой распространяющуюся волну, только при условии

$$\lambda < \lambda_{\text{кр}} \quad (3.21)$$

Неравенство (3.21) можно переписать

$$f > f_{\text{кр}} \quad (3.22)$$

Таким образом,  $E$ -,  $H$ - и гибридные волны в идеальных ЛП могут распространяться только на частотах, превышающих некоторую критическую частоту, определяемую формулой (3.18). Отметим, что значение  $f_{\text{кр}}$  зависит от формы и размеров поперечного сечения ЛП и типа волны.

Неравенство (3.21), а также (3.22) называют *условием распространения волны в линии передачи*.

По аналогии с обычным определением назовем длиной направляемой волны ( $\Lambda$ ), распространяющейся в линии передачи, расстояние между двумя поперечными сечениями, в которых в один и тот же промежуток времени фазы составляющих векторов  $\vec{E}$  (или  $\vec{H}$ ) отличаются на  $2\pi$ . Очевидно, что длина волны  $\Lambda$



равна расстоянию, на которое поверхность фазы перемещается за период. Так как зависимость всех составляющих векторов поля от координаты  $\mathbf{z}$  определяется множителем  $\exp(-i\beta z)$ , то

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \quad (3.23)$$

а фазовая скорость вычисляется по формуле

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (3.24)$$

Как видно, при  $\lambda < \lambda_{кр}$  длина волны в линии и фазовая скорость  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн больше, соответственно, длины волны  $\lambda = c/f$  и фазовой скорости  $v_{\phi} = c$  волны, свободно распространяющейся в безграничной однородной среде без потерь с параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ .

Отметим, что у  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн фазовая скорость зависит от частоты. Это явление называют *дисперсией волн*. При  $\lambda = \lambda_{кр}$  фазовая скорость равна бесконечности, при увеличении частоты  $v_{\phi}$  приближается к скорости света, как показано на рис. 3.2.

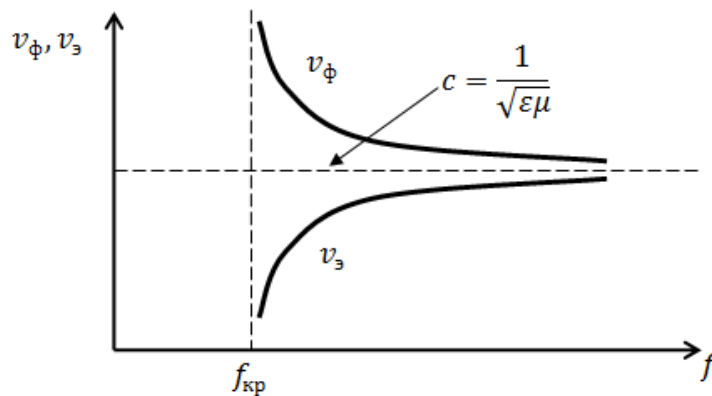


Рис. 3.2. Графики скоростей

Символом  $v_{\text{э}}$  на рисунке обозначена скорость распространения энергии, к которой мы вернемся несколько позднее.

Общие выражения для критической длины волны, критической частоты, коэффициента фазы, длины волны в линии передачи и фазовой скорости одинаковы для  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн. Однако из этого не следует, что значения перечисленных параметров будут одинаковыми для этих волн. Критическая длина волны зависит от поперечного волнового числа ( $\lambda_{кр} = 2\pi/\gamma_{\perp}$ ). В свою очередь, значение  $\gamma_{\perp}$  зависит от формы и размеров поперечного сечения ЛП и от структуры поля распространяющейся волны. Структура поля  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн различна, поэтому в общем случае соответствующие данным волнам значения  $\gamma_{\perp}$  могут не совпадать. При этом для указанных волн не будут совпадать и значения параметров  $\lambda_{кр}$ ,  $f_{кр}$ ,  $\beta$ ,  $v_{\phi}$  и  $\Lambda$ .

Перейдем к вычислению характеристических сопротивлений рассматриваемых волн. По определению характеристическое сопротивление волны равно отношению поперечных к направлению распространения составляющих векторов  $\dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_m$ .

В случае  $E$ -волн поперечные составляющие векторов  $\dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_m$  определяются формулами:

$$\gamma^2 \dot{\vec{E}}_{m\perp} = -i\beta \text{grad}_{\perp} \dot{\vec{E}}_{mz}, \quad (3.25)$$

$$\gamma^2 \dot{\vec{H}}_{m\perp} = -i\omega\varepsilon [\vec{z}_0, \text{grad}_{\perp} \dot{\vec{E}}_{mz}], \quad (3.26)$$

получающимися из (3.14) и (3.15) при  $\dot{\vec{H}}_{mz} = 0$ . Подставляя в (3.26) выражение для  $\text{grad}_{\perp} \dot{\vec{E}}_{mz}$  из (3.25), приходим к соотношению  $\dot{\vec{H}}_{m\perp} = (\omega\varepsilon/\beta) [\vec{z}_0, \dot{\vec{E}}_{m\perp}]$ .

Аналогичное равенство выполняется и для векторов  $\dot{\vec{E}}_{0\perp} = \dot{\vec{E}}_0 - \vec{z}_0 \dot{E}_{0z}$  и  $\dot{\vec{H}}_{0\perp} = \dot{\vec{H}}_0 - \vec{z}_0 \dot{H}_{0z}$ , где  $\dot{E}_{0z}$  и  $\dot{H}_{0z}$  – продольные составляющие векторов  $\dot{\vec{E}}_0$  и  $\dot{\vec{H}}_0$ , введенные формулами (3.8). Как видно, векторы  $\dot{\vec{E}}_{m\perp}$  и  $\dot{\vec{H}}_{m\perp}$  взаимно перпендикулярны. Из полученного соотношения вытекает следующее выражение для характеристического сопротивления  $E$ - волн:

$$Z_c^E = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} - Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (3.27)$$

где  $Z_c = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ .

При этом соотношение, связывающее поперечные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в случае  $E$ -волн, принимает вид

$$\dot{\vec{H}}_{m\perp} = \frac{1}{Z_c^E} [\vec{z}_0, \dot{\vec{E}}_{m\perp}]. \quad (3.28)$$

Характеристическое сопротивление  $E$ -волн зависит от длины волны (от частоты). При  $\lambda < \lambda_{кр}$  оно всегда меньше  $Z_c = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ . На критической частоте (при  $\lambda = \lambda_{кр}$ )  $Z_c^E = 0$ . При уменьшении  $\lambda$  (при увеличении частоты от критической до бесконечности)  $Z_c^E$  возрастает от нуля до  $Z_c$ , как видно из рис. 3.3.

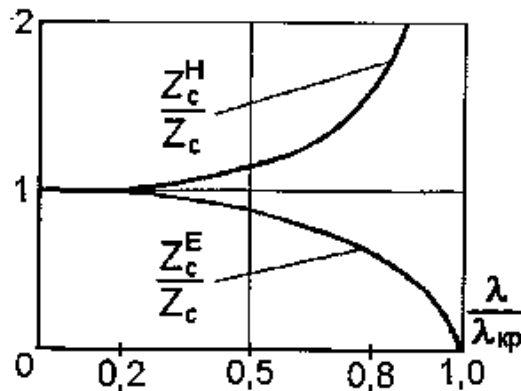


Рис. 3.3. Характеристическое сопротивление волн

Аналогично вычисляется характеристическое сопротивление  $Z_c^H$   $H$ -волн. Полагая в (3.14) и (3.15)  $\dot{\vec{E}}_z = \mathbf{0}$ , получаем

$$\gamma_{\perp}^2 \dot{\vec{E}}_{m\perp} = -i\omega\mu \left[ \dot{\vec{z}}_0, \text{grad}_{\perp} \dot{\vec{H}}_{mz} \right] \quad (3.29)$$

$$\gamma_{\perp}^2 \dot{\vec{H}}_{m\perp} = i\beta \text{grad}_{\perp} \dot{\vec{H}}_{mz}. \quad (3.30)$$

Подставляя выражение для  $\text{grad}_{\perp} \dot{\vec{H}}_{mz}$  из (3.30) в выражение (3.29), приходим к равенству  $\dot{\vec{E}}_{m\perp} = (-\omega\mu/\beta) \left[ \dot{\vec{z}}_0, \dot{\vec{H}}_{m\perp} \right]$ . Умножая векторно обе части уравнения на орт  $\dot{\vec{z}}_0$  и раскрывая двойное векторное произведение по правилам векторного умножения  $\{[a[b, c]] = b(a, c) - c(a, b)\}$ , получаем

$$\dot{\vec{H}}_{m\perp} - \frac{\beta}{\omega\mu} \left[ \dot{\vec{z}}_0, \dot{\vec{E}}_{m\perp} \right] - \frac{1}{Z_c^H} \left[ \dot{\vec{z}}_0, \dot{\vec{E}}_{m\perp} \right], \quad (3.31)$$

где 
$$Z_c^H = \omega\mu/\beta = Z_c / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}. \quad (3.32)$$

Отмечаем, что в случае  $H$ -волн векторы  $\dot{\vec{H}}_{m\perp}$  и  $\dot{\vec{E}}_{m\perp}$ , как и аналогичные им векторы для случая  $E$ -волн, взаимно перпендикулярны. Характеристическое сопротивление  $H$ -волн зависит от частоты. При  $\lambda < \lambda_{кр}$  оно всегда больше  $Z_c$ . При увеличении частоты от критической до бесконечности  $Z_c^H$  убывает от бесконечности до  $Z_c$  (см. рис. 3.3).

В области волн длиннее критической ( $\lambda > \lambda_{кр}$ ) характеристическое сопротивление  $E$ - и  $H$ -волн являются чисто мнимыми величинами. Это означает, что при  $\lambda > \lambda_{кр}$  поперечные составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей  $\dot{\vec{E}}_{m\perp}$  и  $\dot{\vec{H}}_{m\perp}$  сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Очевидно, что при этом комплексный вектор Пойнтинга принимает чисто мнимые значения, то есть вдоль линии не происходит переноса энергии. Поле в ЛПП при  $\lambda > \lambda_{кр}$  является чисто реактивным. При этом необходимо помнить, что все рассуждения ведутся в предположении, что ЛПП является идеальной (не вносит потерь).

В случае гибридных волн ( $\dot{\vec{E}}_{mz} \neq \mathbf{0}$  и  $\dot{\vec{H}}_{mz} \neq \mathbf{0}$ ) поперечные составляющие векторов  $\dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_m$  определяются общими выражениями (3.14) и (3.15). Поэтому получить единое простое выражение для характеристического сопротивления не удастся: его величина зависит от линии передачи и от структуры поля распространяющейся волны и при  $\lambda > \lambda_{кр}$  может быть как больше, так и меньше  $Z_c$ . На частотах, меньших критической ( $\lambda < \lambda_{кр}$ ), характеристическое сопротивление гибридных волн также принимает чисто мнимые значения.

### 3.5. Общие свойства поперечных электромагнитных волн

Соотношения (3.14) и (3.15) были получены непосредственно из уравнений Максвелла. Они должны выполняться для любых направляемых волн, включая  $TEM$ -волны. Полагая в (3.14) и (3.15)  $\dot{\vec{E}}_{mz} = \mathbf{0}$  и  $\dot{\vec{H}}_{mz} = \mathbf{0}$ , приходим к уравнениям  $\dot{\vec{E}}_{m\perp} = \mathbf{0}$  и  $\dot{\vec{H}}_{m\perp} = \mathbf{0}$ . Так как  $\dot{\vec{E}}_{m\perp} = \dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_{m\perp} = \dot{\vec{H}}_m$ , то эти уравнения будут выполняться только при  $\gamma_{\perp} = \mathbf{0}$ . При этом из (3.21) и (3.22) следует, что у  $TEM$ -волн  $f_{кр} = \mathbf{0}$  и  $\lambda_{кр} = \infty$ . Значит, в тех направляющих системах, в которых возможно распространение  $TEM$ -волн, эти волны могут существовать на любой

частоте вплоть до  $f \rightarrow 0$ . Поэтому *ТЕМ*-волны могут распространяться только в тех линиях передачи, в которых может протекать постоянный ток. Этому требованию удовлетворяют направляющие системы, состоящие не менее чем из двух изолированных друг от друга металлических проводников (двухпроводная, коаксиальная, полосковая, экранированная двухпроводная линии и пр.). В полых металлических трубах с любой формой поперечного сечения, диэлектрических волноводах и других аналогичных системах распространение *ТЕМ*-волн невозможно. Предположим, что внутри полой идеально проводящей трубы распространяется *ТЕМ*-волна. Линии магнитного поля в этом случае должны образовывать замкнутые кривые, лежащие в поперечных плоскостях. Из первого уравнения Максвелла следует, что они должны охватывать продольные линии токов проводимости и/или смещения. Для существования продольного тока вектор  $\vec{E}_m$  должен иметь продольную составляющую ( $j_{mz} = \sigma \dot{E}_{mz}$ ,  $j_{mz}^{cm} = i\omega \epsilon \dot{E}_{mz}$ ). Однако у *ТЕМ*-волн такой составляющей не может быть по определению.

Так как в случае *ТЕМ*-волн  $\gamma_{\perp} = 0$ , то коэффициент фазы, фазовая скорость и длина волны будут совпадать с аналогичными параметрами волны, свободно распространяющейся в безграничной однородной изотропной среде:

$$\beta_{ТЕМ} = k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (3.33)$$

$$v_{\phi ТЕМ} = \frac{\omega}{\beta_{ТЕМ}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = c, \quad (3.34)$$

$$\Lambda_{ТЕМ} = \frac{2\pi}{\beta_{ТЕМ}} = \frac{c}{f} = \lambda. \quad (3.35)$$

Характеристическое сопротивление *ТЕМ*-волны легко находится из уравнений (3.10). Полагая в этих уравнениях  $\dot{E}_{mz} = 0$  и  $\dot{H}_{mz} = 0$ , приходим к соотношениям, которые можно записать в виде векторного равенства

$$\dot{H}_m = \frac{\omega \epsilon}{\beta_{ТЕМ}} [\vec{Z}_0, \dot{E}_m] = \frac{1}{Z_c^{ТЕМ}} [\vec{Z}_0, \dot{E}_m], \quad (3.36)$$

где

$$Z_c^{ТЕМ} = \frac{\sqrt{\dot{E}_x^2 + \dot{E}_y^2}}{\sqrt{\dot{H}_x^2 + \dot{H}_y^2}} = \frac{\beta_{ТЕМ}}{(\omega \epsilon)} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_c. \quad (3.37)$$

Как видно,  $Z_c^{ТЕМ}$  совпадает с характеристическим сопротивлением волны, свободно распространяющейся в безграничной однородной среде с параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ .

Отметим, что уравнения (3.28), (3.31) и (3.36) однотипны и отличаются только значениями характеристических сопротивлений. Эти уравнения можно объединить в одну формулу

$$\dot{H}_{m\perp} = \frac{1}{Z_c^{лп}} [\vec{Z}_0, \dot{E}_{m\perp}], \quad (3.38)$$

где  $Z_c^{лп}$  – характеристическое сопротивление волны, распространяющейся по линии передачи:

- для *ТЕМ*-волны  $Z_c^{лп} = Z_c$ ;
- для *Е*-волны  $Z_c^{лп} = Z_c^E$ ;
- для *Н*-волны  $Z_c^{лп} = Z_c^H$ .

Полагая в уравнениях (3.8)  $\gamma_{\perp} = 0$ , сокращая множитель  $e^{-i\beta z}$  и учитывая, что в случае *ТЕМ*-волны  $\dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{E}}_{\perp}$  и  $\dot{\vec{H}}_0 = \dot{\vec{H}}_{\perp}$ , получаем уравнения для векторов  $\dot{\vec{E}}_0$  и  $\dot{\vec{H}}_0$ :

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{E}}_0 = 0 \text{ и } \nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{H}}_0 = 0. \quad (3.39)$$

Поле, удовлетворяющее таким уравнениям, является потенциальным. Это означает, что решения уравнения (3.39) могут быть представлены в виде градиентов от некоторых скалярных функций, например:

$$\dot{\vec{E}}_0 = -\text{grad} u_0, \quad (3.40)$$

где функция  $u_0$  зависит только от поперечных координат и удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla_{\perp}^2 u_0 = 0$ . Аналогичное представление для вектора  $\dot{\vec{H}}_0$  можно не выписывать, так как векторы  $\dot{\vec{E}}_0$  и  $\dot{\vec{H}}_0$  связаны соотношением, аналогичным (3.36):  $\dot{\vec{H}}_0 = (1/Z_c) [\hat{z}_0, \dot{\vec{E}}_0]$ .

В уравнения (3.39) не входит частота. Из этого следует, что функции  $\dot{\vec{E}}_0$  и  $\dot{\vec{H}}_0$ , определяющие структуру поля в поперечных сечениях линии, не зависят от частоты и могут быть найдены на основе решения рассматриваемой задачи при  $f > 0$ . Для определения вектора  $\dot{\vec{E}}_0$  достаточно решить двумерную электростатическую задачу для такой же линии. При этом во многих случаях целесообразно вначале определить функцию  $u_0$ , которую можно трактовать как электростатический потенциал указанной электростатической задачи, а затем воспользоваться формулой (3.40).

Вектор  $\dot{\vec{H}}_0$  совпадает с напряженностью магнитного поля, создаваемого постоянными токами, текущими по рассматриваемой линии при  $f \rightarrow 0$ . Поэтому она может быть найдена либо непосредственно, если известно распределение токов, либо по формуле, аналогичной (3.36), после определения  $\dot{\vec{E}}_0$ .

При неидеальной проводимости металлических проводников, образующих линию, электромагнитное поле проникает в металл. В соответствии с граничными условиями Леонтовича–Щукина появляется отличная от нуля касательная составляющая напряженности электрического поля, параллельная оси  $Z$ , что делает невозможным существование *ТЕМ*-волны. Однако при достаточно высокой проводимости металла структуры поля распространяющейся волны настолько мало отличаются от структуры поля *ТЕМ*-волны в идеально проводящей системе, что этим отличием во многих случаях можно пренебречь.

Очевидно, что структуры полей *E*- и *H*-волн при неидеальной проводимости металлических элементов линии передачи также будут несколько отличаться от структур соответствующих волн в случае идеальной проводимости указанных элементов. Эти отличия также будут незначительными, и, если речь не идет о вычислении потерь линии, ими обычно пренебрегают.

### 3.6. Концепция парциальных волн

Сказанное о сущности деления волн на волны типов *ТЕМ*, *E* и *H* дает основание для суждения о том, при каких условиях и в каких линиях возникают те или иные типы волн. Как известно, в однородной неограниченной среде волны распространяются прямолинейно. Изгиб пути распространения возможен в неод-

нородной среде или когда одна среда окружена другой средой, на границе которых возникает отражение волн. Отсюда следует, что волны типов  $E$  и  $H$  возможны в металлических волноводах, коаксиальных кабелях, в диэлектрических волноводах и пр. Во всех этих линиях передачи распространяющиеся электромагнитные волны можно представить в виде парциальных плоских волн, совершающих «скачки», между отражающими поверхностями.

Свойства гибридных волн существенно отличаются от свойств  $TEM$ -волн. Эти отличия легко объясняются, если предположить, что  $E$ -,  $H$ - и гибридные волны могут быть представлены в виде суперпозиции парциальных  $TEM$ -волн, распространяющихся под некоторым углом к оси линии передачи (оси  $Z$ ). Распространение парциальных волн в этом случае может происходить, например, вдоль ломаной линии путем многократных отражений от стенок, как показано на рис. 3.4, или других элементов направляющей системы. Если направляющая система заполнена неоднородной средой, характер распространения парциальных волн может быть более сложным.

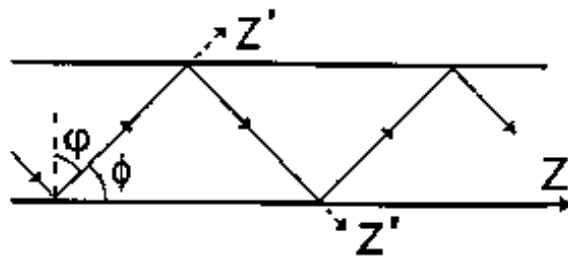


Рис. 3.4. Распространение парциальных волн

У  $TEM$ -волны, распространяющейся непосредственно вдоль оси  $Z$ , как показано на рис. 3.5, векторы  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$  лежат в поперечной плоскости (перпендикулярны оси  $Z$ ). У парциальной  $TEM$ -волны векторы  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$  лежат в плоскостях, перпендикулярных отрезкам ломаной линии (см. рис. 3.4), вдоль которой распространяется парциальная волна.

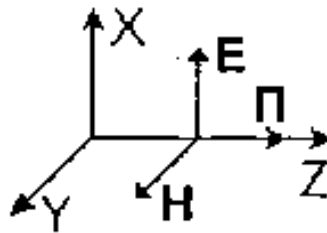


Рис. 3.5. Направление распространения  $TEM$ -волны

В данном случае, по меньшей мере, один из векторов ( $\vec{E}_m$  или  $\vec{H}_m$ ) будет не перпендикулярен оси  $Z$ . При этом либо вектор  $\vec{E}_m$ , либо вектор  $\vec{H}_m$ , как видно на рис. 3.6 (а и б), либо оба вектора (и  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$ ) будут иметь продольные состав-

ляющие, что соответствует  $E$ -,  $H$ - и гибридным волнам, распространяющимся вдоль оси  $Z$ .

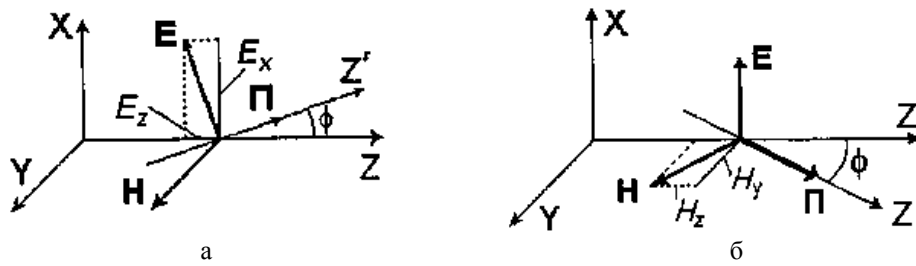


Рис. 3.6. Распространение парциальной  $TEM$ -волны

Используем представление о парциальных волнах для объяснения полученных ранее результатов: длина волны в линии и фазовая скорость у  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн больше соответствующих параметров  $TEM$ -волны, характеристическое сопротивление у  $E$ -волны меньше, а у  $H$ -волны больше характеристического сопротивления  $TEM$ -волны.

В случае  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн парциальная  $TEM$ -волна распространяется вдоль линии, образуя угол  $\phi$  с осью  $Z$ , как показано на рис. 3.7. Поверхности равных фаз (ПРФ) этой волны перпендикулярны оси  $Z'$  и перемещаются вдоль нее с фазовой скоростью  $v_{\phi}^{TEM} = \lambda/T$ , где  $T$  – период электромагнитных колебаний.

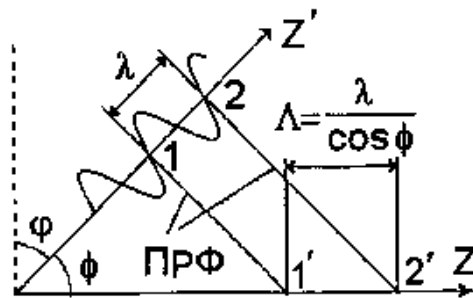


Рис. 3.7. Перемещение поверхности равных фаз

За время  $T$  каждая ПРФ, например ПРФ  $1 - 1'$  на рис. 3.7, переместится вдоль оси  $Z'$  на расстояние  $\lambda$  (расстояние  $1 - 2$  на рис. 3.7). Путь, пройденный этой же ПРФ за время  $T$  вдоль оси  $Z$ , будет больше и равен расстоянию между точками  $1' - 2'$ . Соответственно, длина волны вдоль оси  $Z$  (длина волны в линии для случая  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн) будет больше  $\lambda$  и равна  $\Lambda = \lambda / \cos \phi$ . Отсюда фазовая скорость по оси  $Z$  равна  $v_{\phi} = \Lambda/T = \lambda / (T \cos \phi) = c / \cos \phi$ , то есть фазовые скорости  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн больше скорости света в данной среде.

Из рисунке 3.6, соответствующего  $E$ -волне, видно, что амплитуда поперечной относительно оси  $Z$  составляющей напряженности электрического поля ( $E_x$  на рис. 3.6) меньше амплитуды вектора  $\vec{E}$  парциальной волны, тогда как ампли-

туды напряженности магнитных полей у обеих волн совпадают (см. рис. 3.6). Следовательно, у  $E$ -волны, распространяющейся вдоль оси  $Z$ , отношение поперечных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей меньше, чем у парциальной  $TEM$ -волны. Соответственно  $Z^E_c < Z^{TEM}_c$ . У  $H$ -волн амплитуда поперечной составляющей напряженности магнитного поля ( $H_y$  на рис. 3.6) меньше амплитуды поперечной составляющей напряженности магнитного поля парциальной  $TEM$ -волны, тогда как амплитуды поперечных составляющих напряженностей электрических полей у обеих волн совпадают. Следовательно, характеристическое сопротивление  $H$ -волны больше, чем характеристическое сопротивление  $TEM$ -волны ( $Z^H_c > Z^{TEM}_c$ ).

Сравнивая формулы для  $\Lambda, v_\phi, Z^E_c$  и  $Z^H_c$  с формулами (3.23), (3.24), (3.27) и (3.32), соответственно, замечаем, что они будут совпадать, если считать  $\cos \phi = \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}$  или, что то же самое,  $\sin \phi = \lambda/\lambda_{кр}$ . Как видно, угол между осями  $z'$  и  $z$  зависит от  $\lambda$ . При  $\lambda \rightarrow 0 (f \rightarrow \infty)$  угол  $\phi \rightarrow 0$ , при  $\lambda \rightarrow \infty (f \rightarrow 0)$  угол  $\phi \rightarrow \pi/2$ .

Концепция парциальных волн впервые была сформулирована Бриллюэном применительно к частному случаю распространения волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе. В дальнейшем она была обобщена Г.З. Айзенбергом на случай любых направляемых волн.

### 3.7. Скорость распространения энергии и групповая скорость

Реальные электромагнитные сигналы, куда относятся и световые волны, являются немонахроматическими: они состоят из конечного либо бесконечного числа монохроматических колебаний с различными частотами. В системах, в которых имеет место дисперсия волн, например, диэлектрическая среда с потерями, фазовая скорость монохроматической волны зависит от частоты. Проходя один и тот же путь, монохроматические волны разной частоты получают разные фазовые сдвиги. В результате изменяется сдвиг по фазе между колебаниями, образующими сигнал. Соответственно, изменяется форма сигнала – сигнал искажается. Чем уже спектр сигнала, тем меньше разница между фазовыми скоростями отдельных монохроматических волн, тем меньше эти искажения.

Для характеристики перемещения немонахроматических сигналов вводят понятие *групповой скорости*, обозначая этим термином скорость перемещения максимума огибающей группы монохроматических волн, близких между собой по частоте.

Выведем формулу групповой скорости.

Пусть в диспергирующей среде распространяется эквивалентная некоторому сигналу в общем случае бесконечная сумма монохроматических волн. Мгновенное значение любой составляющей напряженности электростатического поля  $E(z, t)$ , соответствующего этому сигналу, можно записать в виде интеграла

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_m(\omega) e^{i[\omega t - \beta(\omega)z]} d\omega, \quad (3.41)$$



где  $\dot{A}_m(\omega) = A_m \exp[i\psi_0(\omega)]$ ,  $A_m(\omega)$  и  $\psi_0(\omega)$  – амплитуда и начальная фаза рассматриваемой составляющей вектора  $\vec{E}$  монохроматической волны частоты  $\omega$ , а  $\beta(\omega)$  – коэффициент фазы этой волны. Если спектр сигнала достаточно узкий и заключен в интервале частот  $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$ , то можно считать, что вне этого интервала  $A_m(\omega) \approx 0$ . При этом формула (3.41) принимает вид

$$E(\mathbf{z}, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) e^{i[\omega t - \beta(\omega)z]} d\omega. \quad (3.42)$$

Разлагая коэффициент фазы  $\beta(\omega)$  в ряд Тейлора в окрестности частоты  $\omega_0$ , получаем

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (3.43)$$

где  $\beta_0 = \beta(\omega_0)$  – коэффициент фазы монохроматической волны частоты  $\omega_0$ . Поскольку спектр сигнала узок, то в (3.43) можно ограничиться двумя первыми членами. При этом из (3.42) следует равенство

$$E(\mathbf{z}, t) = e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) \exp \left\{ i \left( \omega - \omega_0 \left[ t - \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \cdot z \right] \right) \right\} d\omega. \quad (3.44)$$

Чтобы не усложнять изложение, предположим, что у передаваемого сигнала  $\dot{A}_m(\omega)$  – четная функция относительно  $\omega = \omega_0$ . Воспользуемся преобразованием Эйлера. Тогда формула (3.44) принимает вид

$$E(\mathbf{z}, t) = \exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)] \times \left\{ 2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) \cos \left[ (\omega - \omega_0) \left( t - \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \cdot z \right) \right] d\omega \right\}. \quad (3.45)$$

Выражение в фигурных скобках в правой части равенства (3.45) представляет собой амплитуду рассматриваемой составляющей вектора  $\vec{E}$  сигнала, которая, очевидно, имеет максимум при

$$\cos \left[ (\omega - \omega_0) \left( t - \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \cdot z \right) \right] = 1.$$

Любая другая составляющая вектора  $\vec{E}$  немонохроматического сигнала также будет иметь максимум амплитуды при выполнении сформулированного условия.

Следовательно, максимум сигнала непрерывно перемещается вдоль оси  $\mathbf{z}$  со скоростью

$$v_{гp} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega}. \quad (3.46)$$

По определению эта величина и является групповой скоростью. Индекс  $\omega = \omega_0$  в выражении опущен, поскольку центральная частота  $\omega_0$  была выбрана произвольно. Так как при выводе формулы (3.46) в разложении (3.43) были сохранены только два первых члена, то условием применимости формулы (3.46) является медленное изменение коэффициента фазы  $\beta(\omega)$  вблизи частоты  $\omega_0$  и

узость спектра сигнала. При невыполнении этих условий влияние дисперсии становится весьма заметным, и сигнал в процессе распространения так сильно меняет свою форму, что само понятие групповой скорости теряет смысл.

В направляющих системах коэффициент фазы описывается выражением (3.20). Подставляя (3.20) в (3.46), находим групповую скорость направляемых волн:

$$v_{гр} = \frac{\beta}{\omega \epsilon \mu} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (3.47)$$

Как видно, при  $\lambda < \lambda_{кр}$  у  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн  $v_{гр} < c$ , а у  $TEM$ -волн  $v_{гр} = c$ . Этим приходим к важному выводу, что

$$v_{гр} v_{ф} = c^2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (3.48)$$

В окрестности максимума сигнала, очевидно, сосредоточена основная часть энергии. Поэтому скорость перемещения максимума сигнала, то есть групповая скорость, характеризует скорость перемещения энергии электромагнитного поля сигнала по линии передачи. Так как сигнал предполагался узкополосным, то эта скорость должна мало отличаться от скорости распространения энергии  $v_э$  монохроматической волны, то есть  $v_э \approx v_{гр}$ . Как показывают расчеты в линиях передачи закрытого типа и некоторых других направляющих системах без потерь  $v_э = v_{гр}$ . Поэтому скорость распространения энергии  $v_э$  в идеальных линиях передачи можно определять по формуле (3.48) с учетом (3.47):

$$v_э = \frac{c^2}{v_{ф}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (3.49)$$

Как и следовало ожидать,  $v_э < c$  для  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн и  $v_э = c$  для  $TEM$ -волн. Зависимость  $v_э$  от частоты для  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн показана на рис. 3.2. При  $\lambda = \lambda_{кр}$  скорость распространения энергии равна нулю и по мере повышения частоты приближается к скорости света в данной среде.

Этот же вывод о соотношении между  $v_э$  и  $c$  для  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн следует непосредственно из концепции парциальных волн. Как уже отмечалось,  $E$ -,  $H$ - и гибридные волны, распространяющиеся вдоль оси  $Z$ , могут быть представлены в виде суперпозиции парциальных  $TEM$ -волн, распространяющихся по зигзагообразному (или криволинейному) пути под некоторым углом  $\phi$  к оси  $Z$ . Скорость распространения энергии парциальных  $TEM$ -волн совпадает со скоростью света в среде, заполняющей линию передачи. Так как зигзагообразный путь длиннее, чем прямой путь вдоль оси  $Z$ , то скорость распространения энергии  $E$ -,  $H$ - и гибридных волн меньше скорости распространения энергии  $TEM$ -волн и равна  $v_э = v_э^{TEM} \cos \phi = c \cos \phi$ .

## 4. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

---

### 4.1. Волновое уравнение для произвольной линии передач

#### *Исходные предпосылки*

Приступая к анализу линий передачи (ЛП), обратимся к теории распространения волн по произвольной передающей линии. В качестве основного ограничения примем сначала, что линия однородна, то есть в направлении распространения энергии размеры сечения и параметры неизменны. Поперечные размеры линии передачи могут находиться в любом соотношении с длиной волны.

Рассмотрим однородную неразветвленную линию передачи, состоящую из любого числа проводников произвольного поперечного сечения, как показано на рис. 4.1.

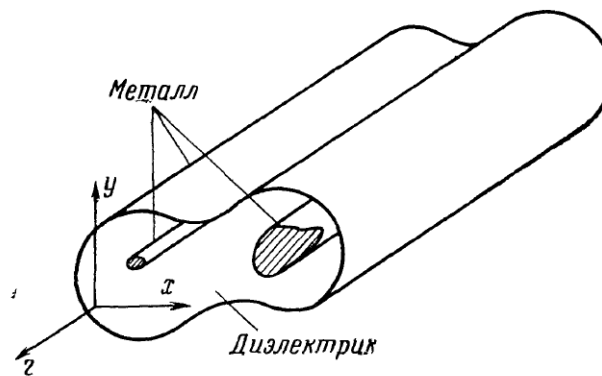


Рис. 4.1. Однородная линия передачи с проводниками произвольного поперечного сечения

Направление распространения волны совместим с осью  $z$  правосторонней прямоугольной системы координат. Поперечное сечение ЛП находится в плоскости  $xy$ .

Сейчас и в дальнейшем все решения будем проводить в международной системе мер СИ.

Пространство между проводниками заполнено изотропным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , относительной магнитной проницаемостью  $\mu$  и удельной проводимостью  $\sigma$ . В наиболее простых, чаще всего встречающихся случаях величины  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  не являются функциями координат и напряженности электрического и магнитного полей.

Считаем, что в пространстве между проводниками ЛП отсутствуют свободные заряды (электронные или ионные потоки), а также отсутствуют какие-либо виды «активных сред» (например атомы или молекулы), являющиеся источниками сторонних колебаний. Итак, рассмотрение будет ограничиваться случаем пассивной линии, по которой передается электромагнитная энергия от внешнего генератора.

Исходные уравнения Максвелла, описывающие ЭМП в пространстве между проводниками, не содержащем свободных зарядов, в дифференциальной форме имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}) = 0; \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} (\mu \mu_0 \vec{H}) = 0. \quad (4.4)$$

Через  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  обозначены диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, равные

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}} \text{ или } \varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\Phi}{\text{м}};$$

$$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} \text{ или } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Все дальнейшие рассуждения будем вести о полях, изменяющихся по гармоническому закону. Существованием несинусоидальных колебаний пренебрегаем.

Воспользуемся методом комплексных амплитуд для написания векторов электрического и магнитного полей в рассматриваемой ЛП. Переходя к мгновенному значению, можем записать выражение (3.7) в виде

$$\vec{E}_m \cdot e^{i\omega t} = \vec{E}, \text{ а } \vec{H}_m \cdot e^{i\omega t} = \vec{H}, \quad (4.5)$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний.

Подставляя выражения (4.5) в уравнения (4.1) и (4.2), после дифференцирования получим

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad (4.6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.6) преобразуется к виду

$$\operatorname{rot} \vec{H} = (\vec{j} + i\omega \varepsilon \varepsilon_0) \vec{E} = i\omega \varepsilon^* \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (4.8)$$

где  $\varepsilon^*$  – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость с учетом потерь в среде

$$\varepsilon^* = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}. \quad (4.9)$$

Таким образом, при однородном изотропном заполнении диэлектриком линии передачи уравнения поля приводятся к симметричному виду относительно векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \varepsilon' \varepsilon_0 \vec{E}; \quad (4.10)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_0 \vec{H} \quad (4.11)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0; \quad (4.12)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (4.13)$$

Уравнения Максвелла легко сводятся к волновым уравнениям, в которые входит только один из векторов поля. Определяя  $\vec{H}$  из выражения (4.11) и подставляя его в выражение (4.10), получаем:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \omega^2 \varepsilon' \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E}. \quad (4.14)$$

Раскрывая часть выражения, стоящую в левой части, по формуле двойного векторного произведения, получим:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \text{grad div } \vec{E} - \text{div grad } \vec{E} = \omega^2 \varepsilon' \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E}. \quad (4.15)$$

Введем обозначение

$$\omega^2 \varepsilon' \varepsilon_0 \mu_0 = k^2 \quad (4.16)$$

Физический смысл постоянной  $k$  будет выяснен в дальнейшем. В связи с тем, что имеет место выражение (4.13), из выражения (4.16) получаем *векторное волновое уравнение*

$$\text{div grad } \vec{E} + \omega^2 \varepsilon' \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} = 0;$$

или

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0. \quad (4.17)$$

Такое же уравнение можно получить относительно вектора  $\vec{H}$ , вычисляя величину  $\vec{E}$  из отношения (4.07) и подставляя его в выражение (4.11),

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0. \quad (4.18)$$

Все рассмотренные уравнения справедливы для любой системы координат, причем в общем случае векторы электрического и магнитного полей могут иметь по три составляющих. При использовании прямоугольной системы координат имеем

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z; \quad (4.19)$$

$$\vec{H} = \vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z, \quad (4.20)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы (орты) на осях координат  $x, y, z$ , соответственно.

Если подставить соотношения (4.19) и (4.20) в выражения (4.17) и (4.18) и произвести соответствующие преобразования, то получим шесть независимых скалярных уравнений:

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0;$$

$$\nabla^2 H_x + k^2 H_x = 0;$$

$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0;$$

$$\nabla^2 H_y + k^2 H_y = 0;$$

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0;$$

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0.$$

Все уравнения имеют совершенно одинаковую форму. Следовательно, нахождение общих выражений составляющих поля в прямоугольной системе

координат требует решения одного скалярного дифференциального уравнения в частных производных типа

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k^2 W = 0, \quad (4.21)$$

где  $W$  – одна из составляющих электрического или магнитного поля, то есть  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y$  или  $H_z$ . Выражение (4.21) назовем *общим волновым уравнением (ОВУ)*.

Необходимо отметить, что в цилиндрической системе координат, где в дальнейшем мы будем много работать, выражение  $\nabla^2 E$  будет иметь более сложную форму и не будет давать столь простых уравнений относительно всех составляющих поля.

*Решение волнового уравнения для произвольной линии передачи*

Математическое решение ОВУ может быть произведено разделением переменных по методу Фурье.

Представим решение ОВУ в виде произведения сомножителей, каждый из которых является функцией только одной координаты

$$W = X(x)Y(y)Z(z)e^{i\omega t}. \quad (4.22)$$

Произведем дифференцирование этого выражения и подставим результат в (4.21). После деления обеих частей уравнения на  $W$  (при этом отбрасывается тривиальный случай равенства поля нулю) получаем:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2. \quad (4.23)$$

Функции  $X, Y, Z$  являются взаимно независимыми. Поэтому для того, чтобы сумма членов, находящихся в левой части полученного выражения, равнялась постоянной величине, необходимо, чтобы каждый член из членов был равен некоторой константе. Это должно сочетаться таким образом, что все частные константы в сумме давали  $-k^2$ . Приравнивая каждый из членов постоянной, запишем:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\xi^2; \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\eta^2; \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2. \quad (4.26)$$

Постоянные  $\xi^2$  и  $\eta^2$  записаны произвольно со знаком минус, в отличие от постоянной  $\gamma^2$ . На этапе выбора констант таков выбор математически правомерен. Цель – удобство дальнейших рассуждений.

Связь выбранных постоянных определяется выражением (4.23), получаем

$$\xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = k^2. \quad (4.27)$$

Выражения (4.24)–(4.26) – дифференциальные уравнения второго порядка, решения которых могут быть записаны в следующем виде:

$$X = C_1 e^{i\xi x} + C_2 e^{-i\xi x}; \quad (4.28)$$

$$Y = C_3 e^{i\eta y} + C_4 e^{-i\eta y}; \quad (4.29)$$

$$Z = C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}. \quad (4.30)$$

Таким образом, с учетом соотношения (4.22) получено **решение общего волнового уравнения** для любых составляющих ЭМП в декартовой системе координат.

Так как ось  $\mathbf{z}$  выбрана в качестве направления распространения волны, функцию  $\mathbf{Z}$  оставим в показательной форме. Сомножители  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  представим в тригонометрической форме, воспользовавшись преобразованиями Эйлера.

Выражение (4.28) примет вид

$$X = (C_1 + C_2) \cos \xi x + i(C_1 - C_2) \sin \xi x. \quad (4.30)$$

Полученное уравнение можно представить также в виде

$$X = A \cos(\xi x - \varphi), \quad (4.31)$$

где  $A$  и  $\varphi$  – новые постоянные взамен постоянных  $C_1$  и  $C_2$ .

Аналогичным образом получим:

$$Y = (C_3 + C_4) \cos \eta y + i(C_3 - C_4) \sin \eta y \quad (4.32)$$

или

$$Y = B \cos(\eta y - \psi), \quad (4.33)$$

где  $B$  и  $\psi$  – постоянные взамен констант  $C_3$  и  $C_4$ .

Подставляя выражения (4.31) и (4.33) совместно с (4.29) в выражение (4.22), получим скаляр  $W$  равным

$$W = D_1 \cos(\xi x - \varphi) \cos(\eta y - \psi) e^{i\omega t - \gamma z} + \\ + D_2 \cos(\xi x - \varphi) \cos(\eta y - \psi) e^{i\omega t + \gamma z}, \quad (4.34)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – новые постоянные, объединяющие  $A, B, C_5$  и  $C_6$ .

Полученное решение распадается, таким образом, на два слагаемых, отличающихся лишь амплитудами и направлениями отсчета по оси  $\mathbf{Z}$ . Это решение дает две волны, распространяющиеся в противоположные стороны вдоль оси линии передачи.

Для рассмотрения свойств ЛП можно ограничиться анализом лишь одной из этих волн. Физически это означает, что рассматривается бесконечно длинная линия, не имеющая отраженной волны. Когда потребуется учет отраженных волн, можно будет целиком воспользоваться результатами анализа волн, распространяющихся в «прямом» направлении.

Таким образом, **решение скалярного волнового уравнения для любой составляющей поля бегущей волны** имеет общий вид

$$W = D \cos(\xi x - \varphi) \cos(\eta y - \psi) e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (4.35)$$

Константы  $\xi$  и  $\eta$ , входящие в это выражение, определяют изменение (вариацию) ЭМП в плоскости поперечного сечения рассматриваемой линии. Поэтому  $\xi$  и  $\eta$  называются *поперечными волновыми числами* ЛП.

Иногда при написании общего решения уравнения ОВУ используют несколько иную форму, исходящую из выражений (4.30), (4.32). Поскольку изменение поля вдоль осей  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , согласно этим выражениям, происходит по функциям синусов и косинусов, можно сокращенно записать:

$$W = D \frac{\cos(\xi x)}{\sin(\xi x)} \frac{\cos(\eta y)}{\sin(\eta y)} e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (4.36)$$

В дальнейшем будем использовать обе формы записи уравнений поля, соответствующие выражениям (4.34) и (4.35). При необходимости решение волнового уравнения можно записать в виде

$$W = F(x, y, z) e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (4.37)$$

где  $F(x, y, z)$  – функция распределения поля в плоскости фронта волны, не зависящая от координаты  $\mathbf{Z}$ .

## 4.2. Фазовая скорость и длина волны в линиях передачи

В режиме установившихся гармонических колебаний в произвольной однородной ЛП векторы электрического и магнитного полей бегущей волны могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_m(x, y)e^{i\omega t - \gamma z}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_m(x, y)e^{i\omega t - \gamma z},\end{aligned}\quad (4.38)$$

где  $\gamma$  – постоянная распространения волнового процесса.

Физический смысл ее поясняется следующим образом. Полагая в общем случае, что  $\gamma$  является комплексным числом, имеем

$$\gamma = \alpha + i\beta, \quad (4.39)$$

например, для электрического поля в ЛП получим:

$$\vec{E} = \vec{E}_m(x, y)e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (4.40)$$

где  $\alpha$  обуславливает затухание волны, то есть уменьшение амплитуды вдоль оси  $z$ ;  $\beta$  является фазовой постоянной. Следовательно, при чисто мнимой величине  $\gamma$  волна распространяется вдоль линии без затухания. При чисто действительной  $\gamma$  распространение волны не происходит. Электромагнитное поле затухает вдоль оси  $z$  по экспоненциальному закону без сдвига по фазе.

Фазовая скорость волны, распространяющейся по линии, имеет смысл скорости перемещения вдоль оси  $z$  «гребня» электрического или магнитного поля или другого волнового фронта, характеризующегося постоянством фазы волны. Из условия постоянства фазы в выражении (4.40) следует записать:

$$\omega t - \beta z = \text{const.}$$

Чтобы охарактеризовать фазу в каждый момент времени, продифференцируем последнее выражение и получим:

$$\omega dt = \beta dz; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Таким образом, фазовая скорость волны  $v_\phi$  в самом общем случае определяется выражением

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}. \quad (4.41)$$

Понятие фазовой скорости применимо только к монохроматическому колебанию, то есть к чисто синусоидальной волне, характеризуемой одним значением частоты  $\omega$ .

Чтобы учесть все возможные решения, не следует заранее полагать фазовую скорость волны равной скорости в свободном пространстве. Тогда по смыслу понятия длины волны, как пути, пройденного волной за период  $T$ , можно записать:

$$v_\phi = \frac{\lambda_{\text{ли}}}{T} = \lambda_{\text{ли}} \nu = \lambda_{\text{ли}} \frac{\omega}{2\pi}, \quad (4.42)$$

где  $\nu$  – частота колебаний, Гц;  $\lambda_{\text{ли}}$  – длина волны при данной частоте в рассматриваемой линии передачи.

Через  $\lambda$  без индекса будем обозначать длину волны в свободном пространстве, не заполненном диэлектриком. *Эта волна подразумевается всегда при указании параметров генераторов, при градуировке волномеров и пр.*



Допуская в общем случае неравенство фазовых скоростей в данной линии передачи и в свободном пространстве, необходимо допустить и неравенство соответствующих длин волн  $\lambda_{zn}$  и  $\lambda$ . Тем самым необходимо отказаться от привычного постоянства длины волны, как константы, однозначно характеризующей источник колебаний и полностью заменяющей частоту. Необходимость такого отказа будет ясна из последующего изложения.

Сопоставляя выражения (4.41) и (4.42), получаем:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{zn}}. \quad (4.43)$$

Фазовая постоянная  $\beta$  характеризует изменение ЭМП в продольном сечении рассматриваемой линии и называется *продольным волновым числом*.

Для нахождения величины фазовой скорости обратимся снова к волновым уравнениям (3.23) и (3.24):  $\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$  и  $\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$ . Зависимость поля от координаты  $Z$  определяется выражением (4.38)  $\vec{E} = \vec{E}_m(x, y)e^{i\omega t - \gamma z}$ . Произведя его дифференцирование по  $Z$  и подставляя в (4.17) для вектора электрического поля, получим:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \gamma^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0.$$

Первые два члена в этом уравнении представляют двухмерный лапласиан в плоскости поперечного сечения линии. Введем обозначение

$$\nabla_{xy}^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2}. \quad (4.44)$$

Используя это в предыдущем выражении, получим:

$$\nabla_{xy}^2 \vec{E} + (k^2 + \gamma^2) \vec{E} = 0. \quad (4.45)$$

Аналогично для вектора  $\vec{H}$ :

$$\nabla_{xy}^2 \vec{H} + (k^2 + \gamma^2) \vec{H} = 0. \quad (4.46)$$

Полученные уравнения могут быть использованы для определения *фазовой скорости в произвольной линии передачи*. Для режима распространения волн без затухания ( $\alpha = 0$ ) уравнение (4.39) принимает вид  $\gamma = i\beta$ . Это означает, что проводимость среды становится равной нулю и выражение (4.9) принимает вид, в котором диэлектрическая проницаемость  $\epsilon'$  оказывается равной  $\epsilon$ . Постоянная  $k$  в выражении (4.17) определяется соотношением

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0.$$

Рассмотрим два наиболее типичных случая. **Первый случай** – *распространение плоской волны в пространстве, не ограниченном проводником*. Тогда в уравнениях (4.45) и (4.46) первые слагаемые пренебрежительно малы в сравнении со вторыми слагаемыми и можно предположить, что  $\nabla_{xy}^2 \vec{E} = 0$  и  $\nabla_{xy}^2 \vec{H} = 0$ , а значит,

$$k^2 + \gamma^2 = 0 \rightarrow k^2 - \beta^2 = 0 \rightarrow k = \beta.$$

Следовательно, для плоской однородной волны в свободном пространстве, не ограниченном проводниками,

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0},$$

откуда в соответствии с определением  $\beta$  имеем:

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (4.47)$$

Этот результат, известный из курса физики, получен как частный случай общей теории. Для свободного пространства  $\varepsilon = \mu = 1$  фазовая скорость равна скорости света  $c$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}; c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Отсюда 
$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (4.48)$$

Теперь выясняется физический смысл постоянной  $k$ , формально введенной ранее в волновые уравнения. Она является *продольным волновым числом для пространства, не ограниченного проводниками.*

Перейдем к рассмотрению второго случая линии передачи, Выясним, с какими фазовыми скоростями могут распространяться волны в ограниченных линиях передачи.

Согласно выражениям (4.45) и (4.46) неравенство волновых чисел  $k$  и  $\beta$ , необходимое для существования волн с длиной волны  $\lambda_{\text{лп}}$ , отличной от  $\lambda$ , может быть удовлетворено лишь при условии

$$\nabla_{xy}^2 \vec{E} \neq 0; \nabla_{xy}^2 \vec{H} \neq 0. \quad (4.49)$$

При этом  $k^2 + \gamma^2 \neq 0 \rightarrow k^2 - \beta^2 \neq 0$  и равняется некоторому критическому числу  $k_{\text{кр}}^2$

$$k_{\text{кр}}^2 = k^2 - \beta^2 \quad (4.50)$$

или

$$\gamma^2 = -k^2 + k_{\text{кр}}^2. \quad (4.51)$$

Поскольку  $k = 2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}/\lambda$  и  $\beta = 2\pi/\lambda_{\text{лп}}$ , то исходя из соображений минимизации  $\varepsilon$  и  $\mu$  (равные или близкие к единице) и соблюдения размерности можно обозначить:

$$k_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}}, \quad (4.52)$$

где  $\lambda_{\text{кр}}$  – новый параметр, имеющий размерность длины. Индекс «кр» указывает на «критический» характер констант  $k_{\text{кр}}$  и  $\lambda_{\text{кр}}$ , которые определяют возможность распространения волны по ЛП.

Уясним, как это получается.

Подставляя выражение (4.52) в (4.50), получим

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{лп}}}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2.$$

Отсюда легко получить *уравнение, определяющее длину волны во всякой однородной линии передачи:*

$$\lambda_{\text{лп}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon \mu - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} \quad (4.53)$$

Большое практическое значение имеет случай диэлектрика, для которого  $\varepsilon = \mu = 1$  (вакуум или, практически, воздух). Тогда

$$\lambda_{\text{лп}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} \quad (4.54)$$

Из уравнений (4.53) и (4.54) можно определить фазовую скорость волны, распространяющейся по линии передачи, если известно, что  $v_{\phi} = \lambda_{\text{ли}} \nu$

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кп}}}\right)^2}} \quad (4.55)$$

В случае вакуумного наполнения имеем

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кп}}}\right)^2}} \quad (4.56)$$

Имеют место случаи, когда  $\lambda_{\text{кп}}$  является мнимой величиной и  $k_{\text{кп}}^2 < 0$ . Это *замедляющие системы*, которые будут рассмотрены позднее.

Вместо константы  $\lambda_{\text{кп}}$  иногда оказывается удобным ввести новую константу  $v_{\text{кп}}$ , имеющую размерность частоты и связанную со скоростью света в свободном пространстве соотношением

$$v_{\text{кп}} = \frac{c}{\lambda_{\text{кп}}} \quad (4.57)$$

Тогда при вакуумном наполнении линии уравнение (4.56) дает

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\text{кп}}}{\nu}\right)^2}} \quad (4.58)$$

Полученные уравнения показывают, что в общем случае фазовая скорость ЭМВ, направляемых линией передачи, может отличаться от скорости света. Далее, фазовая скорость зависит от частоты колебаний. В этом случае следует говорить о *дисперсии*.

## 5. ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВОЛОКОННОЙ ОПТИКИ

### 5.1. Когерентность оптического излучения

Идеальная *монохроматическая электромагнитная волна* (МЭВ) понимается как бесконечная в пространстве и времени волна, имеющая постоянную циклическую частоту  $\omega$ . Такой волне соответствует уравнение

$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(\omega t - kx), \quad (5.1)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрической компоненты поля волны в точке с координатой  $x$ ,  $\vec{E}_0$  – амплитуда вектора напряженности электрической компоненты,  $t$  – время работы источника (излучателя) волны,  $k = 2\pi/\lambda$  – модуль волнового вектора,  $\lambda$  – длина волны, излучаемой источником волны. Вид функции  $f$  определяется режимом работы излучателя МЭВ.

Современная оптоэлектроника использует в качестве источников излучения полупроводниковые, твердотельные и газовые *оптические квантовые генераторы* (ОКГ). Излучателями света в ОКГ являются либо возбужденные валентные электроны атомов (газовые ОКГ), либо электроны проводимости (полупроводниковые ОКГ). В *первом случае* переход валентного электрона из возбужденного состояния в невозбужденное сопровождается излучением фотона с энергией

$$\varepsilon_\phi = \hbar\nu, \quad (5.2)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка, а  $\nu$  – частота соответствующей фотону микроволны.

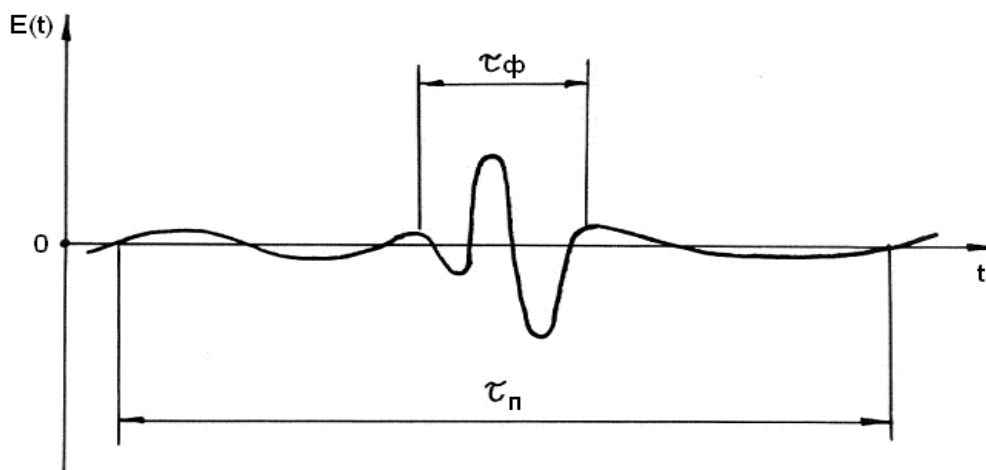


Рис. 5.1. Поле фотона

Во *втором случае* излучение фотона происходит в процессе рекомбинации электрона проводимости с дыркой, расположенной в валентной зоне. В *обоих случаях* время перехода электрона из возбужденного состояния в невозбужденное конечно и составляет величину  $\tau_{II} \approx 10^{-9}$  с. Время излучения фотона в процессе указанного перехода много меньше, чем  $\tau_{II}$ , и составляет величину  $\tau_{\Phi} = 5 \cdot 10^{-15}$  с, для  $\lambda = 1,5$  мкм. Условное соотношение между  $\tau_{II}$  и  $\tau_{\Phi}$  показано на рис. 5.1.

За время  $\tau_{II}$  излучается множество фотонов  $N_{\Phi}$ , которое определяется количеством возбужденных электронов в газе или в твердом теле. Всегда найдутся фотоны, имеющие одинаковую частоту  $\nu$ , с которой изменяется поле  $\vec{E}(t)$ . Последовательность таких фотонов образует *волновой цуг*, показанный на рис. 5.2.

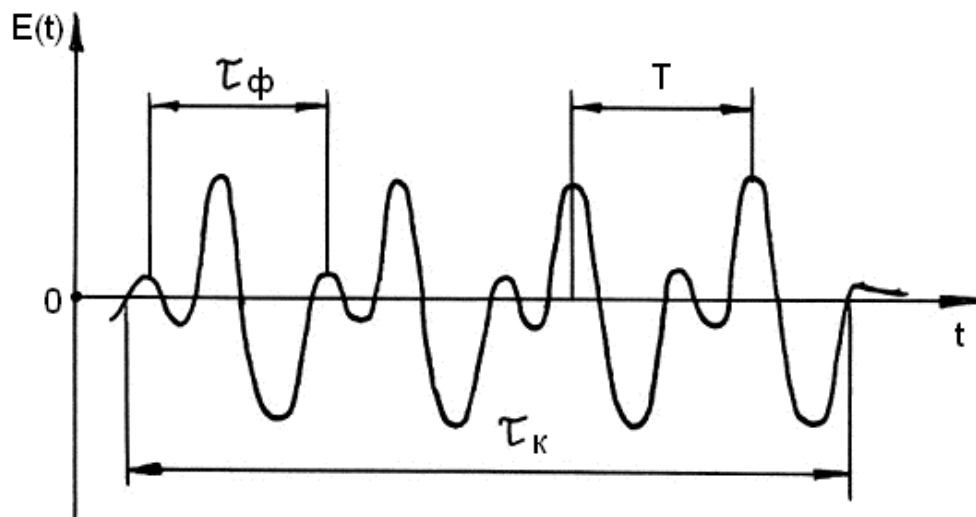


Рис. 5.2. Волновой цуг

Натурные измерения показали, что время самовоспроизведения фотона  $\tau_{\Phi}$  очень близко с периодом возникающей при этом электромагнитной волны  $T$ , как показано на рисунке. Причем за некоторый промежуток времени  $\tau_k$  ОКГ излучает множество цугов с незначительно отличающимися частотами. Накладываясь в пространстве и во времени, цуги образуют *волновой пакет*. Внутри волнового пакета цуги интерферируют. В результате интерференции возникают *биения* векторов  $\vec{E}$  – результат сложения колебаний с близкими частотами. Заметим, что волновой цуг распространяется с фазовой скоростью

$$V_{\Phi} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k'} \quad (5.3)$$

где  $n = c/v$  – абсолютный показатель преломления в среде распространения волны,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме,  $v$  – скорость света в реальной среде.

Волновой пакет распространяется с групповой скоростью

$$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = V_{\phi} + k \left( \frac{dV_{\phi}}{dk} \right), \quad (5.4)$$

где  $dV_{\phi}/dk$  – дисперсия (разобрать на ПЗ) фазовой скорости.

Реальное оптическое излучение, генерируемое ОКГ, представляет собой поток волновых пакетов, отличающийся от идеальной МЭВ, определенной выше.

**Введем понятие когерентности оптического излучения** как меры приближения реального излучения к идеальной МЭВ.

Различают *временную* и *пространственную когерентность*.

Основной характеристикой временной когерентности является *время когерентности*  $\tau_x$  (введенное нами на рис. 5.2). К характеристикам пространственной когерентности относятся:

- *длина когерентности*  $l_x$ ;
- «*радиус*» *когерентности*  $\rho_x$ ;
- *объем когерентности*  $U_x$ .

Понятие когерентности не следует путать с понятием когерентных волн (волн, имеющих одинаковые частоты, одинаковую разность фаз и одну плоскость колебаний).

Из вышесказанного очевидно, что для реального оптического излучения понятие когерентности волн является идеализированной моделью.

*Временем когерентности*  $\tau_x$  называется промежуток времени, в течение которого закон изменения фазы электромагнитной волны  $f(\omega t - kx)$  остается постоянным (см. рис. 5.2).

Согласно рисунку

$$\tau_x = N_{\phi} \cdot \tau_{\phi}, \quad (5.5)$$

где  $N_{\phi}$  – число фотонов, входящих в цуг.

*Длиной когерентности*  $l_x$  называется расстояние, которое проходит волна за время когерентности  $\tau_x$ . По определению

$$l_x = \frac{c}{n} \tau_x. \quad (5.6)$$

«*Радиусом*» *когерентности*  $\rho_x$  называется диаметр круга, в пределах которого разброс направлений волнового вектора  $\vec{K}$  электромагнитной волны не превышает  $\pi$  радиан.

*Объемом когерентности*  $U_x$  называется произведение площади круга диаметра  $\rho_x$  на длину когерентности  $l_x$ .

По определению

$$U_x = \frac{\pi \rho_x^2}{4} l_x. \quad (5.7)$$

Рассмотрим взаимосвязь  $\tau_x$  и  $l_x$  с реальными параметрами оптического излучения.

Элементарные преобразования позволяют установить взаимосвязь  $\tau_k$  и  $l_k$  с шириной полосы частот волнового пакета  $\Delta\nu$ , разбросом длин волн  $\Delta\lambda$  и разбросом модулей волновых векторов  $\Delta K$  в следующем виде:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau_k}; \Delta\lambda = \frac{\langle \lambda^2 \rangle}{l_k}; \Delta K = \frac{2\pi}{l_k}, \quad (5.8)$$

где  $\langle \lambda \rangle$  понимается как среднее значение длины волны в волновом пакете.

## 5.2. Оптические планарные волноводы со ступенчатым профилем

### 5.2.1. Концептуальный подход

**Оптические волноводы** – это диэлектрические структуры, по которым может распространяться электромагнитная энергия в видимой и инфракрасной части спектра.

Реальные волноводы, используемые в информационных каналах, представляют собой гибкие волокна из прозрачных диэлектрических материалов. Поперечное сечение таких волоконных световодов (ВС) имеет размеры, сравнимые с человеческим волосом, и обычно состоит из трех областей, как показано на рис. 5.3.

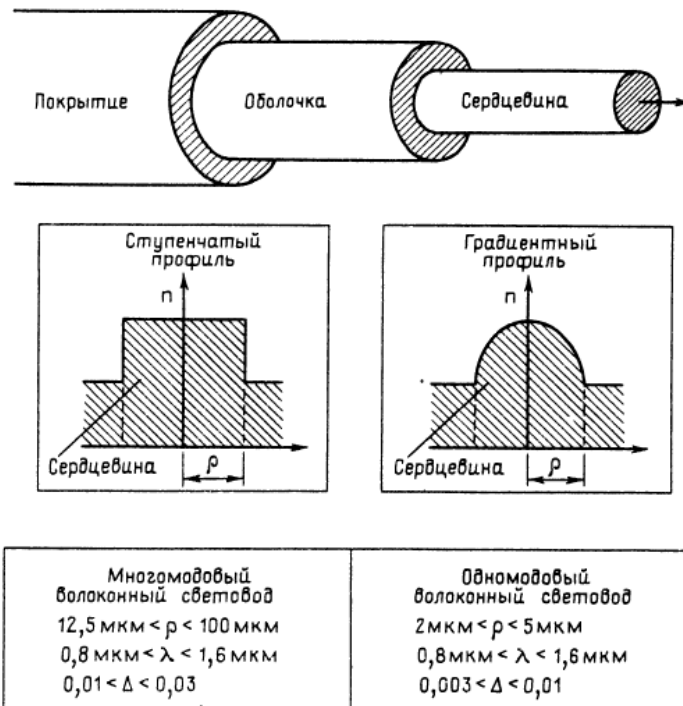


Рис. 5.3. Типичное оптическое волокно и его параметры

Центральная часть – сердцевина – окружена оболочкой, которая окружена защитным покрытием. В области сердцевины показатель преломления  $n$  может быть постоянным или изменяться по сечению, показатель преломления оболочки

обычно постоянен по сечению (изготовители к этому стремятся). Возможны два случая, соответствующие ступенчатому и градиентному профилям показателя преломления. Они и проиллюстрированы на рисунке. Для обеспечения направляющих свойств необходимо, чтобы показатель преломления сердцевины хотя бы в части сечения превосходил показатель преломления оболочки. В большинстве применений основная доля передаваемой энергии распространяется в сердцевине и лишь малая ее часть – по оболочке. Покрытие практически полностью оптически изолировано от сердцевины, поэтому мы обычно будем пренебрегать его влиянием и при анализе для простоты будем предполагать, что оболочка снаружи не ограничена.

**Многомодовые и одномодовые волноводы.** Оптические волноводы или волоконные световоды можно условно разделить на две группы – *многомодовые* (с относительно большими поперечными размерами сердцевины) и *одномодовые* (с относительно малыми поперечными размерами сердцевины). Теоретическое обоснование такого разделения будет дано позже. Сейчас необходимо знать одно условие.

Для многомодовых волноводов должно выполняться условие

$$\frac{2\pi\rho}{\lambda} \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \gg 1, \quad (5.9)$$

где  $\rho$  – характерный размер сердцевины, например, радиус сердцевины ВС,  $\lambda$  – длина волны света в свободном пространстве,  $n_{co}$  – максимальное значение показателя преломления сердцевины,  $n_{cl}$  – показатель преломления оболочки.

**Лучевой подход.** Распространение электромагнитных волн по оптическим каналам может быть описано строго с помощью уравнений Максвелла. Однако хорошо известно, что классическая геометрическая оптика дает более наглядное, хотя и приближенное, описание распространения света в среде, где показатель преломления слабо изменяется на расстояниях порядка длины волны света. Лучевой метод анализа хорошо решает задачу разъяснения процессов, проходящих в ЛП для многомодовых оптических волноводов. Поэтому дальнейшее рассмотрение процессов будем осуществлять с позиций классической геометрической оптики.

В соответствии с классической геометрической оптикой (КГО) *пренебрежем всеми волновыми эффектами*. Исключение составят ВС большой протяженности, так как в этих случаях имеют место эффекты экспоненциального накопления потерь мощности на излучение, поглощение в оболочке, излучение на изгибах. В каждом таком случае необходимо модифицировать КГО на основе *концепции локальных плоских волн*.

Существует альтернативный подход к описанию распространения света в многомодовых волноводах, основанный на коротковолновом приближении для ЭМВ, распространяющихся в оптических волноводах. Это *описание с помощью мод* дает те же результаты, что и классическая геометрическая оптика, однако требует выполнения дополнительных алгебраических преобразований. В дальнейшем он будет рассмотрен как пример получения результатов из решений уравнений Максвелла в пределе малых длин волн (*асимптотическое описание мод*).

Наибольший практический интерес с точки зрения использования ВС для линий обмена информацией большой протяженности (в дальнейшем будем называть их линиями связи – ЛС) представляет явление *уширения* (*уширять* – *делать шире, расширять*) распространяющихся по ним импульсов. В случае идеальных многомодовых ВС уширение может быть легко описано с помощью классической геометрической оптики.



## 5.2.2. Направляемые лучи в планарных волноводах

*Планарный волновод – простейшая диэлектрическая структура или плоский слой, на примере которого иллюстрируются основные принципы лучевой теории.* Кроме того, эта структура широко используется в интегральной оптике.

Структура планарного волновода представлена на рис. 5.4. Изображен градиентный профиль – переменный в сердцевине и постоянный в оболочке, которая считается неограниченной.

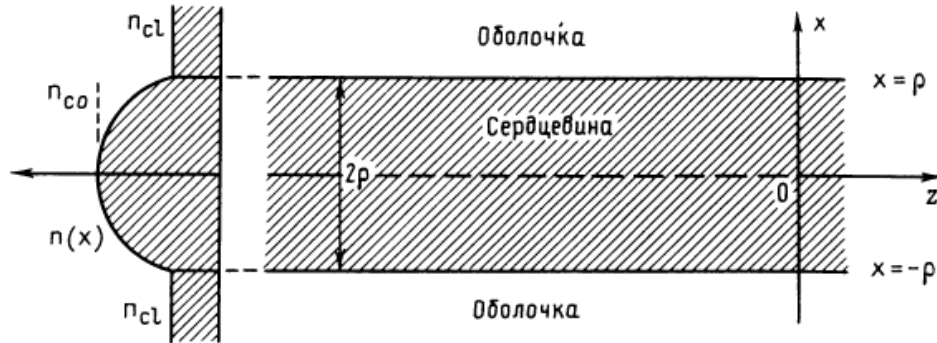


Рис. 5.4. Планарный волновод с градиентным профилем

Плоскости  $x = \pm\rho$  являются границами раздела «сердцевина – оболочка». Так как волновод простирается неограниченно во всех направлениях, ортогональных оси  $x$ , то структуру считаем двухмерной. Ось  $z$  расположена вдоль средней линии между границами раздела. Тогда показатель преломления  $n(x)$  в сердцевине может быть либо постоянным по сечению, либо изменяющимся в поперечном направлении. В оболочке показатель преломления постоянен и равен  $n_{cl}$ . При этом показатель преломления сердцевины должен превосходить эту величину для обеспечения направляющих свойств волновода. Так как профиль не изменяется вдоль оси  $z$ , то волновод однородный и обладает *информационной инвариантностью (независимостью)*. Параметры, представленного на рис. 5.4 волновода и длина волны света  $\lambda$  в свободном пространстве могут быть объединены в один безразмерный параметр  $K$ , называемый *волноводным* или *волоконным параметром*. Если  $n_{co}$  – максимальное значение  $n(x)$ , которое не обязательно совпадает со значением  $n(0)$  на оси волновода, то  $K$  совпадает с выражением (5.9), примененного для многомодового волновода

$$K = \frac{2\pi\rho}{\lambda} \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \gg 1. \quad (5.10)$$

Планарный волновод со ступенчатым профилем представлен на рис. 5.5. Профиль показателя преломления планарного волновода со ступенчатым профилем может быть записан в виде

$$n(x) = n_{co}, -\rho < x < \rho; n(x) = n_{cl}, |x| \geq \rho, \quad (5.11)$$

где  $n_{co}$  и  $n_{cl}$  – константы, причем  $n_{co} > n_{cl}$ .

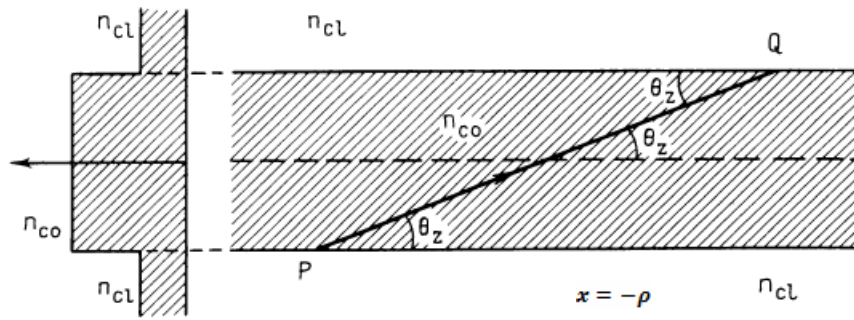


Рис. 5.5. Планарный волновод со ступенчатым профилем

Покажем, как с помощью закона Снеллиуса (также Снелля или Снелла) построить лучевые траектории в сердцевине ВС. Одна из наиболее важных задач – определение условий, при которых луч является направляемым, то есть распространяется вдоль непоглощающего волновода без потерь мощности.

В волноводе со ступенчатым профилем (рис. 5.5) свет распространяется в сердцевине по прямым линиям. Если луч выходит из точки  $P$  на одной границе раздела под углом  $\theta_z$  к оси волновода, то он пересекает вторую границу раздела в точке  $Q$ , как показано на рисунке. Причем ситуация в точке  $Q$  эквивалентна падению луча на границу раздела двух полупространств, заполненных средами с показателями преломления  $n_{co}$  и  $n_{cl}$ , как показано на рис. 5.6.

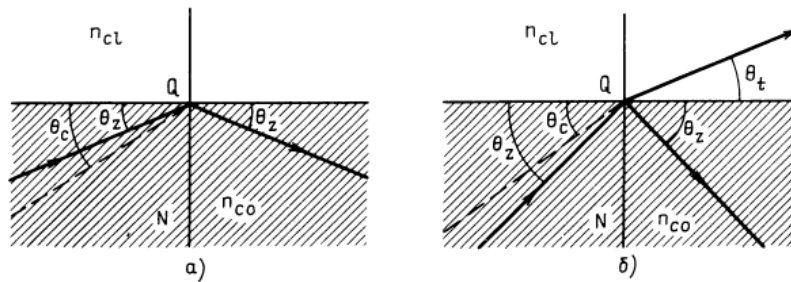


Рис. 5.6. Отражение луча от плоской границы раздела полупространств с показателями  $n_{co}$  и  $n_{cl}$

Отражение в этом случае подчиняется закону Снеллиуса. Обычно этот закон записывается для углов, образуемых лучами с нормалью  $QN$  (угол падения и угол отражения). Здесь будем пользоваться углами скольжения  $\theta_z$ . Преимущество такого выбора станет очевидным при классификации лучевых траекторий в ВС. Таким образом, в терминах углов скольжения падающий луч в точке  $Q$  испытывает полное внутреннее отражение (ПВО), если он падает на границу раздела под углом больше некоторого критического угла скольжения  $\theta_c$  (рис. 5.6,а):

$$0 \leq \theta_z < \theta_c,$$

а при условии

$$\theta_c \leq \theta_z < \frac{\pi}{2}$$

он частично отражается и частично преломляется (рис. 5.6,б).

Критический угол скольжения определяется соотношением

$$\theta_z = \arccos \left\{ \frac{n_{cl}}{n_{co}} \right\} = \arcsin \left\{ 1 - \frac{n_{cl}^2}{n_{co}^2} \right\}^{1/2}. \quad (5.12)$$

В первом случае (рис. 5.6,а) отраженный луч распространяется под тем же углом к поверхности раздела, что и падающий. Во втором случае (рис. 5.6,б) луч раздваивается: часть мощности отражается под углом  $\theta_z$ , а другая часть преломляется и распространяется в оболочке под углом  $\theta_t$  к поверхности раздела согласно другой части закона Снеллиуса

$$n_{co} \cos \theta_z = n_{cl} \cos \theta_t. \quad (5.13)$$

Только в случае ПВО мощность луча сохраняется, то есть энергия, распространяющаяся по лучевой траектории, полностью возвращается в область сердцевины.

Проследим, как будет выглядеть траектория луча для указанных случаев с соответствиями с рис. 5.7.

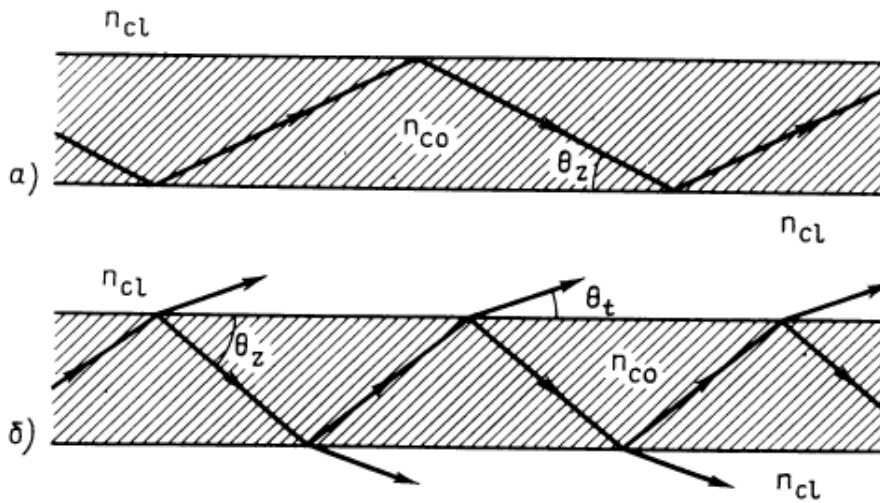


Рис. 5.7. Траектории лучей в сердцевине волновода со ступенчатым профилем показателя преломления

Траектория на рис. 5.7,а соответствует лучу, который каждый раз испытывает ПВО. Такие лучи называются *направляемыми*, так как их траектории полностью расположены внутри сердцевины. Траектория на рис. 5.7,б соответствует лучу, который испытывает лишь частичное отражение. Такие лучи называются *рефрагирующими*. Все лучи могут быть классифицированы в соответствии со значением угла  $\theta_z$  следующим образом:

<p><b>направляемые лучи: <math>0 \leq \theta_z &lt; \theta_c</math>;</b>  <b>рефрагирующие лучи: <math>\theta_c \leq \theta_z \leq \pi/2</math>.</b></p>	(5.14)
--	--------

Поскольку после каждого отражения вся мощность направляемых лучей полностью возвращается в область сердцевины, такие лучи *могут распространяться на неограниченные расстояния без затухания*.

Рефрагирующие же лучи теряют часть своей энергии при каждом отражении и поэтому затухают в процессе распространения.

Периодический характер лучевой траектории является следствием трансляционной инвариантности волновода и позволяет ввести *лучевой инвариант*  $\bar{\beta}$ , который постоянен вдоль пути распространения луча и характеризует его направление в любой точке поперечного сечения сердцевины. Для ступенчатых ВС инвариантность выражается выражением (5.13), поэтому  $\bar{\beta}$  определим так

$$\bar{\beta} = n_{co} \cos \theta_x = n_{cl} \cos \theta_t = \frac{n_{co}}{n_{cl}} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_x}. \quad (5.15)$$

Хотя для ступенчатых волноводов указанное соотношение тривиально (*неоригинально, крайне простое*) и не дает каких-либо преимуществ, в случае градиентных профилей введение лучевого инварианта существенно упрощает описание лучевой траектории, как будет показано в дальнейших материалах. Зависимость между лучевым инвариантом и направлением распространения позволяет классифицировать лучи в соответствии со значением их инварианта  $\bar{\beta}$ .

*направляемые лучи:  $n_{cl} < \bar{\beta} \leq n_{co}$ ;*  
*рефрагирующие лучи:  $0 < \bar{\beta} < n_{cl}$ .*

(5.16)

### 5.2.3. Лучевые параметры ступенчатых планарных волноводов

Путь распространения луча в целом очень важно описать *лучевыми параметрами*. Совместно с лучевым инвариантом эти параметры будут часто использоваться в течение изучения всего материала. Прежде всего, определим длину пути  $L_p$  и полупериод  $z_p$ , для чего воспользуемся рис. 5.8.

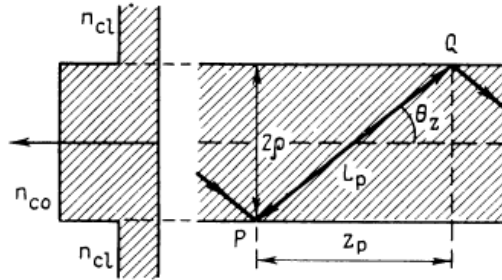


Рис. 5.8. Длина пути и полупериод траектории луча в сердцевине ступенчатого планарного волновода

Лучевая траектория, показанная на рис. 5.8, полностью определяется, если задан угол  $\theta_z$ . Определим *длину пути*  $L_p$  между последовательными отражениями луча как расстояние между точками  $P$  и  $Q$ . Она будет вычислена, как гипотенуза прямоугольного треугольника

$$L_p = \frac{z_p}{\sin \theta_z} = \frac{2\rho n_{co}}{(n_{co}^2 - \bar{\beta}^2)^{1/2}}, \quad (5.17)$$

где  $\bar{\beta} = n_{co} \cos \theta_x = n_{cl} \cos \theta_t$ .

Для определения в дальнейшем времени прохождения луча по ЛП введем *оптическую длину пути*  $L_0$ , которая в однородной среде определяется как произведение длины пути на показатель преломления. Соответственно,

$$L_0 = n_{c0} L_p = \frac{2\rho n_{c0}}{\sin \theta_z} = \frac{2\rho n_{c0}^2}{(n_{c0}^2 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (5.18)$$

При рассмотрении затухания будет часто использоваться *полупериод траектории луча*  $z_p$ , который представляет собой расстояние между точками последовательных отражений, измеренное вдоль оси волновода,

$$z_p = \frac{2\rho}{\operatorname{tg} \theta_z} = L_p \cos \theta_z = \frac{2\rho \bar{\beta}}{(n_{c0}^2 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (5.19)$$

Количество отражений  $N$  на единицу длины волновода обратно пропорционально полупериоду траектории луча. Следовательно,

$$N = \frac{1}{z_p} = \frac{\operatorname{tg} \theta_z}{2\rho}. \quad (5.20)$$

Из этих определений следует, что в произвольной точке на расстоянии  $Z$  от начала волновода длина пути ( $L_{pz}$ ), оптическая длина пути ( $L_{oz}$ ) и количество отражений ( $N_z$ ) определяются, соответственно, выражениями:

$$L_{pz} = \frac{z}{z_p} L_p; L_{oz} = \frac{z}{z_p} L_0; N_z = \frac{z}{z_p}. \quad (5.21)$$

Наиболее важной величиной, необходимой для описания процесса уширения импульса, является *время прохождения луча*  $t$ . Это время, в течение которого луч распространяется на расстояние  $Z$  вдоль волновода по зигзагообразной траектории, показанной на рис. 5.7. Скорость света вдоль лучевой траектории определяется отношением

$$V_{zp} = \frac{c}{n_{c0}}, \quad (5.22)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $n_{c0}$  – показатель преломления сердцевины. При этом время прохождения луча в соответствии с соотношениями (5.15) – (5.21) определяется следующим образом:

$$t = \frac{z}{z_p} \cdot \frac{L_p}{V_{zp}} = \frac{z}{z_p} \cdot \frac{L_0}{c} = \frac{z}{c} \cdot \frac{n_{c0}^2}{\beta} = \frac{z}{c} \cdot \frac{n_{c0}}{\cos \theta_z}, \quad (5.23)$$

*следовательно, чем больше  $\theta_z$ , тем больше время прохождения луча.*

**Дисперсия материала.** Необходимо учесть *дисперсию (расхождение световых лучей разного цвета при прохождении через преломляющую среду) материала*, являющуюся следствием зависимости показателя преломления от длины волны света  $\lambda$ , то есть  $n_{c0} = n_{c0}(\lambda)$ . Это требует более сложного анализа, основанного на представлении лучей локально-плоскими волнами. Без глубокого анализа констатируем, луч распространяется с групповой скоростью  $V_{zp}$ , которая в недиспергирующей среде определяется выражением (5.22), а при наличии дисперсии материала выражается в более сложной форме

$$V_{zp} = c \cdot \left\{ n_{c0}(\lambda) - \lambda \frac{dn_{c0}(\lambda)}{d\lambda} \right\}^{-1}. \quad (5.24)$$

Удобно ввести *групповой показатель преломления*  $n_{gp}$  следующим образом:

$$n_{gp} = n_{г0}(\lambda) - \lambda \frac{dn_{г0}(\lambda)}{d\lambda}, \quad (5.25)$$

тогда время прохождения луча определится выражением

$$t = \frac{z}{c} \cdot \frac{n_{gp}}{\cos \theta_z} = \frac{z}{c} \cdot \frac{n_{gp} n_{г0}}{\beta} \quad (5.26)$$

и является функцией  $\theta_z$  и  $\lambda$ .

### 5.3. Оптические планарные волноводы с градиентным профилем

Еще до установления природы света были известны основные законы оптики:

- закон прямолинейного распространения света в оптически однородной среде;
- закон независимости световых пучков (справедлив только в линейной оптике);
- закон отражения света;
- закон преломления света.

#### **Закон прямолинейного распространения света**

Свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

Доказательством этого закона является наличие тени с резкими границами от непрозрачных предметов при освещении их точечными источниками света (источники, размеры которых значительно меньше освещаемого предмета и расстояния до него). Тщательные эксперименты показали, однако, что этот закон нарушается, если свет проходит сквозь очень малые отверстия, причем отклонение от прямолинейности распространения тем больше, чем меньше отверстия.

#### **Закон независимости световых пучков**

Эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно остальные пучки или они устранены. Разбивая световой поток на отдельные световые пучки (например с помощью диафрагм), можно показать, что действие выделенных световых пучков независимо.

Если свет падает на границу раздела двух сред (два прозрачных вещества), то падающий луч *I*, как показано на рис. 5.9, разделяется на два – отраженный *II* и преломленный *III*, направления которых задаются законами отражения и преломления.

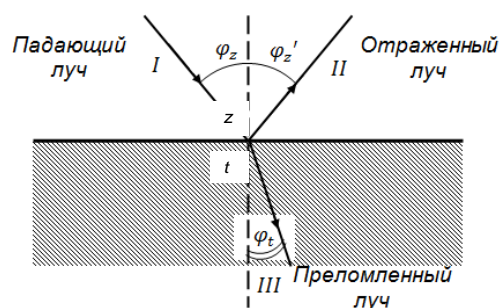


Рис. 5.9. Иллюстрация к основным законам оптики



### Закон отражения

Отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, восстановленным от границы раздела двух сред в точке падения. Угол падения  $\varphi_z$  равен углу отражения  $\varphi_z'$ .

$$\varphi_z = \varphi_z'. \quad (5.27)$$

### Закон преломления

Падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр, опущенный от границы раздела из точки падения, лежат в одной плоскости. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред

$$\frac{\sin \varphi_z}{\sin \varphi_t} = n_{tz}, \quad (5.28)$$

где  $n_{tz}$  – относительный показатель преломления второй среды относительно первой. Индексы в обозначении углов  $\varphi_z, \varphi_z', \varphi_t$  указывают, в какой среде (**Z** или **T**) идет луч.

Относительный показатель преломления двух сред равен отношению их абсолютных показателей преломления:

$$n_{tz} = \frac{n_t}{n_z}. \quad (5.29)$$

### Абсолютный показатель преломления среды

Это величина, равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме к фазовой скорости в среде:

$$n_z = \frac{c}{v_z}; \quad n_t = \frac{c}{v_t}. \quad (5.30)$$

Известно, что  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , где  $\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно, электрическая и магнитная проницаемости среды. С учетом (5.29) выражение (5.28) можно записать в виде

$$n_z \sin \varphi_z = n_t \sin \varphi_t. \quad (5.31)$$

Из симметрии последнего выражения вытекает обратимость световых лучей. Если на рис. 5.9 обратить луч **III** так, что он начинает падать на границу раздела под углом  $\varphi_t$ , то преломленный луч в первой среде будет распространяться под углом  $\varphi_z$ , то есть пойдет в обратном направлении вдоль луча **I**.

Если свет распространяется из среды с большим показателем преломления  $n_z$  (оптически более плотной) в среду с меньшим показателем преломления  $n_t$  (оптически менее плотную) ( $n_z > n_t$ ), например, из стекла в воду, то согласно (5.31) получим

$$\frac{\sin \varphi_t}{\sin \varphi_z} = \frac{n_z}{n_t} > 1. \quad (5.32)$$

Отсюда следует, что преломленный луч удаляется от нормали и угол преломления растет быстрее, чем увеличивается угол падения, как это хорошо видно на рис. 5.10. Интенсивность преломленного луча падает, а отраженного луча – растет. При некотором предельном угле падения угол преломления (рис. 5.10,в) становится равным  $\pi/2$  – в среде **Z** наступает полное внутреннее отражение (ПВО).

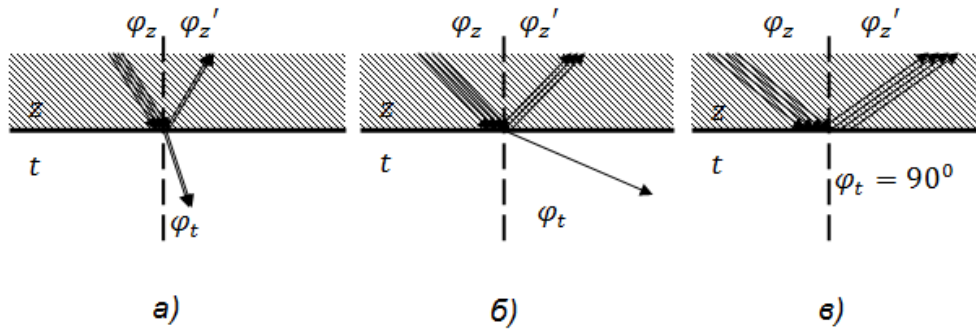


Рис. 5.10. Эволюция углов падения, отражения и преломления

Из выражения (5.31) следует, что

$$\sin \varphi_{z_{np}} = \frac{n_t}{n_z} = n_{tz} \quad (5.33)$$

**Явление полного внутреннего отражения имеет место только при падении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную.**

#### Явление полного внутреннего отражения в призмах полного отражения

Показатель преломления стекла равен  $n \approx 1,5$ , поэтому предельный угол для границы «стекло – воздух» равен  $\varphi_{z_{np}} = \arcsin(1/1,5) = 42^\circ$ . Поэтому при падении света на границу «стекло – воздух» при  $\varphi_z > 42^\circ$  всегда будет иметь место ПВО. На рисунке 5.11, а-в показаны призмы ПВО, позволяющие:

- 5.11,а – повернуть луч на  $90^\circ$ ;
- 5.11,б – повернуть изображение;
- 5.11,в – обернуть лучи.

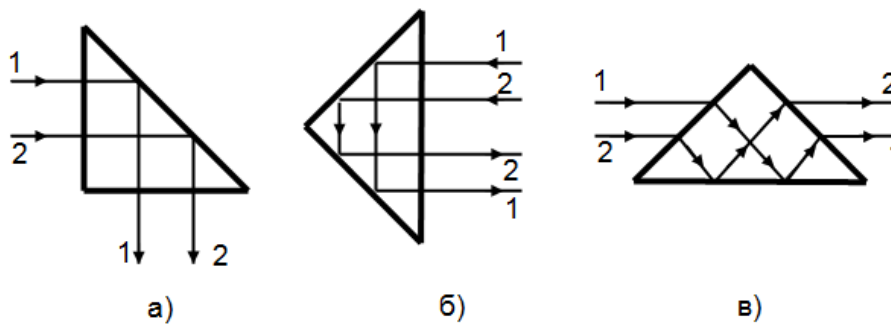


Рис. 5.11. Свойства призм полного внутреннего отражения

Явление ПВО используется в *световодах*, представляющих собой тонкие, произвольным образом изогнутые нити (волокна) из оптически прозрачного материала. В волоконных деталях применяют стеклянное волокно, световедущая жила (сердцевина) которого окружается стеклом – оболочкой из другого стекла с меньшим показателем преломления. Свет, падающий на торец световода под углами, большими предельного, претерпевают на поверхности сердцевины и



оболочки полное внутреннее отражение и распространяются только по световедущей жиле.

Таким образом, с помощью световодов можно как угодно искривлять путь светового пучка. Диаметр световедущих жил лежит в пределах от нескольких микронов до нескольких миллиметров. Для передачи изображений, как правило, применяются многожильные световоды. Вопросы передачи световых волн и изображений изучаются в специальном разделе оптики – *волоконной оптике*.

### 5.3.1. Тонкие линзы. Изображения предметов с помощью линз

Раздел оптики, в котором законы распространения света рассматриваются на основе представления о световых лучах, называется *геометрической оптикой*. Под *световыми лучами* понимают нормальные к волновым поверхностям линии, вдоль которых распространяется поток световой энергии. Геометрическая оптика, оставаясь приближенным методом построения изображений в оптических системах, позволяет разобрать основные явления, связанные с прохождением через них света. Поэтому геометрическая оптика является основой теории оптических приборов.

*Линзы* представляют собой прозрачные тела, ограниченные двумя преломляющими свет поверхностями: одна из них обычно сферическая, иногда цилиндрическая; вторая – сферическая или плоская. Линзы способны формировать оптические изображения предметов. Материалом для линз служат стекло, кварц, кристаллы, пластмассы и пр. По внешней форме линзы делятся, как видно из рас. 5.12, на:

- 1) двояковыпуклые;
- 2) плосковыпуклые;
- 3) двояковогнутые;
- 4) плосковогнутые;
- 5) выпукло-вогнутые;
- 6) вогнуто-выпуклые.

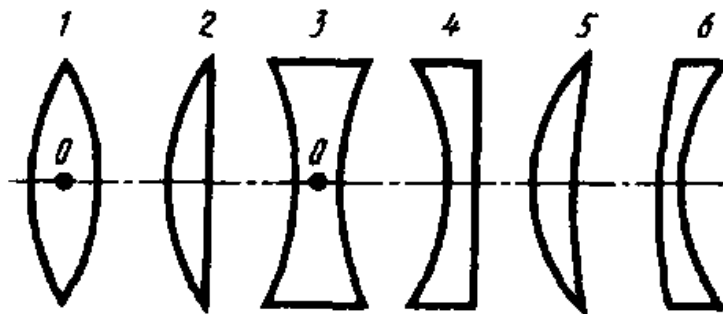


Рис. 5.12. Разновидности линз

По оптическим свойствам линзы делятся на *собирающие* и *рассеивающие*.

Линза является *тонкой*, если ее максимальное расстояние между ограничивающими поверхностями (толщина) значительно меньше по сравнению с радиусами кривизны сферических поверхностей, что ясно из рис. 5.13.

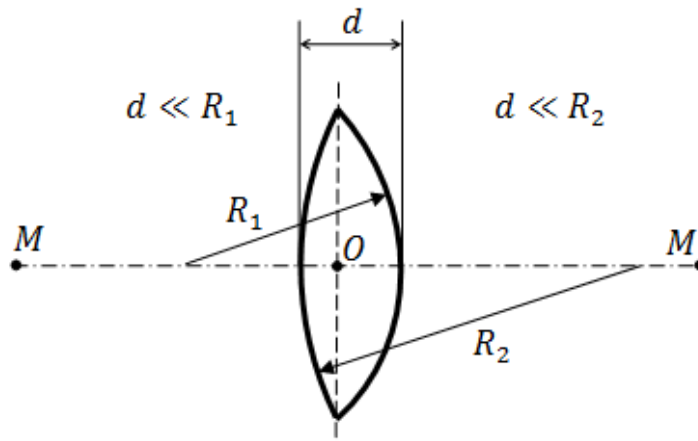


Рис. 5.13. Условие тонкой линзы

Прямая, проходящая через центры кривизны поверхности линзы, называется *главной оптической осью* ( $MM$ ). Для всякой линзы существует точка, называемая *оптическим центром линзы* ( $O$ ), лежащая на главной оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходят сквозь нее, не преломляясь. Оптический центр линзы для простоты будем считать совпадающим с геометрическим центром средней части линзы (это справедливо только для двояковыпуклой и двояковогнутой линз с одинаковыми радиусами кривизны обеих поверхностей; для плосковыпуклых и плосковогнутых линз оптический центр лежит на пересечении главной оптической оси со сферической поверхностью).

Для вывода формулы тонкой линзы – соотношения, связывающего радиусы кривизны поверхностей линзы ( $R_1$  и  $R_2$ ) с расстоянием от линзы до предмета ( $a$ ) и от линзы до изображения предмета ( $b$ ) (рис. 5.14), воспользуемся *принципом Ферма для плоской границы раздела* или *принципом наименьшего времени*.

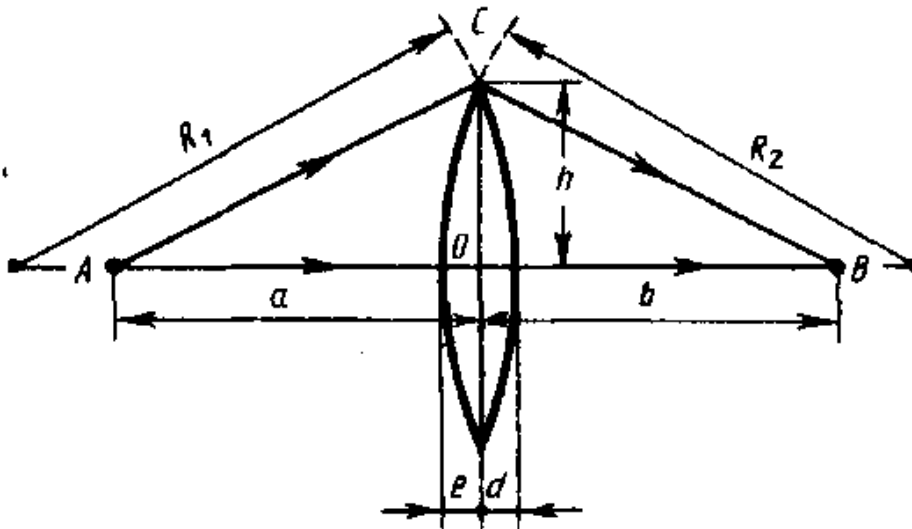


Рис. 5.14. Иллюстрация к выводу формулы тонкой линзы

Рассмотрим два световых луча (рис. 5.14) – луч, соединяющий точки  $A$  и  $B$  (луч  $AOB$ ), и луч, проходящий через край линзы (луч  $ACB$ ), воспользовавшись условием равенства времени прохождения света вдоль  $AOB$  и  $ACB$ . Время прохождения света вдоль  $AOB$

$$t_1 = \frac{a + N(e + d) + b}{c},$$

где  $N = n/n_1$  – относительный показатель преломления ( $n$  и  $n_1$  – соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды).

Время прохождения света вдоль  $ACB$  равно

$$t_2 = \frac{\sqrt{(a + e)^2 + h^2} + \sqrt{(b + d)^2 + h^2}}{c}.$$

Так как по условию  $t_1 = t_2$ , то

$$a + N(e + d) + b - \sqrt{(a + e)^2 + h^2} - \sqrt{(b + d)^2 + h^2}. \quad (5.34)$$

Рассмотрим *параксиальные (приосевые) лучи*, то есть лучи, образующие с оптической осью малые углы. Только при использовании параксиальных лучей получается *стигматическое изображение*, то есть все лучи параксиального пучка, исходящего из точки  $A$ , пересекают оптическую ось в одной и той же точке  $B$ . Тогда  $h \ll (a + e)$ ,  $h \ll (b + d)$  и

$$\begin{aligned} \sqrt{(a + e)^2 + h^2} &= (a + e) \sqrt{1 + \frac{h^2}{(a + e)^2}} = (a + e) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a + e} \right)^2 \right] = \\ &= a + e + \frac{h^2}{2(a + e)}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\sqrt{(b + d)^2 + h^2} = b + d + \frac{h^2}{2(b + d)}.$$

Подставив найденные выражения в (5.34), получим

$$(N - 1)(e + d) = \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{a + e} + \frac{1}{b + d} \right). \quad (5.35)$$

Для тонкой линзы  $e \ll a$  и  $d \ll b$ , поэтому (5.35) можно представить в виде

$$(N - 1)(e + d) = \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Учитывая, что

$$e = R_2 - \sqrt{R_2^2 - h^2} = R_2 - R_2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_2^2}} = R_2 - R_2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{R_2} \right)^2 \right] = \frac{h^2}{2R_2}$$

и соответственно  $d = h^2/(2R_1)$ , получим

$$(N - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \quad (5.36)$$

Это выражение представляет собой *формулу тонкой линзы*. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы считается *положительным*, вогнутой – *отрицательным*.

Если  $a = \infty$ , то есть лучи падают на линзу параллельным пучком, как показано на рис. 5.15,а, то получим

$$\frac{1}{b} = (N - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Соответствующее этому случаю расстояние  $b = OF = f$  называется *фокусным расстоянием линзы*, определяемым по формуле

$$f = \frac{1}{(N - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}.$$

Оно зависит от относительного показателя преломления и радиусов кривизны

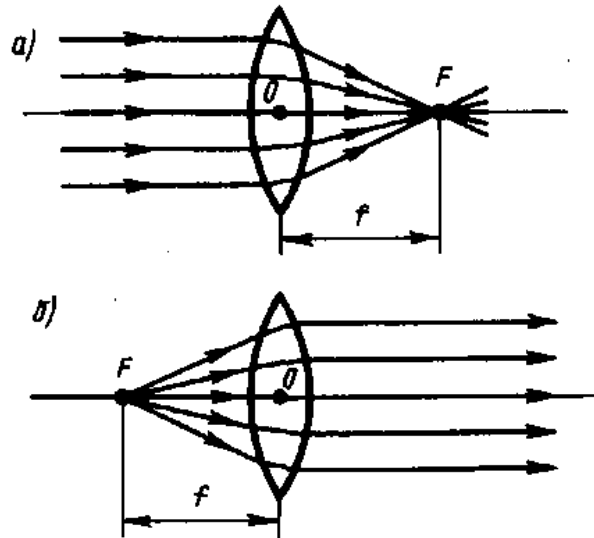


Рис. 5.15. Предельные случаи преломления линз

Если  $b = \infty$ , то есть изображение находится в бесконечности и, следовательно, лучи выходят из линзы параллельным пучком (рис. 5.15,б), то  $a = OF = f$ . Таким образом, фокусные расстояния линзы, окруженной с обеих сторон одинаковой средой, равны. Точка  $F$  лежит по обе стороны линзы на расстоянии, равном фокусному, и называется *фокусами линзы*. Фокус – это точка, в которой после преломления собираются все лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси.

Величина

$$(N - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} = \Phi \quad (5.37)$$

называется *оптической силой линзы*. Ее единица – диоптрия (дптр). Диоптрия – оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 м:  $1 \text{ дптр} = 1/\text{м}$ .

Линзы с положительной оптической силой называются *собирающими*, с отрицательной – *рассеивающими*. Плоскости, проходящие через фокусы линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, называются *фокальными плоскостями*. В отличие от собирающей линзы рассеивающая линза имеет мнимые

фокусы. В мнимом фокусе сходятся (после преломления) воображаемые продолжения лучей, падающих на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси, как показано на рис. 5.16.

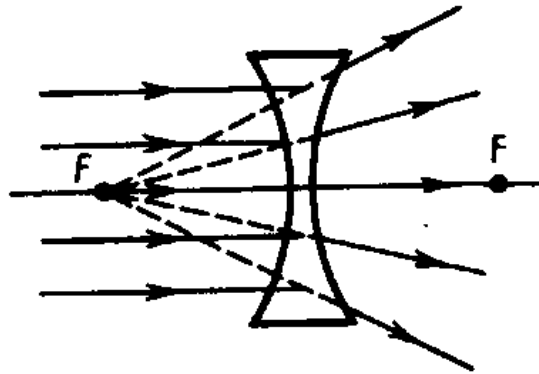


Рис. 5.16. Эскиз рассеивающей линзы

Учитывая (5.37), выражение (5.36) можно записать в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Для рассеивающей линзы расстояния  $f$  и  $b$  надо считать отрицательными.

Построение изображения предмета в линзах осуществляется с помощью следующих лучей:

- луча, проходящего через оптический центр линзы и не изменяющего своего направления;
- луча, идущего параллельно главной оптической оси; после преломления в линзе этот луч (или его продолжение) проходит через второй фокус линзы;
- луча (или его продолжения), проходящего через первый фокус линзы; после преломления в ней он выходит из линзы параллельно ее главной оптической оси.

На рисунке 5.17 приведен пример построения изображений в собирающей линзе.

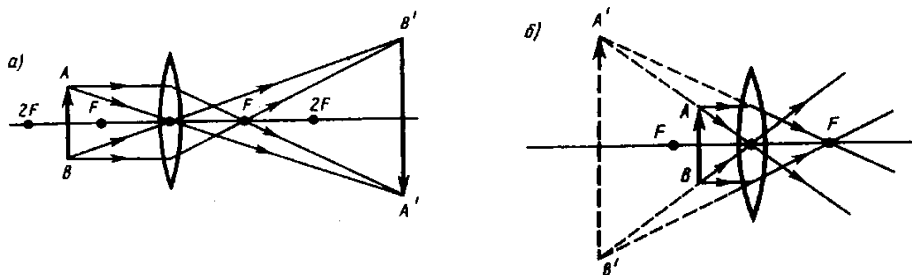


Рис. 5.17. Изображения в собирающей линзе

На рисунке 5.17,а показано действительное перевернутое изображение. На рис. 5.17,б – прямое мнимое изображение.

На рисунке 5.18 приведен пример построения изображения в рассеивающей линзе. Изображение прямое, мнимое.

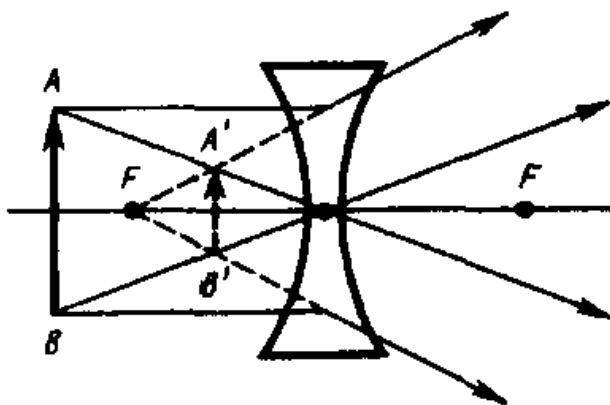


Рис. 5.18. Изображение в рассеивающей линзе

Комбинация собирающих и рассеивающих линз применяется в оптических приборах, используемых для решения различных научных и технических задач.

### 5.3.2. Аберрации (погрешности) оптических систем

Рассматривая прохождение света через тонкие линзы, мы ограничивались параксиальными лучами. Показатель преломления материала линзы считали не зависящим от длины волны падающего света, а падающий свет – монохроматическим. Так как в реальных оптических системах эти условия не выполняются, то в них возникают искажения изображения, называемые «абберация» (погрешности).

*Сферическая абберация.* Если расходящийся пучок света падает на линзу, как показано на рис. 5.19, то параксиальные лучи после преломления пересекаются в точке  $S'$  (на расстоянии  $OS'$  от оптического центра линзы), а лучи, более удаленные от оптической оси, – в точку  $S''$ , ближе к линзе.

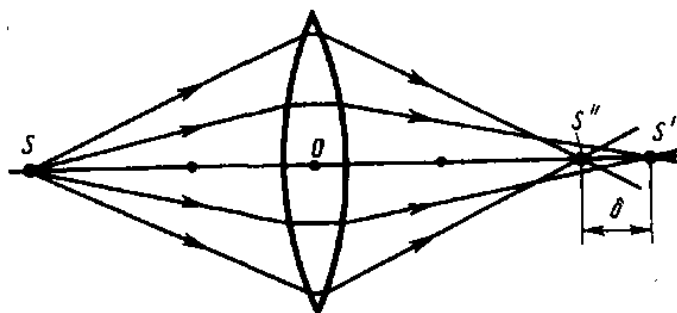


Рис. 5.19. Сферическая абберация

В результате, изображение светящейся точки на экране, перпендикулярном оптической оси, будет в виде расплывчатого пятна. Этот вид погрешности, связанный со сферичностью преломляющих поверхностей, называется *сферической абберацией*. Количественной мерой сферической абберации является отрезок  $\delta = OS'' - OS'$ . Применяя диафрагмы (ограничиваясь параксиальными лучами),

можно сферическую aberrацию уменьшить, однако при этом уменьшается светосила линзы. Сферическую aberrацию можно практически устранить, составляя системы из собирающих ( $\delta < 0$ ) и рассеивающих ( $\delta > 0$ ) линз. Сферическая aberrация является частным случаем *астигматизма*.

*Кома*. Если через оптическую систему проходит широкий пучок от светящейся точки, расположенной не на оптической оси, то получаемое изображение этой точки будет в виде освещенного пятнышка, напоминающего кометный хвост. Такая погрешность называется поэтому «кома» (запятая). Устранение комы производится теми же приемами, что и сферической aberrации.

*Дисторсия*. Погрешность, при которой при больших углах падения лучей на линзу линейное увеличение для точек предмета, находящихся на разных расстояниях от главной оптической оси, несколько различается, как показано на рис. 5.20.

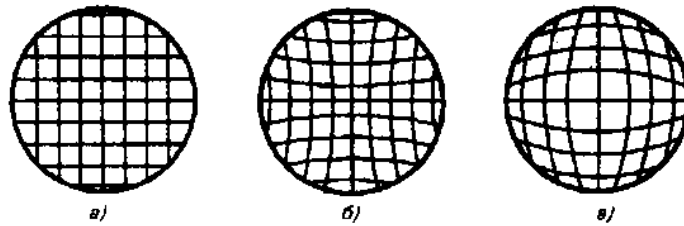


Рис. 5.20. Дисторсия световых лучей

Нарушается геометрическое подобие между предметом (прямоугольная сетка, рис. 5.20,а) и его изображением (рис. 5.20,б – подушкообразная дисторсия, рис. 5.20,в – бочкообразная дисторсия). Дисторсия исправляется соответствующим подбором составляющих частей оптической системы.

*Хроматическая aberrация*. До сих пор мы предполагали, что коэффициенты преломления оптической системы постоянны. Однако это утверждение справедливо лишь для освещения оптической системы монохроматическим светом ( $\lambda = \text{const}$ ); при сложном составе света необходимо учитывать зависимость коэффициента преломления вещества линзы (и окружающей среды, если это не воздух) от длины волны (явление дисперсии). При падении белого света на оптическую систему отдельные составляющие его монохроматические лучи фокусируются в разных точках (наибольшее фокусное расстояние имеет красные лучи, наименьшее – фиолетовые), поэтому изображение размыто и по краям окрашено. Это явление называется *хроматической aberrацией*. Так как разные сорта стекол обладают различной дисперсией, то, комбинируя собирающие и рассеивающие линзы различных стекол, можно совместить фокусы двух (*ахроматы*) и трех (*апохроматы*) различных цветов, устранив тем самым хроматическую aberrацию. Системы, исправленные на сферическую и хроматическую aberrации, называются *апланатами*.

*Астигматизм*. Погрешность, обусловленная неодинаковостью кривизны оптической поверхности в разных плоскостях сечения падающего на нее светового пучка, называется *астигматизмом*. Так изображение точки, удаленной от главной оптической оси, наблюдается на экране в виде расплывчатого пятна эллиптической формы. Это пятно в зависимости от расстояния экрана до оптиче-

ского центра линзы вырождается либо в вертикальную, либо в горизонтальную прямую. Астигматизм исправляется подбором радиусов кривизны преломляющих поверхностей и их фокусных расстояний. Системы, исправленные на сферическую и хроматическую абберации и астигматизма, называются *анастигматами*.

Устранение абберации возможно лишь подбором специально рассчитанных сложных оптических систем. Одновременное исправление всех погрешностей – задача крайне сложная, а иногда даже неразрешимая. Поэтому обычно устраняются полностью лишь те погрешности, которые в том или ином случае особенно вредны.

### 5.3.3. Основные фотометрические величины и их характеристики

*Фотометрия* – раздел оптики, занимающийся вопросами измерения интенсивности света и его источников. В фотометрии используются следующие величины:

- *энергетические* – характеризуют энергетические параметры оптического излучения безотносительно к его действию на приемники излучения;
- *световые* – характеризуют физиологические действия света и оцениваются по воздействию на глаз (исходят из так называемой средней чувствительности глаза) или другие приемники излучения.

*Энергетические величины*

*Поток излучения*  $\Phi_s$  – величина, равная отношению энергии  $W$  излучения ко времени  $t$ , за которое излучение произошло

$$\Phi_s = \frac{W}{t}. \quad (5.38)$$

Единица потока излучения – *ватт (Вт)*.

*Энергетическая светимость (излучательность)*  $R_s$  – величина, равная отношению потока излучения  $\Phi_s$ , испускаемого поверхностью, к площади сечения  $S$ , сквозь которое этот поток проходит

$$R_s = \frac{\Phi_s}{S}, \quad (5.39)$$

то есть представляет собой поверхностную плотность излучения.

Единица энергетической светимости – *ватт на метр в квадрате (Вт/м<sup>2</sup>)*.

*Энергетическая сила света (сила излучения)*  $I_s$  определяется с помощью понятия о точечном источнике света – источнике, размерами которого по сравнению с расстоянием до места наблюдения можно пренебречь. Энергетическая сила света  $I_s$  – величина, равная отношению 102 оттока излучения источника  $\Phi_s$  к телесному углу  $\omega$ , в пределах которого это излучение распространяется

$$I_s = \frac{\Phi_s}{\omega}. \quad (5.40)$$

Единица измерения силы света – *ватт на стерадиан (Вт/ср)*.

*Энергетическая яркость (лучистость)*  $B_s$  – величина, равная отношению энергетической силы света  $\Delta I_s$  элемента излучающей поверхности к площади  $\Delta S$  проекции этого элемента на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения:

$$B_s = \frac{\Delta I_s}{\Delta S}. \quad (5.41)$$



Единица измерения яркости – *ватт на стерадиан-метр в квадрате* ( $Вт/(ср \cdot м^2)$ ).

*Энергетическая освещенность (облученность)  $E_e$*  характеризует величину потока излучения, падающего на единицу освещаемой поверхности. Единица энергетической освещенности совпадает с единицей энергетической светимости ( $Вт/м^2$ ).

#### *Световые величины*

При оптических измерениях используются различные приемники излучения (например, глаз, фотоэлементы, фотоумножители и пр.), которые не обладают одинаковой чувствительностью к энергии различных длин волн, являясь, таким образом, *селективными (избирательными)*. Каждый приемник излучения характеризуется своей кривой чувствительности к свету различных длин волн. Поэтому световые измерения, являясь субъективными, отличаются от объективных, энергетических и для них вводятся световые единицы, **используемые только для видимого света**.

*Основной световой единицей* в СИ является единица силы света – *кандела* (кд). Определение световых единиц аналогично энергетическим.

*Световой поток  $\Phi_e$*  определяется как мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению (по его действию на селективный приемник света с заданной спектральной чувствительностью).

Единица светового потока – *люмен* (лм). 1 лм – световой поток, испускаемый точечным источником света в 1 кд внутри телесного угла в 1 ср (при равномерности поля излучения внутри телесного угла). **1 лм = 1 кд · 1 ср.**

*Светимость  $R_e$*  определяется соотношением  $R_e = \Phi_e / S$ .

Единица светимости – *люмен на метр в квадрате* ( $лм/м^2$ ).

*Яркость  $B_{e\varphi}$*  светящейся поверхности в некотором направлении  $\varphi$ , есть величина, равная отношению силы света  $I_e$  в этом направлении к площади  $S$  проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную данному направлению

$$B_{e\varphi} = \frac{I_e}{S \cos \varphi}. \quad (5.42)$$

Единица яркости – *кандела на метр в квадрате* ( $кд/м^2$ ).

*Освещенность  $E_e$*  – величина, равная отношению светового потока  $\Phi_e$ , падающего на поверхность, к площади  $S$  этой поверхности

$$E_e = \frac{\Phi_e}{S}. \quad (5.43)$$

Единица освещенности – *люкс* (лк). 1 лк – освещенность поверхности, на  $1 м^2$  которой падает световой поток в 1 лм (1 лк =  $1 лм/м^2$ ).

### 5.3.4. Элементы электронной оптики

Область физики и техники, в которой изучаются вопросы формирования, фокусировки и отклонения пучков заряженных частиц и получения с их помощью изображений под действием электрических и магнитных полей в вакууме, называется *электронной оптикой*. Комбинируя различные электронно-оптические элементы – электронные линзы, зеркала, призмы, – создают электронно-оптические приборы, например, электронно-лучевую трубку, электронный микроскоп, электронно-оптический преобразователь.

1. *Электронные линзы* представляют собой устройства, с помощью электрических и магнитных полей которых формируются и фокусируются пучки заряженных частиц. Существуют электрические и магнитные линзы. В качестве *электростатической линзы* может быть использовано электрическое поле с вогнутыми и выпуклыми эквипотенциальными поверхностями, например, в системах металлических электродов и диафрагм, обладающих осевой симметрией, как показано на рис. 5.21.

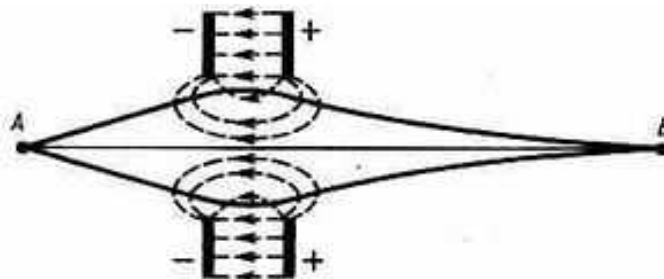
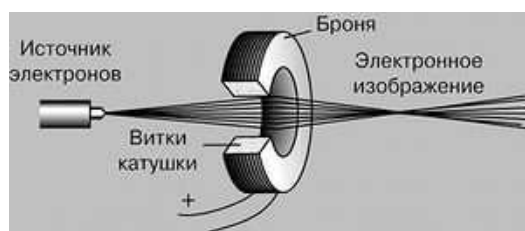
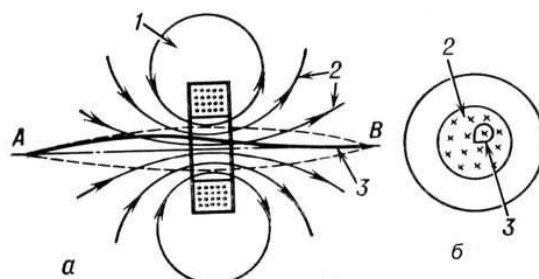


Рис. 5.21. Собирающая электростатическая линза

На рисунке изображена простейшая собирающая электростатическая линза, где *A* – точка предмета, *B* – ее изображение. Пунктиром изображены линии напряженности электрического поля.

2. *Магнитная линза* обычно имеет вид, показанный на рис. 5.22.

Линза представляет собой соленоид (1) с сильным магнитным полем, коаксиальным пучку электронов. Под действием магнитных силовых линий (2) пучок электронов (3) проходит путь АВ (3). Чтобы магнитное поле сконцентрировать на оси симметрии, соленоид помещают в железный кожух с узким внутренним кольцевым разрезом (рис. 5.22,в).



в

Рис. 5.22. Магнитная линза

Если расходящийся пучок заряженных частиц попадает в однородное магнитное поле, направленное вдоль оси пучка, то скорость каждой частицы можно разложить на два компонента: поперечный и продольный.

Первый из них определит равномерное движение по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению поля, второй – равномерное прямолинейное движение вдоль поля. Результирующее движение частицы будет происходить по спирали, ось которой совпадает с направлением поля. Для электронов, испускаемых под различными углами, нормальные составляющие скоростей различны, то есть будут различны и радиусы описываемых ими спиралей. Однако отношение нормальных составляющих скорости к радиусам спиралей за период вращения будет для всех электронов одинаково. Следовательно, через один оборот все электроны сфокусируются в одной и той же точке на оси магнитной линзы.

«Преломление» электрических и магнитных линз зависит от их фокусных расстояний, которые определяются устройством линзы, скоростью электронов, разностью потенциалов, приложенной к электродам (электростатическая линза), и индукцией магнитного поля (магнитная линза). Изменяя разность потенциалов или регулируя ток в катушке, можно изменить фокусное расстояние линз. Стигматическое изображение предметов в электронных линзах получается только для парааксиальных электронных пучков. Как и в оптических системах, в электронно-оптических элементах также имеют место погрешности: сферическая aberrация, кома, дисторсия, астигматизм. При разбросе скоростей электронов в пучке наблюдается также и хроматическая aberrация. Aberrации ухудшают разрешающую способность и качество изображения, а поэтому в каждом конкретном случае необходимо их устранять.

3. *Электронный микроскоп* – устройство, предназначенное для получения изображения микрообъектов. В нем в отличие от оптического микроскопа вместо световых лучей используют ускоренные до больших энергий (30 – 100 кэВ и более) в условиях глубокого вакуума (примерно 0,1 мПа) электронные пучки, а вместо оптических линз – электронные линзы. В электронных микроскопах предметы рассматриваются либо в проходящем, либо в отраженном потоке электронов, поэтому различают *просвечивающие и отражательные электронные микроскопы*.

На рисунке 5.23 приведена упрощенная принципиальная схема просвечивающего электронного микроскопа.

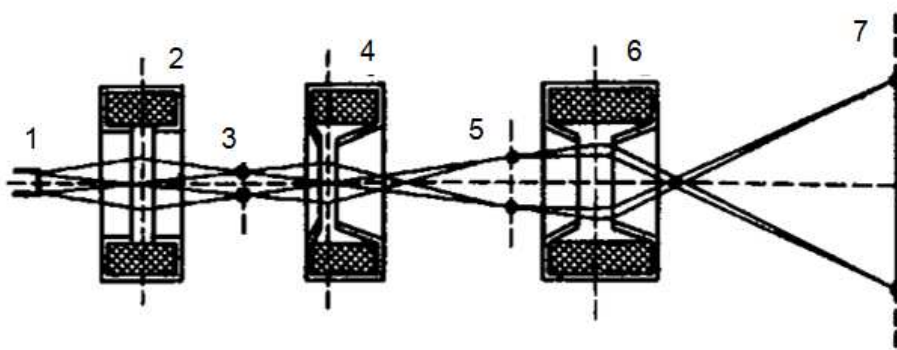


Рис. 5.23. Схема электронного микроскопа

Электронный пучок, формируемый электронной пушкой (1), попадает в область действия конденсирующей линзы (2), которая фокусирует на объекте (3) электронный пучок необходимого сечения и интенсивности. Пройдя объект и испытав в нем отклонения, электроны проходят вторую магнитную линзу (объектив (4) и собираются ею в промежуточное изображение (5). Затем с помощью проекционной линзы (6) на флуоресцирующем экране формируется окончательное изображение (7).

Разрешающая способность электронного микроскопа ограничивается, с одной стороны, волновыми свойствами (дифракцией) электронов, с другой – аберрациями электронных линз. Согласно теории, разрешающая способность микроскопа пропорциональна длине волны, а так как длина волны применяемых электронных пучков (примерно 1 пм) в тысячи раз меньше длины волны световых лучей, то разрешение электронных микроскопов соответственно больше и составляет 0,01–0,0001 мкм (для оптических микроскопов эта величина равна 0,2–0,3 мкм). С помощью электронных микроскопов можно добиться значительно больших увеличений (до  $10^6$  раз), что позволяет наблюдать детали структур размерами 0,1 нм.

4. *Электронно-оптический преобразователь* – это устройство, предназначенное для усиления яркости светового изображения и преобразования невидимого глазом изображения объекта (например, в инфракрасных или ультрафиолетовых лучах) в видимое. Схема простейшего электронно-оптического преобразователя приведена на рис. 5.24.

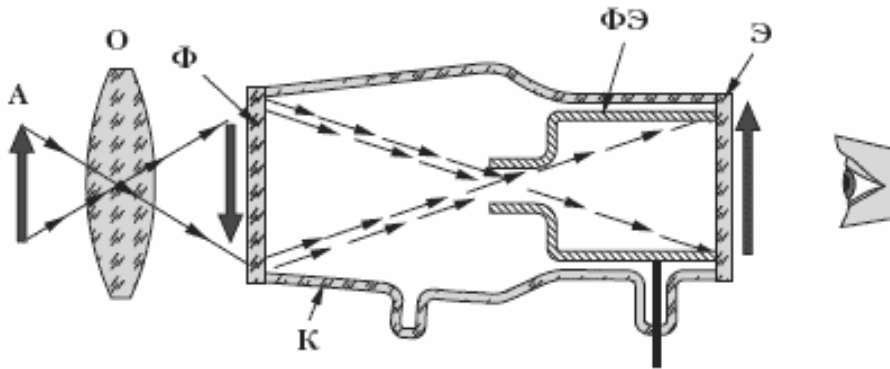


Рис. 5.24. Структурная схема электронно-оптического преобразователя

Изображение предмета (А) с помощью системы линз (объектива О) проецируется на фотокатод (Ф). Излучение от объекта вызывает с поверхности фотокатода фотоэлектронную эмиссию, пропорциональную распределению яркости проецируемого на него изображения. Фотоэлектроны, ускоренные электрическим полем, фокусируются с помощью фокусирующего электрода (ФЭ) на люминесцентный экран (Э), где электронное изображение преобразуется в световое. Электронная часть находится в высоковакуумном корпусе (К).

Из оптики известно, что всякое увеличение изображения связано с уменьшением его освещенности. Достоинство электронно-оптического преобразователя заключается в том, что в нем можно получить увеличенное изображение большей освещенности, чем сам предмет, так как освещенность определяется

энергией электронов, создающих изображение на люминесцентном экране. Разрешающая способность каскадных (несколько последовательно соединенных) электронно-оптических преобразователей составляет 25–60 штрихов на 1 мм. Коэффициент преобразования – отношение излучаемого экраном светового потока к потоку, падающему от объекта на фотокатод, – у каскадных электронно-оптических преобразователей достигает  $10^6$ . Недостаток этих приборов – малая разрешающая способность и довольно высокий темновой фон, что влияет на качество изображения.

## 5.4. Уравнение эйконала

Эйконал (от греч. *eikōn* – изображение) (в геометрической оптике), функция, определяющая *оптическую длину пути* луча света между двумя произвольными точками, одна из которых *A* принадлежит пространству предметов (объектов), другая *A'* – пространству изображений, как показано на рис. 5.25.

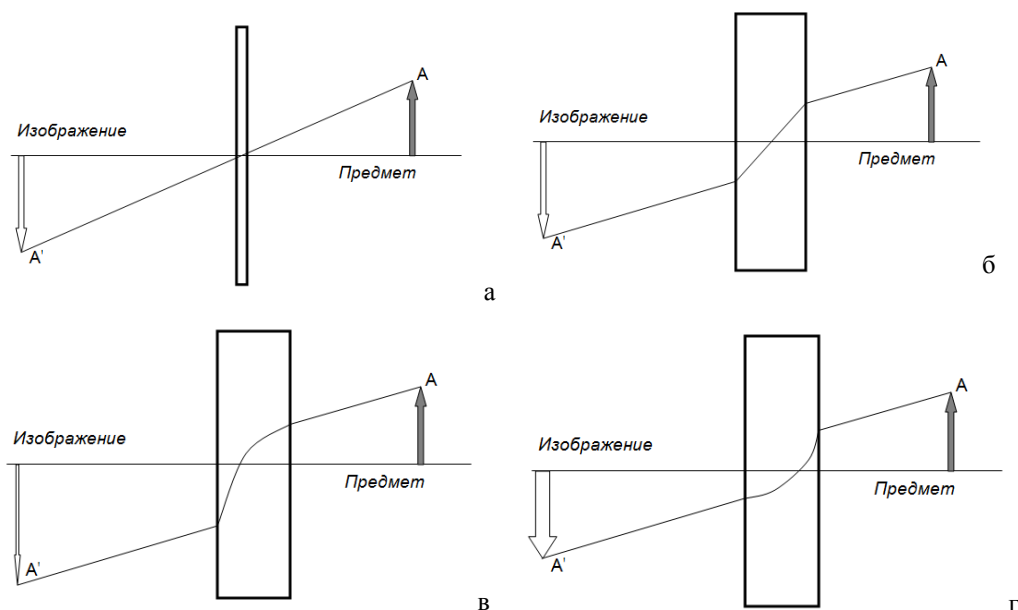


Рис. 5.25. Аберрация оптических систем

Применение эйконала при расчётах оптических систем даёт возможность, дифференцируя его по определённым параметрам, найти выражения для некоторых основных (т. н. поперечных) аберраций оптических систем.

Аберрация оптических систем – это ошибка или погрешность изображения в оптической системе, вызываемая отклонением луча от того направления, по которому он должен был идти в идеальной оптической системе.

Функции, называемые эйконалом, широко используются в электронной и ионной оптике в рамках общей аналогии, существующей между нею и классической оптикой, а также при описании процессов рассеяния частиц и волн (метод эйконала, эйкональное приближение в квантовой механике и квантовой теории поля), где тоже возникают аналогии с оптикой.

На рисунке 5.25,а условно показан случай определения траектории светового луча  $A A'$ , когда свойствами преломления среды можно пренебречь. На рисунке 5.25,б показана траектория светового луча в среде со ступенчатым преломлением. В этих случаях не требуется применение уравнения эйконала.

На рисунке 5.25,в, г показаны случаи градиентного преломления светового луча. Здесь описание процессов рассеяния и преломления лучей невозможно без использования метода эйконала.

Плоская монохроматическая электромагнитная волна отличается тем свойством, что направление ее распространения, характеризуемое волновым вектором  $\vec{k}$  и амплитудой  $\vec{E}_0$ , везде одинаковы

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)}. \quad (5.44)$$

Произвольные электромагнитные волны этим свойством, конечно, не обладают. Однако часто электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, тем не менее, таковы, что их можно рассматривать как плоские в каждом небольшом участке пространства. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны  $\lambda$ .

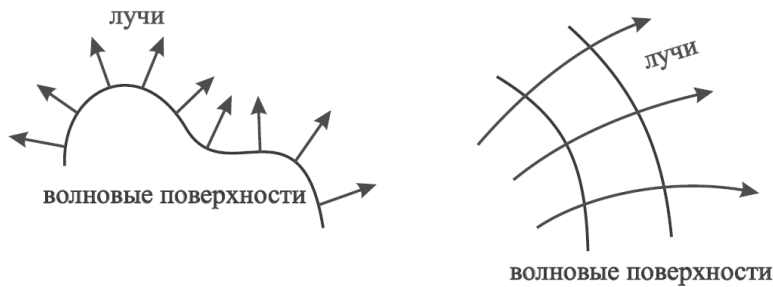


Рис. 5.26. Лучи и волновые поверхности

Если выполнено это условие, то можно ввести так называемые волновые поверхности, во всех точках которых фаза волны в данный момент времени одинакова (для плоской волны это плоскости, перпендикулярные к направлению ее волнового вектора  $\vec{k}$ ). В каждом небольшом участке пространства можно говорить о направлении распространения волны, нормальном к волновой поверхности. При этом можно ввести понятие *лучей* – линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны, как показано на рис. 5.26.

Изучение законов распространения волн в этом случае составляет предмет *геометрической оптики*. Геометрическая оптика рассматривает распространение электромагнитных волн, в частности света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь при этом от их волновой природы. Другими словами, геометрическая оптика соответствует предельному случаю малых длин волн,  $\lambda \rightarrow 0$ .

Выведем теперь основное уравнение геометрической оптики, уравнение, определяющее направление лучей. Пусть  $f$  – любая из величин, описывающих поле волны ( $\vec{E}$  или  $\vec{H}$ ). В плоской монохроматической волне  $f$  имеет вид

$$f = a e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)}. \quad (5.45)$$

Запишем выражение (2) для поля в более общем виде, но аналогичном этому

$$f = a e^{i\psi}. \quad (5.46)$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая оптика применима, амплитуда  $a$  является функцией координат и времени, а фаза  $\psi$ , называемая *эйконалом*, не имеет такого простого вида, как  $\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha$ . Очень важно, однако, что эйконал является большой величиной. Это видно уже из того, что он меняется на  $2\pi$  на масштабах длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу  $\lambda \rightarrow 0$  (то есть все расстояния считаются много больше  $\lambda$ ).

В малых участках пространства и интервалах времени эйконал  $\psi$  можно разложить в ряд с точностью до членов первого порядка. Имеем

$$\psi = \psi_0 + \vec{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (5.47)$$

Начало координат выбрано в рассматриваемом участке пространства и интервала времени. Сравнивая это с выражением для плоской волны

$$\psi = \vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha, \quad (5.48)$$

можно записать

$$\vec{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} \text{ и } \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (5.49)$$

С другой стороны, для плоской волны имеет место соотношение

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \quad (5.50)$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \quad (5.51)$$

Это и есть *уравнение эйконала* – одно из основных уравнений геометрической оптики.

Если волна обладает определенной постоянной частотой  $\omega$ , то зависимость поля волны от времени определяется множителем  $e^{-i\omega t}$ . Поэтому для эйконала такой волны мы можем написать

$$\psi = -\omega t + \psi_0(x, y, z), \quad (5.52)$$

где  $\psi_0$  – функция только от координат. В этом частном случае уравнение эйконала принимает вид

$$(\text{grad } \psi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ или } \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (5.53)$$

Волновые поверхности являются поверхностями постоянного эйконала, то есть семейством поверхностей вида

$$\psi_0(x, y, z) = \text{const}. \quad (5.54)$$

Лучи в каждой точке нормальны к соответствующей волновой поверхности; их направление определяется градиентом  $\nabla \psi_0$ .

#### 5.4.1. Построение лучевых траекторий планарных волноводов с градиентным профилем

Описание хода лучей в волноводах со ступенчатым профилем легко распространяется на волноводы с градиентным профилем. Для простоты будем рассматривать профиль, подобный изображенному на рис. 5.3, у которого градиентной является только сердцевина, как показано на рис. 5.27.

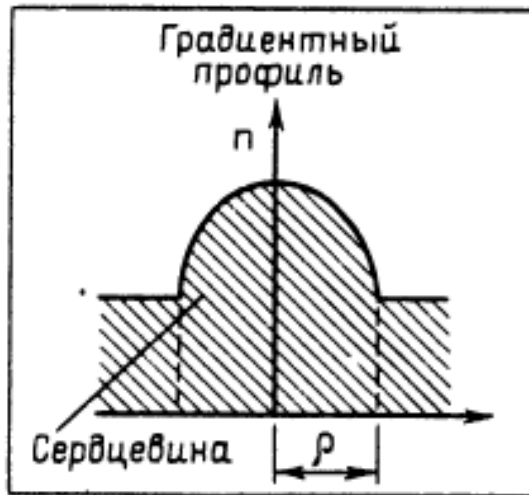


Рис. 5.27. Профиль, у которого градиентна только сердцевина

Если профиль показателя преломления градиентный, траектория луча определяется уравнением эйконала или лучевым уравнением с функцией профиля  $n(\vec{r})$

$$\frac{d}{ds} \left\{ n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right\} = \vec{\nabla} n(\vec{r}), \quad (5.55)$$

где  $s$  – расстояние, отсчитываемое вдоль траектории луча,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки на ней (рис. 5.28).

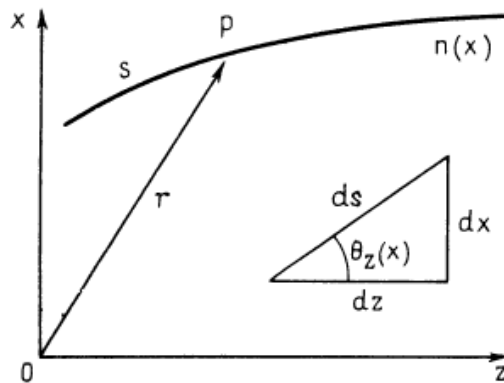


Рис. 5.28. К построению лучевых траекторий

На рисунке показано, что расстояние  $s$  вдоль траектории луча до некоторой точки  $P$  в среде с изменяющимся показателем преломления  $n(x)$  описывается радиус-вектором  $\vec{r} = (x, z)$  ( $\theta_z(x)$  – угол между касательной к траектории и осью  $Z$ , элемент  $ds$  направлен вдоль траектории и имеет компоненты  $dx$  и  $dz$ ).

Это уравнение можно рассматривать как обобщение закона Снеллиуса и получить различными методами.

С одной стороны, градиентный профиль можно представить как предельный случай структуры, состоящей из множества тонких однородных слоев. После-



довательное применение закона Снеллиуса к каждому слою дает в пределе уравнение (5.55).

С другой стороны, оно может быть получено с помощью принципа наименьшего времени, а также предельного перехода  $\lambda \rightarrow 0$  из уравнений Максвелла, где  $\lambda$  – длина волны. Если  $n$  – постоянно,  $\vec{\nabla} = 0$ , то лучевые траектории превращаются в прямые линии; в противном случае  $\vec{\nabla}$  описывает кривизну лучевой траектории в плоскости, где лежит  $\vec{\nabla}$ .

#### Составляющие лучевого уравнения

В случае планарного волновода профиль показателя преломления  $n(x)$  зависит только от координаты  $X$ , поэтому каждая точка  $(x, z)$  лучевой траектории с помощью двух компонентов ( $X$ -го и  $Z$ -го) уравнения (5.56).

$$\frac{d}{ds} \left\{ n(x) \frac{dx}{ds} \right\} = \frac{dn(x)}{dx}; \quad \frac{d}{ds} \left\{ n(x) \frac{dz}{ds} \right\} = 0. \quad (5.56)$$

Для выяснения физического смысла этих уравнений введен угол  $\theta_z(x)$ , образующийся между касательной к траектории луча и осью волновода  $Z$  (рис. 5.28). Из треугольника можно записать

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta_z(x); \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta_z(x). \quad (5.57)$$

Если проинтегрировать второе уравнение в выражении (5.56), то получится соотношение

$$n(x) \cos \theta_z(x) = n(0) \cos \theta_z(0), \quad (5.58)$$

справедливое для всех  $X$ . Оно является обобщением закона Снеллиуса (см. 5.13) для градиентных сред ( $n_{c0} \cos \theta_z = n_{c1} \cos \theta_t$ ). При этом выражение  $n(x) \cos \theta_z(x)$  постоянно вдоль траектории луча. Для конкретного профиля траектория луча однозначно определяется углом  $\theta_z(0)$ .

#### Каустика точек поворота

**Каустика** (от лат. – жгучий) – огибающая семейства лучей, не сходящихся в одной точке. **Каустики** в оптике – это особые линии (в двухмерном случае) и особые поверхности, вблизи которых резко возрастает интенсивность светового поля.

Из уравнения (5.58) следует, что если  $n(x)$  уменьшается при удалении от оси волновода, то внутри сердцевины существует граница, на которой  $\cos \theta_z(x) = 0$ . Причем положение этой границы определяется значением  $\theta_z(0)$ . За ней луч распространяться не может. Указанную границу принято называть *точкой поворота*  $X_{tp}$ , которая определяется из условия

$$n(x_{tp}) = n(0) \cos \theta_z(0); \quad 0 \leq x_{tp} \leq \rho; \quad x \geq 0. \quad (5.59)$$

Из сопоставления понятия кривизны лучевой траектории с понятием точки поворота, проиллюстрированного рис. 5.57, видно, что траектория луча подобна траектории на рис. 5.29,а (луч проходит через точку поворота и возвращается к оси), если уравнение (5.59) имеет решение, и траектория луча подобна траектории на рис. 5.29,б (луч достигает границы раздела и уходит из волновода), если оно не имеет решения.

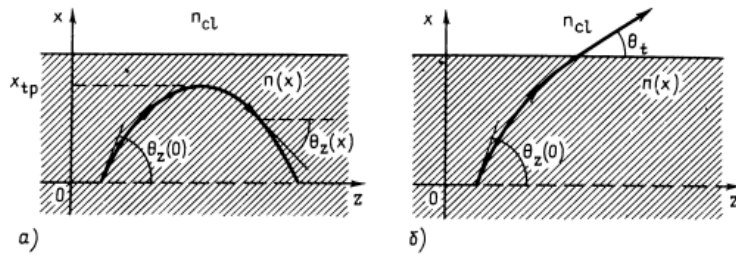


Рис. 5.29. Кривизна лучей и точка поворота

В первом случае луч непрерывно поворачивается и возвращается к оси, во втором случае луч достигает границы сердцевинки и, преломляясь, выходит наружу. Так как профиль непрерывен вблизи границы раздела, то угол падения равен углу преломления,  $\theta_t = \theta_z(\rho)$ . Штриховая линия, соответствующая  $x = x_{tp}$ , представляет собой геометрическое место точек поворота всех лучей с одинаковым значением  $\theta_z(0)$ , которое часто называют *лучевой каустикой* или *каустикой точек поворота*.

**Характеристики траектории луча,**

Траекторию луча в волноводе можно построить повторением отрезков траектории, изображенной на рис. 5.29,а. Если профиль показателя преломления симметричный, то есть  $n(x) = n(-x)$ , то траектория примет вид синусоиды, как показано на рис. 5.30.

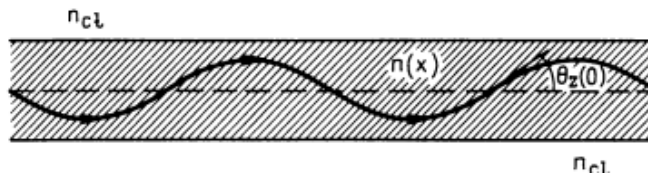


Рис. 5.30. Траектория луча в сердцевине симметричного планарного волновода с градиентным профилем

Такие лучи являются *направляемыми*. Луч, траектория которого достигает границы раздела, теряет свою мощность и называется *рефрагирующим* по аналогии с соответствующими лучами в волноводе со ступенчатым профилем. Траектория луча, касающаяся границы раздела сердцевинки с оболочкой, разделяет области, заполненные траекториями лучей каждого из указанных типов. Для граничной траектории  $x_{tp} = \rho$ . Обозначая соответствующее этой траектории значение  $\theta_z(0)$  через  $\theta_c(0)$ , из выражения (5.59) получим

$$\cos \theta_c(0) = \frac{n(\rho)}{n(0)} = \frac{n_{cl}}{n_{cn}}, \quad (5.60)$$

предполагая, что  $n(0) = n_{cn}$  – максимальное значение  $n(x)$ . Таким образом, лучи в волноводе с градиентным профилем могут быть классифицированы в соответствии со значением  $\theta_z(0)$ :

направляемые лучи: $0 \leq \theta_z(0) \leq \theta_c(0)$ , рефрагирующие лучи: $\theta_c(0) \leq \theta_z(0) \leq \pi/2$ .	(5.61)
---	--------

Решение уравнения (5.56) для лучевых траекторий рассмотрим при анализе лучевых параметров.

### 5.4.2. Анализ лучевого инварианта

(Инвариант в физике – физическая величина, значение которой в некотором физическом процессе не изменяется с течением времени)

Ранее было введено понятие лучевого инварианта  $\bar{\beta}$ . В случае градиентного профиля с учетом выражений (5.57) и (5.58) он определяется выражением

$$\bar{\beta} = n(x) \cos \theta_z(x) = n(x) \frac{dz}{ds} \quad (5.62)$$

Следовательно,  $\bar{\beta}$  постоянен вдоль траектории и определяет направление луча в любой ее точке, а также положение точки поворота  $x_{t_p}$ .

Так как в точке поворота  $\theta_z(x) = 0$ , то

$$n(x_{t_p}) = \bar{\beta}, \quad (5.63)$$

и между  $x_{t_p}$  и  $\bar{\beta}$  существует взаимно однозначное соответствие.

Классификация лучей в соответствии с выражением (5.61) может быть проведена также и относительно  $\bar{\beta}$ . При  $x = 0$  и  $\theta_z(0) = \theta_c(0)$  из уравнения (5.62) с учетом (5.59) следует, что  $\bar{\beta} = n_{c_l}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{направляемые лучи: } n_{c_l} < \bar{\beta} \leq n_{c_0}, \\ \text{рефрагирующие лучи: } 0 \leq \bar{\beta} \leq n_{c_l}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

где  $n_{c_0}$  – максимальное значение  $n(x)$ .

### 5.4.3. Лучевые параметры

Ранее введенные параметры для волноводов со ступенчатым профилем (длина пути  $L_p$ , оптическая длина пути  $L_n$ , полупериод траектории луча  $Z_p$ , количество отражений на единицу длины волновода  $N$ ) легко обобщаются на волноводы с градиентным профилем. Хотя процесс обобщения можно упростить, получив предварительно явное решение системы уравнений (5.56) для траектории луча, однако на практике очень редко используют зависимость характеристик луча вдоль траектории  $S$ . Используют направление распространения луча  $Z$ . Заменяя в первом уравнении (5.56)  $ds$  на  $dz$  из выражения (5.62), после соответствующих преобразований получаем

$$\bar{\beta}^2 \frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dn^2(x)}{dx}. \quad (5.65)$$

Полагая  $d^2 x / dz^2 = x' dx' / dx$ , где  $x' = dx / dz$ , после интегрирования имеем

$$\bar{\beta} \frac{dx}{dz} = \left\{ n^2(x) - \bar{\beta}^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.66)$$

так как  $dx/dz = 0$  и  $n(x) = \bar{\beta}$  при  $x = x_{t_p}$ . Второе интегрирование дает

$$z(x) = \bar{\beta} \int_0^x \frac{dx}{\left\{ n^2(x) - \bar{\beta}^2 \right\}^{1/2}}, \quad (5.67)$$

где  $z = 0$  при  $x = 0$ . Это выражение является точным для траектории направляемых лучей при  $0 \leq x \leq x_{t_p}$  и для рефрагирующих лучей при  $0 \leq x \leq \rho$ .

Параметры траектории луча будем находить, используя рис. 5.31, на котором представлен отрезок траектории направляемого луча между следующими друг за другом точками поворота  $P$  и  $Q$  (по аналогии с рис. 5.8), отстоящими на расстоянии, равном полупериоду  $Z_p$  и измеренном вдоль оси волновода.

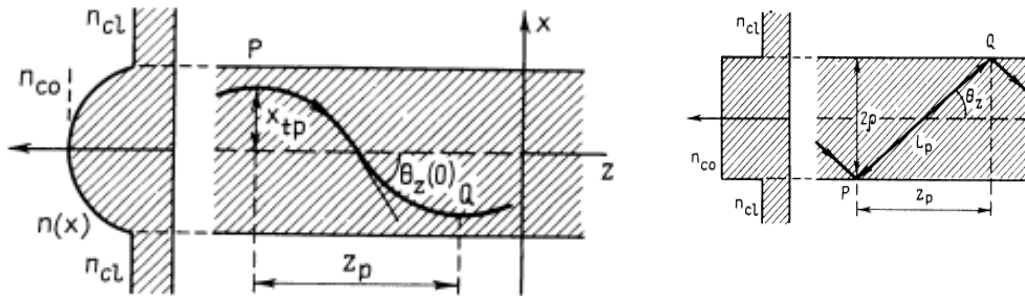


Рис. 5.31. Траектория луча в сердцевине планарного волновода с градиентным профилем

Длина пути  $L_p$  (измеряется вдоль траектории между точками  $P$  и  $Q$ ) и оптическая длина пути  $L_o$  определяются интегралами по траектории

$$L_p = \int_P^Q ds; \quad L_o = \int_P^Q n(x) ds, \quad (5.68)$$

где  $S$  – расстояние вдоль траектории. Заменяя  $ds$  на  $dz$  из (5.62) и  $dz$  на  $dx$  из (5.66), получаем

$$L_p = \int_{-x_{tp}}^{x_{tp}} \frac{n(x) dx}{\{n^2(x) - \bar{\beta}^2\}^{1/2}}; \quad L_o = \int_{-x_{tp}}^{x_{tp}} \frac{n^2(x) dx}{\{n^2(x) - \bar{\beta}^2\}^{1/2}}. \quad (5.69)$$

Полупериод траектории луча можно получить из (5.67) в виде

$$Z_p = \bar{\beta} \int_{-x_{tp}}^{x_{tp}} \frac{n^2(x) dx}{\{n^2(x) - \bar{\beta}^2\}^{1/2}}. \quad (5.70)$$

Отсюда определяется и количество точек поворота траектории луча на единицу длины волновода

$$N = \frac{1}{Z_p}. \quad (5.71)$$

В случае симметричного профиля интеграл вычисляется в пределах  $0 \leq x \leq x_{tp}$ , а результат удваивается.

#### Локальный критический угол скольжения

При рассмотрении волноводов с градиентным профилем вводится дополнительный параметр – локальный критический угол скольжения.

Ранее отмечалось, что в любой точке поперечного сечения сердцевины волновода со ступенчатым профилем все направляемые лучи распространяются под углами к оси волновода, значения которых лежат в интервале  $0 \leq \theta_x < \theta_c$ , где  $\theta_c$  – критический угол скольжения.

Для волноводов с градиентным профилем область значений углов  $\theta_z(x)$  направляемых лучей изменяется в зависимости от положения луча в поперечном сечении. На оси указанная область определяется выражением (5.61), а на границе сердцевины все направляемые лучи имеют  $\theta_c(\rho) = 0$ , то есть они параллельны оси волновода. Соответственно, определим локальный критический угол скольжения  $\theta_c(x)$  как

$$\cos \theta_c(x) = \frac{n_{cl}}{n(x)}; \sin \theta_c(x) = \left\{ n^2(x) - \bar{\beta}^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.72)$$

В результате интервал углов направляемых лучей в точке с координатой  $x$  определяется следующим образом

$$0 \leq \theta_z(x) < \theta_c(x); 0 \leq x \leq \rho. \quad (5.73)$$

При  $x = 0$  выражение (5.73) сводится к (5.61), а при  $x = \rho \rightarrow \theta_z(x) = 0$ .

#### 5.4.4. Время прохождения луча

Время прохождения луча в волноводах с градиентным профилем определяется интегралом вдоль искривленной траектории луча (см. рис. 5.30). Локальная скорость света непрерывно изменяется по закону  $c/n(x)$ , где  $c$  – скорость света в свободном пространстве и  $n(x)$  – профиль показателя преломления. Итак, время прохождения луча на расстояние  $z$  вдоль оси волновода определяется интегральным выражением

$$t = \frac{1}{c} \int n(x) ds = \frac{1}{c\bar{\beta}} \int n^2(x) dz. \quad (5.74)$$

Оно получено с помощью уравнения (5.62). Здесь интегрирование выполняется вдоль кривой  $x = x(z)$ . Этот интеграл не имеет простого представления, но его можно аппроксимировать. Из выражения (5.68) следует, что время прохождения луча на расстояние равно полупериоду траектории  $Z_p$ , составляет  $L_0/c$ , где  $L_0$  – оптическая длина пути. Таким образом, если  $z$  точно кратно полупериоду траектории, то время прохождения луча можно представить выражением

$$t = \frac{zL_0}{cZ_p}. \quad (5.75)$$

В общем случае  $z$  не кратно  $Z_p$ , однако при  $z \gg Z_p$  выражение (5.75) может служить достаточно точным приближением для (5.74).

#### *Выравнивание времени прохождения*

В волноводах с градиентным профилем происходит выравнивание времени прохождения для различных лучей, что легко объяснить.

Так как  $n(x)$  уменьшается при удалении от оси, то чем дальше от оси распространяется луч, тем больше локальная скорость света  $c/n(x)$ . Такое увеличение скорости частично компенсирует увеличение длины пути неосевых лучей, а в случае гиперболического секансного профиля (как будет показано позже) происходит полное выравнивание.

#### *Дисперсия материала*

Обобщим и влияние дисперсии материала на групповую скорость, рассмотренное ранее для ступенчатого профиля.

Профиль  $n(x)$  в первом интеграле правой части выражения (5.74) необходимо заменить групповым показателем  $n_{гр}$ . Следовательно,

$$t = \frac{1}{c} \int n_{гр}(x, \lambda) ds; \quad n_{гр} = n(x, \lambda) - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda}(x, \lambda). \quad (5.76)$$

Далее, повторяя рассуждения, используемые при выводе выражений (5.47) и (5.46), получаем

$$t = \frac{z}{c} \frac{L_m}{Z_p}; \quad L_m = \int_{-x_{гр}}^{x_{гр}} \frac{n_{гр}(x, \lambda) n(x, \lambda)}{\{n^2(x) - \bar{\beta}^2\}^{1/2}} dx. \quad (5.77)$$

Таким образом,  $L_p$  (дисперсная длина пути) заменяет оптическую длину пути  $L_0$  в выражении (5.75).

### 5.4.5. Слабонаправляющие волноводы

Оптические волноводы, используемые в технике связи, обычно являются *слабонаправляющими*, то есть перепад между максимумом и минимумом показателя преломления в поперечном сечении мал и обычно не превосходит 1% от максимального значения. В следующем разделе будут часто использоваться вытекающие отсюда преимущества, так как это позволяет значительно упростить алгебраические выражения и решать задачи, которые в общем случае не могут быть решены аналитически. Здесь рассматриваются некоторые особенности такого приближения применительно к лучевому анализу.

#### Параксиальное приближение

Если максимальное и минимальное значения показателя преломления близки, то из выражений (5.12) и (5.32) следует, что критические углы скольжения  $\theta_c$  и  $\theta_c(0)$  малы и справедливо следующее соотношение

$$\sin \theta_c \approx \theta_c \approx (1 - n_{c1}^2/n_{c0}^2)^{1/2}, \quad (5.78)$$

аналогичное соотношение получается для  $\theta_c(0)$ . Таким образом, интервал углов направляемых лучей в выражениях (5.14) и (5.33) мал, и любой направляемый луч распространяется почти параллельно оси. Такое приближение называется *параксиальным*.

Параксиальное приближение не приводит к упрощению уравнений (5.28), поскольку, как видно из выражения (5.39),  $\bar{\beta}$  – константа, а  $n(x)$  принимает значения, уменьшающиеся вплоть до  $\bar{\beta}$ . Однако оно позволяет упростить выражения для пути  $L_p$  в выражении (5.41) при использовании указанной ниже аппроксимации. Профиль может быть описан следующим образом:

$$n^2(x) = n_{c0}^2 [1 - 2\Delta f(x)], \quad (5.79)$$

где  $n_{c0}$  – максимальное значение показателя преломления,  $f(x)$  – неотрицательная функция, а  $\Delta$  – константа, определяемая с учетом (5.12) соотношением

$$2\Delta - 1 - \frac{n_{c1}^2}{n_{c0}^2} = \sin^2 \theta_c. \quad (5.80)$$

В однородной оболочке  $n(x) = n_{c1}$ , а  $f(x) = 1$ . Такое определение  $\Delta$  предполагает выполнение условия  $\Delta \ll 1$  в приближении слабонаправляющего волновода,

то есть условие  $n_{c_0} \approx n_{c_1}$ . Таким образом, в низшем порядке приближения величина  $\Delta$  представляет собой относительный перепад между  $n_{c_0}$  и  $n_{c_1}$ , то есть

$$\Delta \approx \frac{\theta_c^2}{2} \approx \frac{n_{c_0} - n_{c_1}}{n_{c_0}}, n_{c_0} \approx n_{c_1} \text{ или } \theta_c \ll 1, \quad (5.81)$$

и характеризует относительную высоту профиля, поэтому параметр  $\Delta$  называется *параметром высоты профиля* (рис. 5.32).

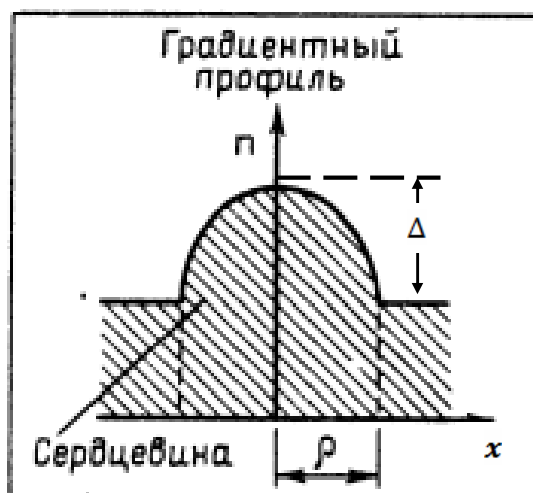


Рис. 5.32. Параметр высоты профиля

При  $\Delta f(x) \ll 1$  из выражения (5.79) получаем приближенное соотношение

$$n(x) \approx n_{c_0} [1 - \Delta f(x)], \quad (5.82)$$

которое будет использовано при определении  $L_p$ .

#### 5.4.6. Несимметричные волноводы

В изложенном материале исследовано распространение лучей в планарных волноводах в предположении, что профиль показателя преломления симметричный, то есть  $n(x) = n(-x)$ . Однако изложенные методы построения лучей траектории лучей применимы для анализа волноводов с *несимметричным* профилем. Единственное существенное отличие заключается в том, что в случае симметричного профиля для определения полной траектории достаточно рассчитать путь луча только на *полупериоде*, в то время как для построения траектории луча в несимметричном волноводе необходимо знать путь луча на *полном периоде* траектории. Параметры траектории для несимметричного профиля определяются с помощью соответствующей модификации выражений для симметричных волноводов.



## 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

---

---

### Основные теоретические сведения векторного анализа

**В** электродинамике приходится иметь дело с величинами двух родов:  
– величины, имеющие числовой характер (например, величина заряда, плотность заряда, магнитная проницаемость, электрическая проницаемость, проводимость и пр.);

– величины, связанные с понятием о направлении в пространстве (например, вектор электрического поля, вектор магнитного поля, вектор электрической индукции, вектор магнитной индукции, вектор распределения плотности тока, вектор поляризации и пр.).

Первые пять величин, не связанные с понятием о направлении, принадлежат к классу величин, называемых *скалярами*.

Рассмотрим один из скаляров – величина заряда. Чтобы охарактеризовать величину заряда электростатического поля в данном месте в некоторый момент времени, необходимо измерить величину заряда в кулонах, полученное число (положительное или отрицательное) даст величину заряда. Поэтому определение скаляра прозвучит так:

*Скаляром называется величина, характеризующаяся при выбранной единице измерения одним числом.*

Сравнивать скаляры можно только в том случае, если они имеют одинаковую размерность. В физике, вообще, и в электродинамике, в частности, существуют основные единицы и производные. За основные единицы в международной системе СИ принимают:

- единицу длины (символ  $L$ ), измеряемую в *метрах* ( $m$ );
- единицу массы (символ  $M$ ), измеряемую в *килограммах* ( $kg$ );
- единицу времени (символ  $T$ ), измеряемую в *секундах* ( $s$ );
- единицу силы электрического тока (символ  $I$ ), измеряется в *амперах* ( $A$ );
- единицу термодинамической температуры (символ  $\theta$ ) измеряется в *кельвинах* ( $K$ );
- единицу силы света (символ  $J$ ), измеряется в *канделах* ( $cd$ );
- единицу количества вещества (символ отсутствует), измеряется в *молях* ( $mol$ ).

*Два скаляра одной и той же размерности равны, если при измерении их одной и той же единицей меры получаются одинаковые числа.*

Вторые шесть величин, имеющих определенное направление, относятся к классу величин, называемых *векторами*.

Рассмотрим один из векторов – вектор напряженности электрического поля. Размерность в основных единицах  $LMT^{-2}I^{-1}$  или *вольт на метр* выражает только зависимость напряжения от расстояния до источника. Необходимо



задать еще направление распространения поля. Поэтому получим следующее определение:

*Вектором называется величина, характеризующаяся, помимо измеряющего ее в определенных единицах меры числа, еще своим направлением в пространстве.*

Простейшим вектором является прямолинейный отрезок, имеющий определенную длину (модуль) и определенное направление от начальной к конечной точке.

Для описания полей в электродинамике принято использовать *скалярные* и *векторные поля*. В произвольной системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  скалярное поле  $\phi$  приобретает вид некоторой функции  $\phi(x_1, x_2, x_3)$ , принимающей численные значения – действительные и комплексные. Векторное поле  $\vec{A}$  задается тремя проекциями на единичные векторы (орты) выбранной системы координат:

$$\vec{A} = A_{x1}(x_1, x_2, x_3)\vec{1}_{x1} + A_{x2}(x_1, x_2, x_3)\vec{1}_{x2} + A_{x3}(x_1, x_2, x_3)\vec{1}_{x3}.$$

Для характеристики величины и направления скорости изменения скалярного поля в пространстве вводят *градиент* этого поля

$$\text{grad}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \vec{1}_{x1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \vec{1}_{x2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \vec{1}_{x3}, \quad (6.1)$$

где  $h_1, h_2, h_3$  – коэффициенты Лямэ по координатам  $x_1, x_2, x_3$ , являющиеся *коэффициентами пропорциональности между дифференциалами обобщенных координат и бесконечно малыми ребрами элементарного параллелепипеда в выбранной точке пространства.*

Приведем значения коэффициентов Лямэ для наиболее употребительных координат систем:

– декартова система координат  $\{x, y, z\}$

$$h_x = h_y = h_z = 1;$$

– цилиндрическая система координат  $\{r, \varphi, z\}$

$$h_r = 1; h_\varphi = r; h_z = 1;$$

– сферической системы координат  $\{r, \theta, \varphi\}$

$$h_r = 1, h_\theta = r; h_\varphi = r \sin \theta.$$

Конкретно градиент вычисляется следующим образом:

– в декартовой системе координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{1}_z;$$

– в цилиндрической системе координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \vec{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{1}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{1}_z;$$

– в сферической системе координат

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{1}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{1}_\varphi.$$

Описание дифференциальных свойств векторного поля несколько сложнее. Векторное поле  $\vec{A}$  принято характеризовать скалярным полем – *дивергенцией*  $\text{div} \vec{A}$  и векторным полем – *ротором*  $\text{rot} \vec{A}$ . Значение дивергенции равно плотности источников рассматриваемого поля в заданной точке пространства. Трактовка ротора векторного поля сложнее, можно считать, что ротор характеризует степень отличия исследуемого поля от однородного.

Дивергенцию векторного поля  $\vec{A}$  вычисляют путем дифференцирования его проекций по определенным правилам:

– в декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (6.2)$$

– в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (6.3)$$

– в сферической системе координат

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \quad (6.4)$$

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_{x_3}) \right]. \quad (6.5)$$

Проекции ротора векторного поля имеют вид:

– в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} A)_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ (\operatorname{rot} A)_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ (\operatorname{rot} A)_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}; \end{aligned} \quad (6.6)$$

– в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} A)_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ (\operatorname{rot} A)_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\ (\operatorname{rot} A)_z &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]; \end{aligned} \quad (6.7)$$

– в сферической системе координат

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} A)_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial (A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ (\operatorname{rot} A)_\theta &= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} \right], \\ (\operatorname{rot} A)_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат ротор вектора поля  $\vec{A}$  выражают через проекции исходного поля и коэффициенты Лямэ

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{\bar{1}_{x_1}}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_3 A_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial (h_2 A_{x_2})}{\partial x_3} \right] + \\ &+ \frac{\bar{1}_{x_2}}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial (h_1 A_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial (h_3 A_{x_3})}{\partial x_1} \right] + \frac{\bar{1}_{x_3}}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 A_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial (h_1 A_{x_1})}{\partial x_2} \right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Дифференциальные операции со скалярными и векторными полями удобно записывать с помощью оператора Гамильтона  $\nabla$  (набла).

### Основные определения

**Градиент** (от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* – шагающий, растущий) – вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой величины  $\phi$ , значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в этом направлении.

Например, если взять в качестве  $\phi$  высоту поверхности земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма» и своей величиной характеризовать крутизну склона.

С математической точки зрения градиент – это производная скалярной функции, определенной на векторном пространстве.

Пространство, на котором определена функция и её градиент, может быть, вообще говоря, как обычным трёхмерным пространством, так и пространством любой другой размерности любой физической природы или чисто абстрактным.

Термин впервые появился в метеорологии, а в математику был введён Максвеллом в 1873 г. Обозначение *grad* тоже предложил Максвелл

$$\text{grad}\phi = \nabla\phi$$

**Дивергенция** (от лат. *divergere* – обнаруживать расхождение) – дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное (то есть операция дифференцирования, в результате применения которой к векторному полю получается скалярное поле), который определяет (для каждой точки), «насколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле» (точнее – насколько расходятся входящий и исходящий поток).

Если учесть, что потоку можно приписать алгебраический знак, то нет необходимости учитывать входящий и исходящий потоки по отдельности, всё будет автоматически учтено при суммировании с учётом знака. Поэтому можно дать более короткое определение дивергенции:

**Дивергенция** – это линейный дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность достаточно малой (в условиях конкретной задачи) окрестности каждой внутренней точки области определения поля

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$$

**Ротор** (от лат. *rotare* – вращаться) или вихрь – векторный дифференциальный оператор над векторным полем.

Обозначается: **rot** (в русскоязычной литературе) или **curl** (в англоязычной литературе), а также как векторное умножение дифференциального оператора на векторное поле.

Результат действия этого оператора на конкретное векторное поле  $\vec{A}$  называется *ротором поля  $\vec{A}$*  или просто *ротором  $\vec{A}$*  и представляет собой новое векторное поле

$$\text{rot } \vec{A} = [\nabla \vec{A}] = \nabla \times \vec{A}.$$

Поле  $\text{rot } \vec{A}$  (длина и направление вектора  $\text{rot } \vec{A}$  в каждой точке пространства) характеризует в некотором смысле вращательную составляющую поля  $\vec{A}$ , соответственно, в каждой точке.

В декартовой системе координат оператор Гамильтона есть символический вектор

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{1}_z. \quad (6.10)$$

Из дифференциальных векторных операций второго порядка широкое применение в электродинамике находит оператор  $\nabla^2$ , закон действия которого на векторном поле  $\vec{A}$  описывается соотношением

$$\nabla^2 \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}. \quad (6.11)$$

Дифференциальная операция второго порядка, действующая на скалярном поле, задается оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta \equiv \text{div grad}. \quad (6.12)$$

Оператор Лапласа в различных координатных системах записывается следующим образом:

– в декартовой системе координат

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}; \quad (6.13)$$

– в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}; \quad (6.14)$$

– в сферической системе координат

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial A}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}. \quad (6.15)$$

Для графического изображения векторных полей принято строить картину их силовых линий. В каждой точке силовой линии вектор поля касателен к ней. Там, где интенсивность поля больше, силовые линии проводят чаще и наоборот.

## 7. НАПРАВЛЯЕМЫЕ И ВЫТЕКАЮЩИЕ ЛУЧИ В ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДАХ

---

Здесь будет проведен анализ волоконных световодов, которые используются в высокоинформативных линиях связи большой протяженности. Когда речь идет о траектории лучей, единственное различие между планарными и волоконными световодами заключается во введении в последнем случае третьего измерения.

Итак, хотя основные понятия остаются теми же анализ и результирующие выражения в общем случае усложняются, что обусловлено геометрией волоконных световодов. Тем не менее один из важных результатов нового материала заключается в том, что время прохождения луча в волоконном световоде со ступенчатым и усеченным степенным профилями показателя преломления для круглого и некруглого поперечных сечений совпадает с временем прохождения луча в планарных волноводах соответствующего профиля. Если это существенное упрощение принять без доказательств, то можно непосредственно переходить к изучению уширения импульсов в таких волоконных световодах, опуская при первом чтении материал данной лекции.

Большая часть предлагаемого материала – это классификация лучей и построение их траекторий в волоконных световодах круглого сечения с симметричным профилем. Помимо этого рассматриваются некруглые волокна, так как поперечное сечение реальных волоконных световодов может отличаться от круглого и иметь, например, эллиптическую форму.

Поскольку большая часть настоящего материала аналогична предыдущему, то будет полезно сравнить результаты обоих анализов.

### 7.1. Волоконные световоды с круглым сечением

Волоконный световод рассматриваемого типа представлен на рис. 7.1. Предполагается, что сердцевина с круглым сечением радиуса  $\rho$  окружена оболочкой, которая для простоты (чтобы пока не учитывать краевых эффектов) считается неограниченной. Граница между сердцевиной и оболочкой представляет собой цилиндрическую поверхность  $r = \rho$ . В пределах сердцевины осесимметричный профиль показателя преломления  $n(r)$  либо постоянный, либо изменяется, а в оболочке он имеет постоянное значение  $n_{cl}$ .

При описании круглых волоконных световодов (КВС) используется правосторонняя декартова система  $(x, y, z)$  и цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$ . Координатные системы ориентированы так, что ось  $z$  направлена вдоль оси световода. Изображен градиентный профиль – переменный в сердцевине и постоянный в оболочке, которая считается неограниченной.

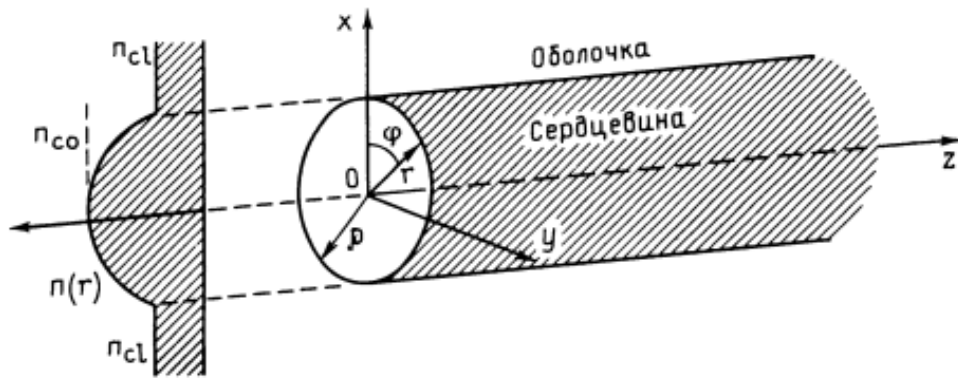


Рис. 7.1. Схематическое изображение круглого волоконного световода

Безразмерный параметр  $K$  применим также и для КВС и называется в этом случае *волоконным параметром*.

$$K = \frac{2\pi\rho}{\lambda} (n_{co}^2 - n_{cl}^2)^{1/2}, \quad (7.1)$$

где  $n_{co}$  – максимальное значение  $n(r)$ ,  $\rho$  – радиус сердцевины,  $\lambda$  – длина волны света в свободном пространстве. Величину  $(n_{co}^2 - n_{cl}^2)^{1/2}$  называют *числовой апертурой* световода, а выражение  $\{n(r)^2 - n_{cl}^2\}^{1/2}$  – *локальной числовой апертурой*. Рассмотренная здесь лучевая теория применима только к многомодовым волоконным световодам с  $K \gg 1$ .

## 7.2. Волоконные световоды со ступенчатым профилем

Как видно из рис. 7.1 показатель преломления волоконного световода со ступенчатым профилем может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} n(r) &= n_{co}, 0 \leq r < \rho; \\ n(r) &= n_{cl}, \rho \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь  $n_{co} \gg n_{cl}$ . Можно определить траекторию луча внутри сердцевины.

### Построение лучевых траекторий

Траектория луча в сердцевине строится с использованием обобщенных методов для планарного волновода. Между точками  $P$  и  $Q$  для ступенчатого профиля луч распространяется по прямой линии, а направление луча после отражения определяется законом Снеллиуса. Таким образом, падающий и отраженный лучи и нормаль в точке отражения лежат в одной плоскости, а углы падения и отражения (образуемые направлением луча с нормалью) равны между собой. В результате траектория луча приобретает вид, показанный на рис. 7.2,а.

Такое явление возможно, если лучи пересекают ось волокна между точками отражения. Такие лучи называются *меридианальными*, а траектория, которую они описывают, носит зигзагообразный характер. Из рисунка 7.2а, видно, что меридианальные лучи лежат в плоскости, проходящей через ось световода, в полосе шириной  $2\rho$ . В результате эти лучи обладают такими же свойствами, что и лучи соответствующего планарного волновода, а выражения того раздела применимы

к меридиональным лучам волоконных световодов, если декартову координату  $x$  заменить цилиндрической полярной координатой  $r$  (см. рис. 7.1).

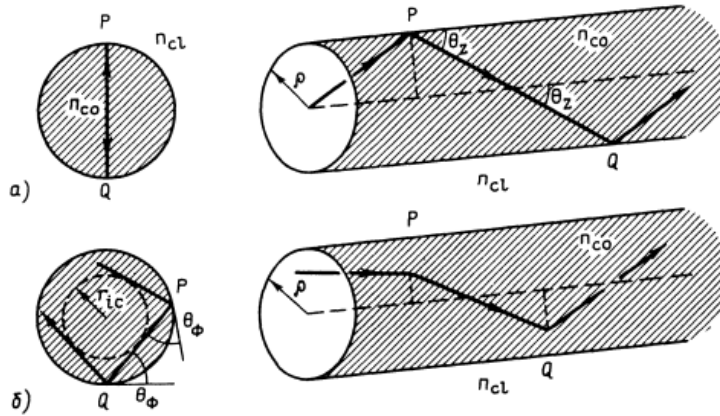


Рис. 7.2. Траектории лучей в сердцевине волоконного световода со ступенчатым профилем

Если условия вхождения луча в световод не соответствуют условию пересечения с осью световода на участке  $PQ$ , то лучи распространяются по спиралеобразной траектории, как показано на рис. 7.2,б. Такие лучи называются *косыми*. Проекция траектории такого луча на поперечное сечение волокна представляет собой многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса  $r_{ic}$ , формирующей цилиндрическую поверхность, называемую *внутренней каустикой световода*.

Принято характеризовать меридиональные лучи углом скольжения  $\theta_z$ , образованным лучом и осью. Соответственно, диапазон углов  $\theta_z$  для направляемых и рефразирующих лучей будет определяться ранее указанными условием:

$$\begin{array}{l} \text{Направляемые лучи: } 0 \leq \theta_z < \theta_c \\ \text{Рефразирующие лучи: } \theta_c \leq \theta_z \leq \pi/2 \end{array}$$

в котором для ступенчатого профиля (7.2) сохраняется определение критического угла скольжения  $\theta_c$

$$\theta_c = \arccos \left\{ \frac{n_{cl}}{n_{co}} \right\} = \arcsin \left\{ 1 - \frac{n_{cl}^2}{n_{co}^2} \right\}^{1/2}.$$

Из рисунка 7.2,б видно, что для задания траектории косога луча кроме угла наклона  $\theta_z$  необходимо знать второй угол, характеризующий скос луча –  $\theta_\varphi$ . Определяется  $\theta_\varphi$ , как угол в плоскости сечения сердцевины между касательной к границе раздела и проекцией траектории луча. Из геометрических соображений следует, что угол  $\theta_\varphi$  одинаков при всех отражениях.

Углы  $\theta_z$  и  $\theta_\varphi$  являются сферическими полярными углами, отсчитываемыми от осевого направления  $PQ$ , и (вместе с углом  $\alpha$ ) называются *направляющими углами*. На рисунке 7.3 показаны углы для описания отражения луча, падающего в точку  $P$ , на границе сердцевины волоконного световода со ступенчатым профилем.

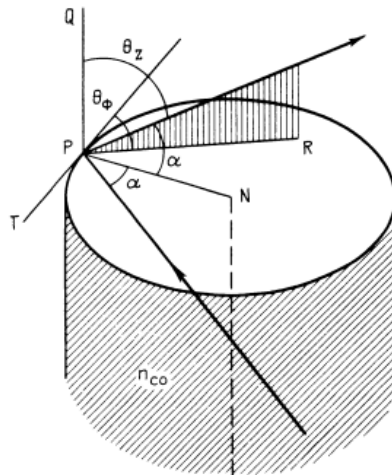


Рис. 7.3. Направляющие углы

Углы падения и отражения, отсчитываемые от нормали  $PN$ , равны  $\alpha$ . Падающий и отраженный лучи образуют угол  $\theta_z$  с осевым направлением  $PQ$  и угол  $\theta_\varphi$  (в сечении световода) между касательной  $PT$  и проекцией траектории луча ( $PR$  для отраженного луча).

С помощью проекций находим соотношение между тремя направляющими углами

$$\cos \alpha = \sin \theta_z \cdot \sin \theta_\varphi. \quad (7.3)$$

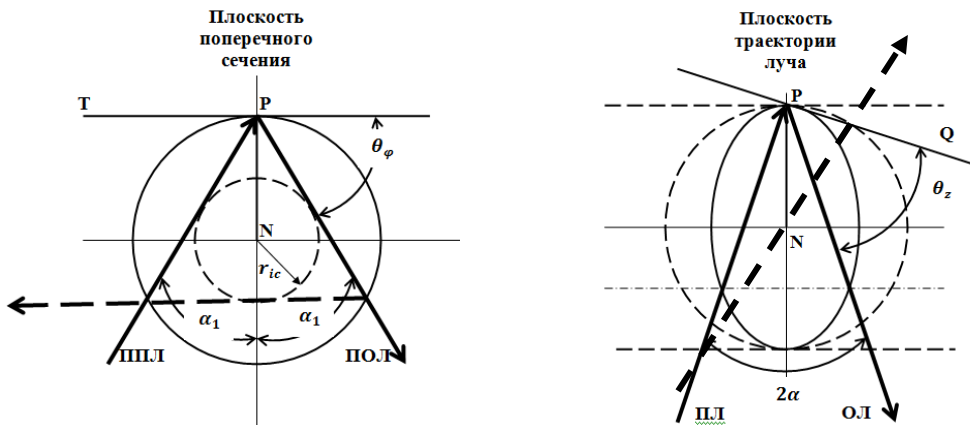


Рис. 7.4. Проекция траектории луча в различных плоскостях

Радиус внутренней акустики  $r_{ic}$  на рис. 7.4. определяется соотношением

$$r_{ic} = \rho \cos \theta_\varphi \quad (7.4)$$

и зависит, таким образом, *только от угла скоса*. Для меридиональных лучей  $\theta_\varphi = \pi/2$  и  $r_{ic} = 0$ .



**Классификация лучей.** Согласно закону Снеллиуса в точке  $P$  (см. рис. 7.4, пунктирная прямая линия образует с  $PN$  критический угол падения  $\alpha_c$ ) луч будет преломляться при  $\alpha > \alpha_c$ , где  $\alpha_c$  определяется выражением

$$\sin \alpha_c = \frac{n_{cl}}{n_{co}} = \cos \theta_c \quad (7.5)$$

и испытывает полное внутреннее отражение при  $\alpha < \alpha_c$ . Таким образом, можно утверждать, что все лучи с  $\alpha < \alpha_c$  являются *направляемыми*, однако в действительности только некоторые лучи, удовлетворяющие этому условию, будут направляемыми. Это связано с тем, что закон Снеллиуса справедлив для отражения от плоской поверхности, поверхность же волокна искривлена. Позже будет показано, для того чтобы луч был направляемым, *необходимо выполнение условия*  $0 \leq \theta_z < \theta_c$  независимо от значения угла  $\theta_\varphi$ . Указанное условие получено из уравнения лучевой траектории и совпадает с уравнением для планарных волноводов. Однако в случае волоконных световодов оно ограничивает конус углов в каждой точке сечения волокна и имеет силу как для меридиональных, так и для косых лучей. Косые лучи, которые не принадлежат ни к направляемым, ни к рефрагирующим лучам, образуют третий класс – *туннелирующие лучи*. Все ненаправляемые лучи, то есть *туннелирующие* и *рефрагирующие*, называются *вытекающими лучами*.

Суммируя сказанное, можно отметить, что лучи в волоконных световодах со ступенчатым профилем могут быть классифицированы в соответствии со значениями углов  $\theta_z, \theta_\varphi$  и  $\alpha$ :

<p style="text-align: center;">направляемые лучи: <math>0 \leq \theta_z &lt; \theta_c</math>,  рефрагирующие лучи: <math>0 \leq \alpha &lt; \alpha_c</math>,  туннелирующие лучи: <math>\theta_c \leq \theta_z \leq \frac{\pi}{2}</math> и <math>\alpha_c \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}</math>,</p>	(7.6)
--	-------

где  $\alpha_c$  и  $\theta_c$  определены с помощью выражения (7.5). Все углы показаны на рис. 7.3 и 7.4.

### Лучевые инварианты

Итак, на основе геометрических изображений показано, что углы  $\theta_z$  и  $\theta_\varphi$  постоянны вдоль выбранной траектории луча. Поэтому удобно ввести не один, а два инварианта, выраженные через указанные углы. Первый инвариант  $\bar{\beta}$  идентичен  $\bar{\beta} = n_{co} \cos \theta_z = n_{cl} \cos \theta_t$  и выражает факт наличия трансляционной инвариантности световода вдоль его оси – *трансляционный инвариант*. **Второй инвариант  $\bar{l}$** , связанный с углом скоса  $\theta_\varphi$ , выражает азимутальную симметрию волоконного световода – *инвариант азимутальной симметрии*.

Инварианты волоконных световодов для ступенчатого профиля имеют вид:

<p style="text-align: center;"><math>\bar{\beta} = n_{co} \cos \theta_z; \bar{l} = n_{co} \sin \theta_z \cos \theta_\varphi;</math>  <math>\bar{\beta}^2 + \bar{l}^2 = n_{co}^2 \sin^2 \alpha,</math></p>	(7.7)
---	-------

причем последнее соотношение вытекает из выражения (7.3). Для меридиональных лучей  $\bar{l} = 0$ , а для косых –  $\bar{l} > 0$ . Лучи могут быть классифицированы с помощью этих инвариантов. Из уравнений (7.5) – (7.7) следует, что независимо от

значения  $\bar{l}$  лучи являются направляемыми, если  $n_{cl} < \bar{\beta} \leq n_{co}$ , и вытекающими, если  $0 \leq \bar{\beta} < n_{cl}$ . Разделение вытекающих лучей на туннелирующие и рефрагирующие производится в соответствии со значением  $\bar{l}$  по критерию, который определен выражениями:

$$\begin{array}{l} \text{направляемые лучи: } n_{cl} < \bar{\beta} \leq n_{co}, \\ \text{рефрагирующие лучи: } 0 \leq \bar{\beta}^2 + \bar{l}^2 < n_{cl}^2, \\ \text{туннелирующие лучи: } n_{cl}^2 < \bar{\beta}^2 + \bar{l}^2 \leq n_{co}^2 \text{ и } 0 \leq \bar{\beta} < n_{cl}. \end{array} \quad (7.8)$$

При фиксированном значении  $\bar{\beta}$  для направляемых лучей значение  $\bar{l}$  находится в диапазоне  $0 \leq \bar{l} \leq n_{co}^2 - \bar{\beta}^2$ .

### Лучевые параметры

Лучевые параметры, введенные в разделе планарных волноводов со ступенчатым профилем, легко обобщаются при описании траекторий косых лучей (см. рис. 7.2). С помощью углов  $\theta_z$  и  $\theta_\varphi$  (рис. 7.3 и 7.4) и лучевых инвариантов (7.7) длина пути  $L_p$  между точками  $P$  и  $Q$  может быть записана, исходя из геометрических соображений, так:

$$L_p = 2\rho \frac{\sin \theta_\varphi}{\sin \theta_z} = 2\rho n_{co} \frac{(n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 - \bar{l}^2)^{1/2}}{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2}. \quad (7.9)$$

Отсюда непосредственно следует выражение для оптической длины пути

$$L_o = n_{co} L_p = 2\rho n_{co} \frac{\sin \theta_\varphi}{\sin \theta_z} = 2\rho n_{co}^2 \frac{(n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 - \bar{l}^2)^{1/2}}{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2}. \quad (7.10)$$

Полупериод  $Z_p$  траектории луча и количество отражений на единицу длины волокна  $N$  определяются с помощью соотношений

$$Z_p = \frac{1}{N} = L_p \cos \theta_z = 2\rho \frac{\sin \theta_\varphi}{\operatorname{tg} \theta_z} = 2\rho \bar{\beta} \frac{(n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 - \bar{l}^2)^{1/2}}{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2}. \quad (7.11)$$

### Время прохождения луча

Время прохождения  $t$  ранее было определено как время распространения луча на расстояние  $z$  вдоль волновода. Для волоконных световодов со ступенчатым профилем получим:

$$t = \frac{z}{Z_p} \cdot \frac{L_o}{c} = \frac{z}{c} \cdot \frac{n_{co}}{\cos \theta_z} = \frac{z}{c} \cdot \frac{n_{co}^2}{\bar{\beta}}, \quad (7.12)$$

где  $\bar{\beta}$  – трансляционный инвариант. Таким образом, **время прохождения луча по волоконному световоду со ступенчатым профилем не зависит от угла скоса, а определяется только значением угла  $\theta_z$** .

Так как соотношение (7.12) идентично выражению для планарных волноводов со ступенчатым профилем, изучение распространения импульсов в волоконных световодах не сложнее, чем в планарных волноводах со ступенчатым

профилем. С учетом влияния дисперсии материала время прохождения луча определяется выражением

$$t_d = \frac{z}{c} \cdot n_{sp} \cos \theta_z = \frac{z}{c} \cdot \frac{n_{sp} n_{ce}}{\beta}. \quad (7.13)$$

Для удобства все определения, связанные с описанием процесса распространения света в волоконных световодах и планарных волноводах со ступенчатым профилем, сведены в таблицу.

### 7.3. Волоконные световоды с градиентным профилем

Лучевой анализ волоконных световодов со ступенчатым профилем достаточно просто распространим на световоды с градиентной сердцевиной. Такое рассмотрение может быть обобщено и на профили с бесконечным поперечным сечением.

#### Построение лучевых траекторий и лучевые инварианты

С переходом к градиентным профилям исходным аналитическим уравнением становится уравнение эйконала (уравнение траектории луча для градиентных сред)

$$\frac{d}{ds} \left\{ n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right\} = \vec{\nabla} n(\vec{r}).$$

Волоконные световоды круглого сечения представляют собой структуры осесимметричного профиля показателя преломления, имеющие радиальную, азимутальную и продольные компоненты, которые с учетом опускания векторной символики, выражаются через уравнение эйконала в следующем виде:

– радиальная компонента лучевого уравнения

$$\frac{d}{ds} \left\{ n(r) \frac{dr}{ds} \right\} - rn(r) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{dn(r)}{dr}; \quad (7.14,a)$$

– азимутальная компонента

$$\frac{d}{ds} \left\{ n(r) \frac{d\varphi}{ds} \right\} + \frac{2n(r)}{r} \cdot \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{dr}{ds} = 0; \quad (7.14,b)$$

– продольная компонента

$$\frac{d}{ds} \left\{ n(r) \frac{dz}{ds} \right\} = 0. \quad (7.14,b)$$

В этих уравнениях  $s$  – расстояние вдоль траектории,  $r, \varphi, z$  – цилиндрические полярные координаты, показанные на рис. 7.1. Для облегчения физической интерпретации этих уравнений обобщим определения углов  $\theta_z, \theta_\varphi$  и  $\alpha$ , представленных на рис. 7.3 и 7.4.

Итак, в точке  $P = r$ :

–  $\theta_z(r)$  представляет собой угол между осью волокна и касательной к траектории луча в этой точке;

–  $\theta_\varphi(r)$  – угол между проекцией касательной к траектории луча в поперечном сечении и нормалью к радиусу, проведенному в исходную точку (см. рис. 7.4);

–  $\alpha(r)$  – угол между траекторией луча (а в градиентном профиле – касательной к траектории) и радиусом ( $NP$ ), проведенным в исходную точку ( $P$ ).

В этом случае, по аналогии с выражением (6.3) все указанные выше углы в каждой точке траектории связаны между собой соотношением

$$\cos \alpha(r) = \sin \theta_z(r) \cdot \sin \theta_\varphi(r). \quad (7.15)$$

С помощью разложения по векторам цилиндрической системы координат получим:

$$\frac{dr}{ds} = \cos \alpha(r); \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta_z(r), \quad (7.16, a)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} \sin \theta_z(r) \cdot \cos \theta_\varphi(r), \quad (7.16, б)$$

причем последнее соотношение вытекает из тождества  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$ .

Для более наглядного отображения траекторий меридионального и косоугольного лучей для световода с градиентным профилем воспользуемся рис. 7.5.

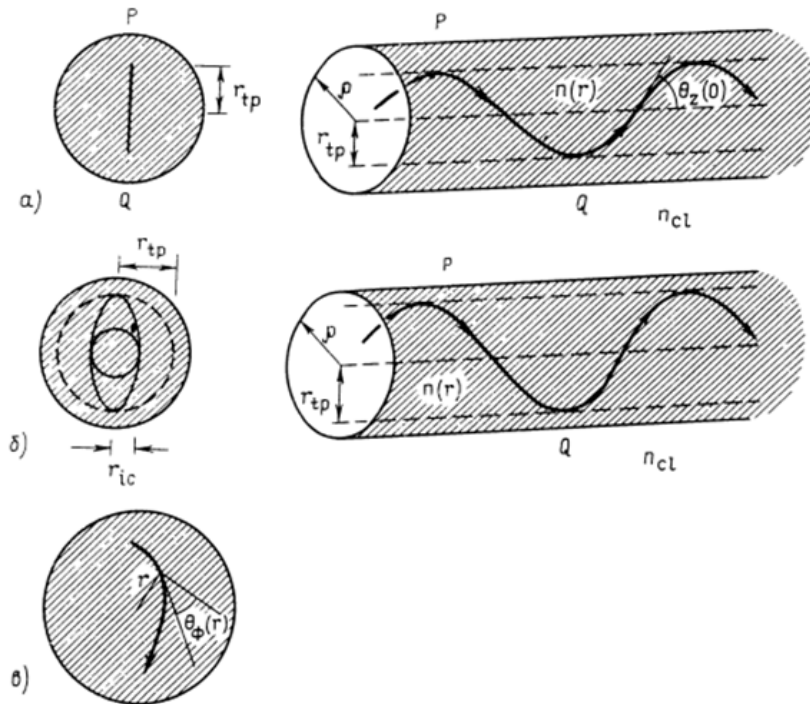


Рис. 7.5. Траектории меридионального и косоугольного лучей

На рисунке показаны траектории меридионального (а) и косоугольного (б) лучей и их проекции на сечении сердцевин в волоконном световоде с градиентным профилем. На рисунке 7.5,в показан угол  $\theta_\varphi(r)$  между проекцией траектории и азимутальным направлением.

### Лучевые инварианты

Интегрируя уравнение продольной компоненты (7.14,в), получаем лучевой инвариант для волокон с градиентным профилем

$$\boxed{\bar{\beta} = n(r) \frac{dz}{ds} = n(r) \cos \theta_z(r)}. \quad (7.17)$$

Это выражение идентично выражению для градиентных планарных волново-  
водов и выражает *трансляционную инвариантность световодов*.

Умножая азимутальную компоненту (7.14,б) на  $r^2$  и интегрируя, получаем  
второй инвариант – *инвариант азимутальной симметрии*, представленный в  
безразмерной форме

$$\boxed{l - \frac{r^2}{\rho} n(r) \frac{d\varphi}{ds} - \frac{r}{\rho} n(r) \sin \theta_z(r) \cos \theta_\varphi(r)}, \quad (7.18)$$

где  $\rho$  – радиус сердцевины. Наличие этого инварианта обусловлено осесиммет-  
ричностью профиля. Исключая  $\theta_z(r)$  из выражений для инвариантов  $\bar{l}$  и  $\bar{l}$ , можно  
связать угол скоса  $\theta_\varphi(r)$  непосредственно с функцией профиля:

$$\cos \theta_\varphi(r) = \frac{\rho}{r} \frac{l}{\{n^2(r) - \bar{\beta}^2\}^{1/2}}. \quad (7.19)$$

Несложно отметить, что при  $\theta_\varphi(r) = \pi/2$  для меридиональных лучей  
( $\bar{l} = 0$ ). Поэтому  $\bar{l}$  для ступенчатого профиля имеет вид (7.7) – в этом случае  
выражение для  $\bar{l}$  совпадает с (7.17) при  $r = \rho$  и  $n(r) = n_{co}$ .

### Характеристики лучевой траектории

Общая форма лучевых траекторий может быть получена из соответствующих  
траекторий в градиентном планарном волноводе (рис. 7.6,а) и траекторий в во-  
локонных световодах со ступенчатым профилем (рис. 7.6,б).

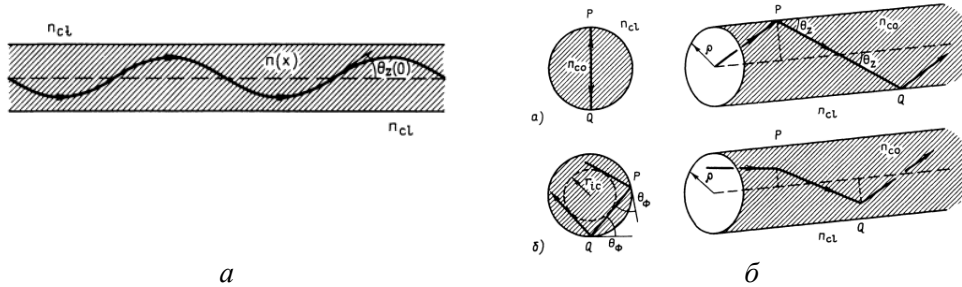


Рис. 7.6. Формы лучей различных волново-  
дов: а) синусоидальная траектория  
направляемого луча в сердцевине планарного волновода с градиентным профилем;  
б) траектории лучей и их проекции на поперечное сечение в сердцевине волоконного  
световода со ступенчатым профилем

Траектории, расположенные в пределах сердцевины, имеют характерный  
вид, показанный на рис. 7.5. Меридиональные лучи лежат в одной плоскости и  
пересекают ось волоконного световода между соседними точками поворота. Эти  
лучи идентичны лучам в градиентных планарных волноводах. Поэтому выра-  
жение 7.18 применимо и для меридиональных лучей в волоконных световодах,  
если декартову координату  $x$  заменить радиальной координатой  $r$ . Косые лучи  
распространяются по спиралевидной траектории (рис. 7.6,б) и попеременно ка-  
саются цилиндрических поверхностей внутренней каустики ( $r = r_{ic}$ ) и каустики  
точек поворота ( $r = r_{tp}$ ). Из определения видно, что на обеих каустиках  
 $\theta_\varphi(r) = 0$ . Таким образом, для данного градиентного профиля из выражения

(7.19) следует, что  $r_{ic}$  и  $r_{tp}$  являются корнями некоторой функции  $g(r)$ , полученной из лучевых параметров

$$g(r) \equiv n^2(r) - \bar{\beta}^2 - \bar{l}^2 \frac{\rho^2}{r^2}. \quad (7.20)$$

Для меридиональных лучей  $\bar{l} = 0$  и  $r_{ic} = 0$ .

### Классификация лучей

Простой способ классификации лучей в градиентных волоконных световодах основан на использовании лучевого уравнения (уравнения эйконала) для определения интервала значений радиальной координаты  $r$ , при котором могут распространяться лучи. Для этого радиальную компоненту лучевого уравнения (7.14,а) надо выразить в виде соотношения между  $r$  и  $z$ . С помощью инварианта 7.17) для инварианты  $\bar{\beta} ds$  заменяют на  $dz$  и подставляют  $d\varphi/ds$  из выражения (7.18). В результате получается уравнение

$$\bar{\beta}^2 \frac{d^2 r}{dz^2} - \bar{l}^2 \frac{\rho^2}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{dn^2(r)}{dr}, \quad (7.21)$$

которое можно проинтегрировать, положив  $d^2 r/dz^2 = r' dr'/dr$ , где  $r' = dr/dz$ . При этом получится

$$\boxed{\bar{\beta}^2 \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 = g(r) = n^2(r) - \bar{\beta}^2 - \bar{l}^2 \frac{\rho^2}{r^2}} \quad (7.22)$$

так как  $dr/dz = 0$  и  $g(r_{tr}) = 0$  при  $r = r_{tr}$ . Отсюда сразу же следует, что рассматриваемые лучевые траектории могут существовать только тогда, когда правая часть выражения (7.22) неотрицательна. Этот критерий определяет диапазон значений  $r$  для данного профиля. Таким образом, *для идентификации лучей совершенно необязательно определять их траекторию.*

### Направляемые и рефрагирующие лучи

Для упрощения анализа принято, что коэффициент преломления  $n(r)$  монотонно (изменяясь в одном направлении) уменьшается от максимального значения  $n_{co}$  на оси до минимального на поверхности сердцевинки, совпадающего с показателем преломления оболочки, то есть  $n(r) = n(\rho) = n_{cl}$ . Качественная картина особенностей поведения функции  $g(r)$  выражение (7.22) для типичного волоконного световода с градиентным профилем представлена на рис. 7.7.

Лучи распространяются только при  $g(r) > 0$ , а область их распространения обозначена жирной линией на оси  $r$ .

Луч будет направляемым, если везде в оболочке  $g(r) < 0$ ; из (7.22) видно, что это приводит к требованию  $n_{cl} < \bar{\beta} \leq n_{co}$ , которое идентично условию направляемых лучей для планарных волноводов.

Траектории косых направляемых лучей соответствуют области значений  $r$  между корнями  $r_{ic}$  и  $r_{tp}$  функции  $g(r)$ , как показано на рис. 7.7,а (сравните с рис. 7.7,б).

Траектории меридиональных направляемых лучей расположены между осью световода и корнем  $r_{tp}$ , как показано на рис. 7.7,б (сравните с рис. 7.5,а).

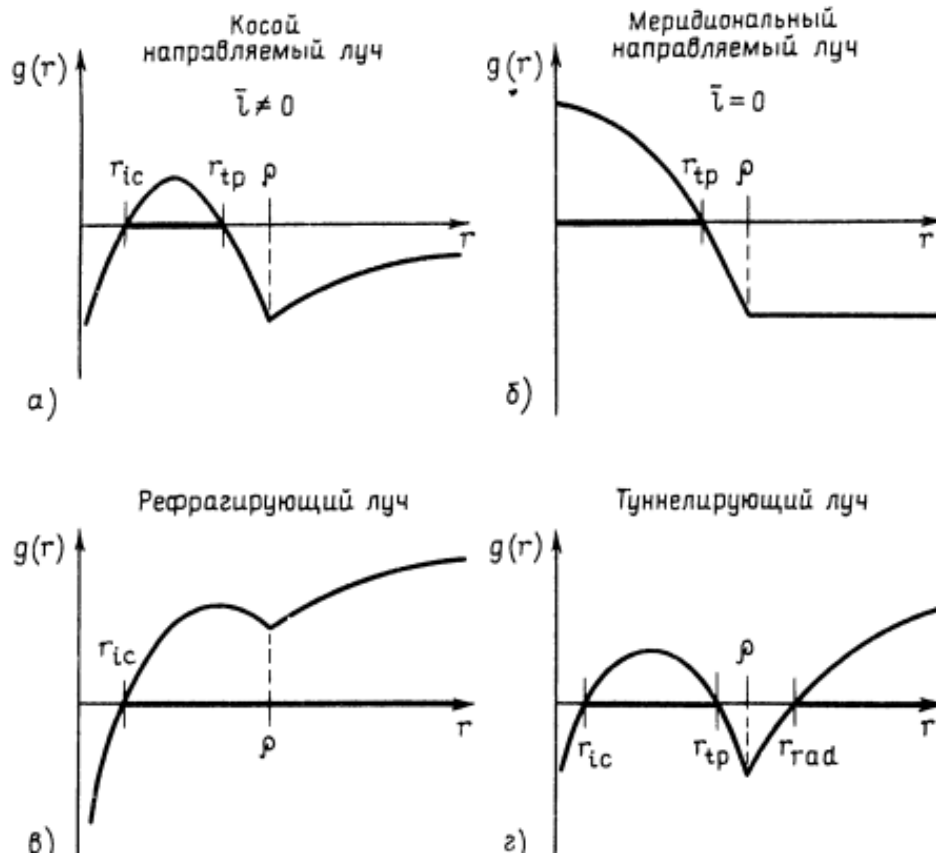


Рис. 7.7. Особенности поведения функции  $g(r)$  в типичном волоконном световоде с градиентным профилем

Рефрагирующий луч должен пересекать поверхность сердцевины, что предполагает выполнение неравенства  $g(\rho) > 0$ . В терминах уравнения (7.22) это требование эквивалентно выполнению условия  $0 \leq \bar{\beta}^2 + \bar{l}^2 < n_{cl}^2$ . В этом случае в области сердцевины существует только один корень  $r_{ic}$  функции  $g(r)$ , что иллюстрируется рис. 7.7,в. Рефрагирующий луч может быть меридиональным и косым [задание студентам – нарисовать эскизы рефрагирующего меридионального и рефрагирующего косого лучей по образцу рис. 7.5,а и 7.5,б].

### Туннелирующие лучи

Приведенные выше рассуждения не касались области значений  $\bar{\beta}$  и  $\bar{l}$ , удовлетворяющих одновременно условиям

$$\bar{\beta} < n_{cl} \text{ и } n_{cl}^2 < \bar{\beta}^2 + \bar{l}^2 \quad (7.23)$$

и, соответственно, не относящихся ни к направляемым, ни к рефрагирующим лучам. Эта область значений инвариантов соответствует классу так называемых **туннелирующих лучей**. Такое их название связано с тем, что они просачиваются в оболочку через барьер конечной толщины, то есть туннелируют, что аналогично механизму нарушения полного внутреннего отражения. Для обоснования



этого явления необходимо отметить, что из (7.22) при выполнении условия (7.23) следует неравенство  $g(r) < 0$ . Однако при исследовании поведения функции  $g(r)$  в оболочке обнаруживается, что  $g(r)$  становится положительной при всех  $r$ , превышающих некоторое значение  $r_{rad}$ , определяемое из условия  $g(r_{rad}) = 0$ . Эта величина называется **радиационной** каустикой. Следовательно,

$$r_{rad} = \rho \frac{\bar{l}}{(n_{cl}^2 - \beta^2)^{1/2}} \quad (7.24)$$

и цилиндрическая поверхность радиуса  $r_{rad}$  является **каустикой излучения**.

Из второго условия (7.23) вытекает, что  $r_{rad} > \rho$ . Другими словами, в оболочке существуют лучевые траектории, уходящие за поверхность  $r = r_{rad}$ , а так как показатель преломления оболочки постоянен, то они являются прямыми линиями. Траектории в сердцевине и оболочке разделены областью  $r_{tp} < r < r_{rad}$ , в которой лучи не распространяются. Для наглядности исследования поведения функции  $g(r)$  необходимо воспользоваться рис. 7.7,г, а также отобразить отрезки траекторий туннелирующих лучей в градиентном световоде, как показано на рис. 7.8.

Траектория туннелирующего луча в волоконном световоде с градиентным профилем касается каустики точек поворота в сердцевине в точке  $P$  (рис. 7.8,а) (излучение происходит в точке  $Q$  оболочки и распространяется вдоль  $QR$  по касательной к радиационной каустике) и ее проекции на поперечное сечение волоконного световода, как показано на рис. 7.8,б. На этом же рисунке показано положение начала траектории луча в оболочке на каустике излучения относительно точки поворота траектории в сердцевине. Лучевое уравнение не дает никакой информации о физическом механизме, связывающем две области, в которых расположена траектория туннелирующего луча.

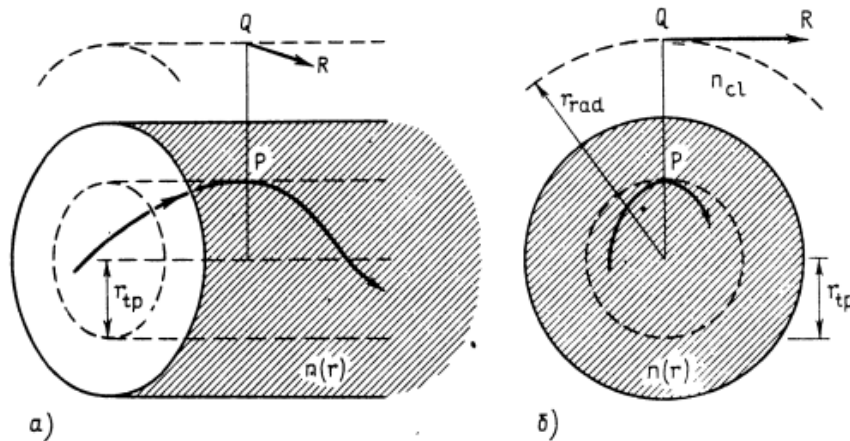


Рис. 7.8. Траектория туннельного луча в волоконном световоде с градиентным профилем

Предполагается, что часть мощности, распространяющейся в сердцевине, «вытекает» в оболочку вследствие туннельного эффекта, аналогично нарушению полного внутреннего отражения. К этому эффекту будет возврат при исследо-



вании излучения сигнала в волоконной среде и при изучении специальных средств оптоэлектроники.

Классификация лучей для ступенчатого и градиентного профилей имеет столько общих подходов потому, что ступенчатые профили являются частным случаем классификации лучей в световодах с градиентным профилем. Ступенчатый профиль можно рассматривать как предельный случай градиентного профиля, в котором все изменения показателя преломления происходят на границе сердцевины. Отсюда можно заключить, что лучи в световодах с оболочкой являются направляемыми при  $n_{cl} < \bar{\beta} \leq n_{co}$ , вытекающими при  $0 \leq \bar{\beta} < n_{co}$  независимо от значения  $\bar{l}$ . В то же время разделение лучей на *рефрагирующие* и *туннелирующие* существенно зависит от значения  $\bar{l}$ .

## 8. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

---

---

### 8.1. Совершенствование оптоволоконных каналов передачи информации

Создание оптического волокна (ОВ) на основе кварцевого стекла стало поворотным моментом в развитии среды передачи данных, так как позволило системам магистральной связи не только снять ограничения на скорость передачи и ширину полосы пропускания, но и снизить затухание сигнала настолько, чтобы передавать его без регенерации на многие сотни километров. В настоящее время ведется поиск новых более перспективных, волокон, одним из которых является фотонно-кристаллическое волокно (ФКВ) [14].

Такие волокна позволяют формировать фотонные запрещенные зоны, что открывает новые перспективы в управлении свойствами ОВ. Появляется возможность управлять волновой дисперсией, сдвигая длину волны нулевой дисперсии в область видимого спектра, а также эффективным показателем преломления оболочки, формируя «бесконечно» одномодовые волокна, в том числе и волокна с большой эффективной площадью сердцевины, необходимые для пропуска больших мощностей светового потока. Позволяет формировать воздушные каналы не только в оболочке (что волокно более легким), но и сердцевины, открывая широкие возможности дальнейшего уменьшения затухания в волокне.

Первые ОВ появились около сорока лет назад и имели затухание более 20 дБ/км. С тех пор ОВ используются как среда передачи данных в ВОСПИ, в локальных вычислительных сетях (ЛВС), внутриобъектовых коммуникационных каналах и пр.

Волокна изготавливаются из кварцевого стекла – аморфной однородной изотропной среды, в которой могут распространяться продольные и поперечные упругие волны.

Свет, отражаясь от границы раздела «серцевина – оболочка», в результате полного внутреннего отражения (ПВО) распространяется вдоль сердечника как волна по оптическому волноводу. Световая волна как электромагнитное колебание распространяется по волокну с фазовой скоростью, обратно пропорциональной показателю преломления, и состоит из многих типов колебаний, называемых *модами*.

Моды определяются решением уравнения Максвелла и существуют в виде четырех типов колебаний: поперечных  $T$  и продольных электрических  $E$ , магнитных  $H$  и смешанных  $EH$  и  $HE$ .

Чем меньше диаметр сердцевины, тем меньше число возникающих в них мод. Для магистральной связи целесообразно использовать одномодовые волокна с низкими уровнями затухания 0,2–0,7 дБ/км.

Для ВОСПИ важно то, что полоса пропускания одномодового волокна очень велика (порядка 100 ТГц), поскольку наиболее широкополосные

ВОСПИ уже достигли ширины полосы частот 10 ТГц (системы *DWDM* – многоканальные системы с плотным мультиплексированием по длине волны). Однако основной недостаток одномодовых волокон – очень малая площадь поперечного сечения сердцевины. Мощность оптического волокна в первых системах с синхронной цифровой иерархией (*SDH*) не превышала минус 3 дБм, в системах настоящего времени она достигает +12 дБм, а в многоканальных системах *WDM* – более +23 дБм.

Увеличение плотности мощности оптического потока приводит к возрастанию уровня нелинейных эффектов различного рода в ОВ. Их действие деструктивно в целом и сводится к увеличению числа ошибок, уменьшению длины секции, снижению допустимой скорости передачи в одноканальных системах, росту шага несущих частот в многоканальных системах и пр.

Для решения вышеперечисленных задач проводится разработка волокна на основе фотонных кристаллов. ФКВ представляет собой структуру двумерного фотонного кристалла на основе композиции «кварцевое стекло – воздух», формируемых в оболочке ОВ.

ФКВ – это волокно, поперечное сечение которого постоянно по длине и представляет собой двумерный фотонный кристалл (ФК) с точечным дефектом, расположенным, как правило, в центре симметрии ОВ.

Структура двумерного фотонного кристалла формируется в оболочке с помощью симметрично расположенных вокруг сердцевины полых капилляров в виде круглых или шестигранных плотно упакованных диэлектрических трубок, создающих периодическую двумерную микрорешетку, вид которой показан на рис. 8.1.

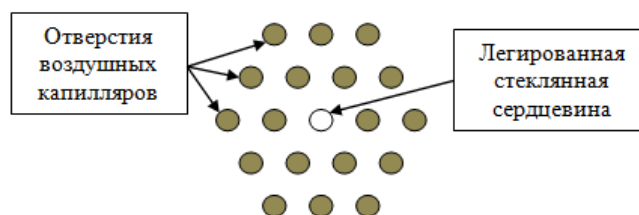


Рис. 8.1. Структура двумерного ФК с точечным дефектом в простой шестигранной центрированной ячейке

Главная особенность ФКВ в том, что распространение энергии световой волны происходит вдоль линейного дефекта, которым является, как правило, область сердцевины, а сама волна существует в виде поперечной моды  $TE_{01}$  или  $TM_{01}$ , то есть в поперечном сечении волокна (или в плоскости решетки фотонного кристалла).

Одним из первых и востребованных применений ФКВ стало создание световодов с большой эффективной площадью для стыков с мощными лазерами. Они используются для создания высокоэффективных шнуров коммутации лазерного и оптического усилительного оборудования, а также сплавных разветвителей.

ФКВ являются перспективными элементами *DFA* для усилителей типа *F*, где они применяются в качестве отрезков волокон, легированных эрбием. Последним усовершенствованием здесь стало использование нескольких концентрических слоев воздушных отверстий в оболочке с большим внутренним диаметром (52 мкм), что позволяет практически полностью задействовать световой поток мощных лазерных диодов накачки, направляя его через воздушные каналы оболочки ФКВ. Такие усилители позволяют достигать не только высокого уровня мощности (порядка 35 дБм) и высокой эффективности накачки (свыше 21%), но и сохранить линейный режим для входного информационного сигнала.

## 8.2. Совершенствование источников некогерентного излучения

Совершенствование светодиодов проходит по нескольким направлениям. Наиболее характерны из них два – увеличение внешнего квантового выхода и расширение спектра излучения. Здесь велик вклад советских ученых, в частности Ж.И. Алферова, еще в семидесятые годы прошлого столетия разработавшего так называемые многопереходные двойные гетероструктуры, позволяющие значительно увеличить внешний квантовый выход за счет ограничения активной области рекомбинации. Использовались гетероструктуры на основе арсенида галлия – алюминия. При этом был достигнут внешний квантовый выход в 15% для красной части спектра (световая отдача до 10 лм/Вт) и более 30% – для инфракрасной.

Исследование других гетероструктур привело к созданию эффективных светодиодов, излучающих в других областях спектра. Так, светодиоды на основе фосфидов алюминия – галлия – индия (разработка компании *Hewlett Packard*) излучали красно-оранжевый, желтый и желто-зеленый свет. Они имели световую отдачу до 30 лм/Вт (и внешний квантовый выход до 55%), превосходя лампы накаливания. При этом необходимо понимать, что в отличие от ламп накаливания светодиоды излучают свет в относительно узкой полосе спектра, ширина которой составляет 20–50 нм. Они занимают промежуточное положение между лазерами, свет которых монохроматичен (излучение со строго определенной длиной волны), и лампами различных типов, излучающих белый свет (смесь излучений различных спектров). Иногда такое «узкополосное» излучение называют *квази-монохроматическим*.

Современный мировой уровень технологий производства ОЯ СИД позволяет повсеместно заменять лампы накаливания более надежными и малопотребляющими источниками света. Мировые лидеры по производству СКД заявляют, что век ламп накаливания на исходе (им осталось жить менее 10 лет).

Долгое время развитие светодиодов сдерживалось отсутствием приборов, излучающих в синем диапазоне. Эту проблему в 1990 году решил Ш. Накамура с помощью гетероструктуры на основе нитрида индия – галлия, *InGaN*. Это сделало возможным создание светодиодов белого света. На настоящее время существует три способа получения белого света с помощью светодиодов [5].

*Первый способ.* Смешивание в определенных пропорциях излучений красного, зеленого и синего светодиодов. При этом могут быть использованы как отдельные светодиоды разных цветов, так и трехкристальные светодиоды, объединяющие кристаллы красного, зеленого и синего цветов в одном корпусе.

На рисунке 8.2 показана зависимость спектральной плотности излучения от длины волны, необходимая для получения белого света путем смешивания в определенной пропорции излучения красного, зеленого и синего световодов.

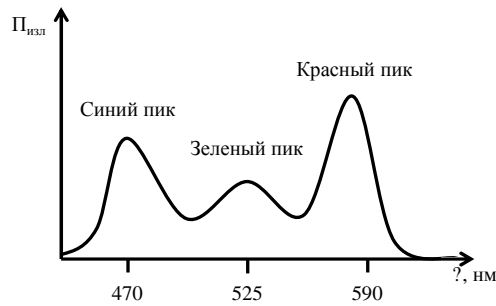


Рис. 8.2. Получение белого света

*Второй способ.* Основой более дешевого и распространенного светодиода белого света является полупроводниковый кристалл структуры  $InGaN$ , излучающий на длине 460–470 нм (синий свет) и нанесенный сверху на поверхность кристалла люминофор на основе  $YAG$  (иттрий – гадолиниевых гранатов), активизированных  $Ge^{3+}$ , излучающий в широком диапазоне видимого спектра и имеющий максимум в его желтой части.

Человеческий глаз комбинацию такого рода воспринимает как белый цвет.

Такие светодиоды намного дешевле трехкристалльных, обладают хорошей цветопередачей, а по светоотдаче (до 30 лм/Вт) они уже обогнали лампы накаливания.

*Третий способ.* Возбуждение трехслойного люминофора светодиодом ультрафиолетового спектра (УФ СИД).

Кристалл светодиода – практически точечный источник света, поэтому корпус может быть миниатюрным. Конструкция корпуса светодиода должна обеспечить минимальные потери излучения при выходе во внешнюю среду и фокусирование света в заданном телесном угле. Кроме того, должен быть обеспечен эффективный отвод теплоты от кристалла. Самая распространенная конструкция светодиода – традиционный пятимиллиметровый корпус. Конструкция светодиода показана на рис. 8.3.

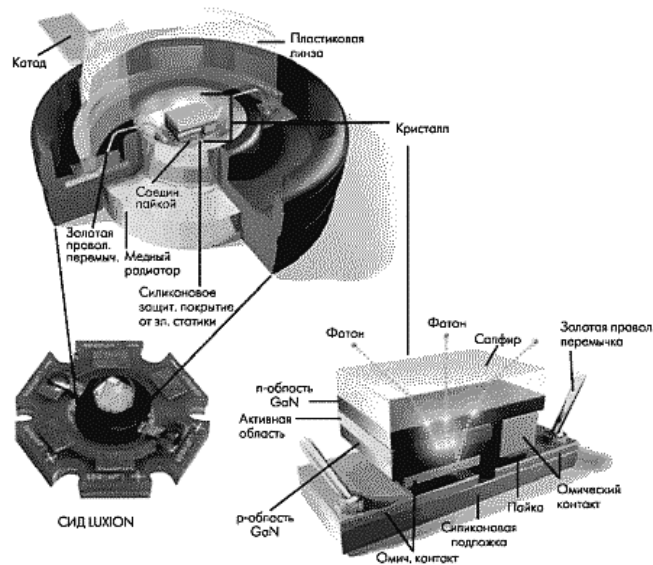


Рис. 8.3. Конструкция светодиода *Luxeon III*

Светоотдача светодиода составляет 25 лм/Вт при номинальном прямом токе 0,7 А. Это превосходит светоотдачу классических и галогенных ламп накаливания, а в ближайшее время компания *Lumileds Lichtings* планирует вплотную подойти к светоотдаче люминесцентных ламп 80–100 лм/Вт [5].

### 8.3. Совершенствование приборов когерентного излучения

Перспективным когерентным источником света для волоконно-оптических систем (ВОС) служит лазерный диод (ЛД). Лазерный диод – это твердотельный лазер, рабочим веществом в котором служит полупроводник, точнее кристалл, изготовленный на основе многослойных наноразмерных полупроводниковых гетероструктур. Полупроводниковый кристалл (чип) современного лазерного диода имеет миниатюрные размеры (0,1×0,5×3 мм), а накачка активной области кристалла осуществляется непосредственно от компактного безопасного низковольтного источника питания (рабочее напряжение около 2 В). Диодные лазеры как законченное устройство – наиболее легкие, компактные и экономичные среди существующих типов лазеров (полный КПД от розетки составляет около 50%). Поэтому они – лидеры продаж лазерного рынка (по данным журнала *Laser Focus*, более 60% мирового производства лазеров).

В последние годы бурное развитие технологии диодных лазеров позволило повысить ресурсную непрерывную выходную мощность одиночных излучателей до уровня 8–10 Вт при сроке службы более 5 тыс. часов – этого достаточно для решения многих практических задач. Однако резервы диодных лазеров далеко не исчерпаны, ведутся интенсивные исследования и разработки, направленные на повышение КПД лазерных чипов до 65% и более, а также продолжается поиск более эффективных методов отвода тепла от активной области лазерного кристалла (необходимо найти новые методы отвода тепловых потоков экстремально высокой плотности более 5 кВт/см<sup>2</sup>). Продвижение к решению этих проблем позволит в ближайшее время повысить ресурсную мощность одиночных лазерных диодов до 15–20 Вт.

В мае 2011 г. в группе были получены мощные, высокоэффективные и потенциально ресурсные лазерные диоды, излучающие в спектральном диапазоне 1060 нм. Наиболее перспективные направления их использования – имитаторы излучения мощных твердотельных лазеров диапазона 1047–1064 нм, а в ряде случаев – дешевая замена твердотельных лазеров этого диапазона. Кроме того, эти диоды послужат источником лазерного излучения для применения в медицине (в хирургии, гинекологии, онкологии и т.д.).

Ведущий научный сотрудник группы полупроводниковых лазеров НФО ФИАН кандидат физико-математических наук Виктор Безотосный отметил [16]:

*«Важное преимущество лазерных диодов – это возможность плавной перестройки длины волны излучения для попадания или отстройки от определенных полос поглощения материалов простыми способами вариации температуры теплоотводящего элемента и тока накачки. На основании предварительных исследований первой серии образцов лазеров этого спектрального диапазона можно отметить их высокую эффективность, воспроизводимость ватт-амперных характеристик и потенциально высокую надежность. При ресурсных испытаниях одиннадцати лазеров в течение 100 часов при выходной мощности 8 Вт во всей партии в пределах точности измерений не было зафиксировано уменьшения мощности. А совсем недавно усовершенствование тех-*

*нологий металлизации теплоотводящих элементов и процессов монтажа еще более улучшило их параметры. На отдельных образцах получена рекордная для спектрального диапазона 1060 нм эффективность в непрерывном режиме работы – выходная мощность составила более 10 Вт при токе накачки 10 А. Также нам удалось кратковременно получить максимальную воспроизводимую непрерывную выходную мощность более 20 Вт при ширине полоскового контакта излучателя 120 мкм (плотность мощности на зеркале в пиковом режиме составила около 16,7 МВт/см<sup>2</sup>).*

*Сейчас в нашей группе продолжаются исследования, направленные на повышение ресурсной и максимальной выходной мощности, а также повышение надежности мощных диодных лазеров за счет применения сабмаунтов с высокой теплопроводностью (до 2000 Вт/мК) на основе искусственных алмазов, выращенных методом “plasma – CVD”».*

Специалисты Физического института им. П. Н. Лебедева РАН (ФИАН) изготовили мощные лазерные диоды, излучающие в спектральном диапазоне 1060 нм. Новые устройства отличаются высокой эффективностью и по предварительным данным имеют значительный потенциал рабочего ресурса. Эти лазеры, имеющие непрерывную мощность до 10 Вт, будут использоваться в научных исследованиях, а также широко применяться в целом ряде практических областей.

В группе полупроводниковых лазеров нейтронно-физического отдела (НФО) ФИАН в течение ряда лет ведутся работы, направленные на повышение выходной мощности и срока службы лазерных диодов различных спектральных диапазонов.

Особый интерес для разработчиков представляют диапазоны длин волн 805–808 нм и 915–980 нм. Лазеры с такими характеристиками необходимы для научных исследований; они применяются для накачки твердотельных и волоконных лазеров. Эти лазеры широко используются в медицинской аппаратуре и навигационных приборах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

---

Дисциплина «Специальные главы высшей математики» расширяет базовую подготовку специалистов в области оптоэлектроники. Позволяет решить главную задачу – осуществить «перевод» физических явлений в оптике к технологическим процессам в радиоэлектронике, используя современный математический аппарат. Этому была посвящена первая часть пособия на тему «Оптические линии передачи информации».

Автор стремился подвести студентов к осознанию основного определения оптоэлектроники как раздела электроники, связанного с изучением эффектов взаимодействия между электромагнитными волнами оптического диапазона и электронами вещества (преимущественно твердого тела), являющегося средой распространения этих волн. Конечной целью дисциплины является решение проблемы создания специальных приборов, в которых могут быть использованы оптические эффекты для генерации, передачи, обработки, хранения и отображения информации.

Оптоэлектронику как научно-техническое направление характеризуют некоторые отличительные черты.

1. Физическую основу оптоэлектроники составляют явления, методы, средства, для которых принципиально сочетание и неразрывность оптических и электронных процессов. Эти процессы могут быть промоделированы, прежде всего, математически, а потом технически.

2. Математическую модель оптоэлектронных процессов можно осуществить, используя функции оптического и электрического возмущения. Описать наиболее специфичные и характерные преобразования вида:

- электрические в оптические при излучении;
- оптические в электрические при приеме;
- электрические в электрические при обработке информации;
- оптические в оптические при распространении информации по линии передачи.

3. Функциональное назначение оптоэлектроники состоит в том, что математические модели разрешаются в физические конструкции передачи информации:

- формирование информации путем преобразования различных внешних воздействий в соответствующие электрические и оптические сигналы;
- перенос информации;
- преобразование информации по заданному алгоритму;
- хранение информации, включающей такие процессы, как запись, собственно хранение, неразрушающее считывание, стирание;
- отображение информации – преобразование информации к виду, удобному к восприятию человеком.



Нередко оптоэлектронное (по форме) устройство фактически является оптическим, а электроника выполняет хотя и необходимые, но все же вспомогательные функции. В этих случаях мы говорим, что «оптоэлектроника – это оптика, управляемая электроникой». Именно такой подход «отодвигания» электроники на периферию приводит к максимальному эффекту.

Чтобы накопленный физической наукой математический аппарат позволял проводить емкое, но не затратное моделирование, необходима дисциплина «Специальные главы высшей математики».

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ И ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ\*

---

---

1. Акаев, А.А. Оптические методы обработки информации / А.А. Акаев, С.А. Майоров. – М.: Высш. шк., 1988. – 237 с.
2. Балакший, В.И. Физические основы акустооптики / В.И. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.
3. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – 2-е изд.; пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 814 с.
4. Бутусов, М.М. Волоконно-оптические системы передачи: учебник для вузов / М.М. Бутусов, С.М. Верник, С.Л. Галкин и др. – М.: Радио и связь, 1992. – 416 с.
5. Василенко, Г.И. Голографические распознающие устройства / Г.И. Василенко, Л.М. Цибулькин. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
- 6. Витрик, О.Б. Волноводы оптического диапазона: учеб. пособие / О.Б. Витрик. – Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2003. – 100 с.**
7. Гудмен, Дж. Введение в Фурье-оптику / Дж. Гудмен. – М.: Мир, 1970. – 364 с.
8. Магдич, Л.Н. Акустооптические устройства и их применение / Л.Н. Магдич, В.Я. Молчанов. – М.: Советское радио, 1978. – 112 с.
9. Парыгин, В.Н. Оптическая обработка информации / В.Н. Парыгин, В.И. Балакший. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 142 с.
10. Ребрин, Ю.К. Управление оптическим лучом в пространстве / Ю.К. Ребрин. – М.: Советское радио, 1977. – 336 с.
11. Семенов, А.С. Интегральная оптика для систем передачи и обработки информации / А.С. Смирнов, В.Л. Смирнов, А.В. Шмалько. – М.: Радио и связь, 1990. – 224 с.
12. Слока, В.К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов / В.К. Слока. – М.: Советское радио, 1970. – 256 с.
- 13. Снейдер, А. Теория оптических волноводов / А. Снейдер, Дж. Лав. – М.: Радио и связь, 1987. – 656 с.**
14. Сороко, Л.М. Основы голографии и когерентной оптики / Л.М. Сороко. – М.: Наука, 1971. – 616 с.
15. Убайдуллаев, Р.Р. Волоконно-оптические сети / Р.Р. Убайдуллаев. – М.: Эко-трендз, 2001. – 267 с.
- 16. Фриман, Р. Волоконно-оптические связи / Р. Фримен. – М.: Техносфера, 2006. – 496 с.**
17. Шандаров, С.М. Введение в оптическую обработку информации / С.М. Шандаров, А.В. Пуговкин, Л.Я. Серебренников. – Томск: Изд-во ГУ, 1981. – 60 с.

---

\* Литература, выделенная жирным, является основной для изучения

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

---

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ .....	5
1.1. История развития оптоэлектронных средств .....	5
1.2. Связь изучаемой дисциплины с другими дисциплинами .....	8
1.3. Содержание дисциплины .....	12
1.4. Балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения студентов .....	13
2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	17
2.1. Векторы электромагнитного поля и классификация сред.....	18
2.2. Уравнения Максвелла .....	26
3. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ НАПРАВЛЯЮЩИХ СРЕД .....	34
3.1. Направляющие системы и направляемые волны .....	34
3.2. Метод комплексных амплитуд .....	35
3.3. Связь между поперечными и продольными составляющими векторов электромагнитного поля.....	37
3.4. Общие свойства электрических, магнитных и гибридных волн .....	39
3.5. Общие свойства поперечных электромагнитных волн.....	43
3.6. Концепция парциальных волн .....	45
3.7. Скорость распространения энергии и групповая скорость.....	48
4. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ .....	51
4.1. Волновое уравнение для произвольной линии передач .....	51
4.2. Фазовая скорость и длина волны в линиях передачи .....	56
5. ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВОЛОКОННОЙ ОПТИКИ .....	60
5.1. Когерентность оптического излучения .....	60
5.2. Оптические планарные волноводы со ступенчатым профилем .....	63
5.3. Оптические планарные волноводы с градиентным профилем .....	70
5.4. Уравнение эйконала .....	85
6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА .....	96
Основные теоретические сведения векторного анализа .....	96
7. НАПРАВЛЯЕМЫЕ И ВЫТЕКАЮЩИЕ ЛУЧИ В ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДАХ .....	101
7.1. Волоконные световоды с круглым сечением.....	101
7.2. Волоконные световоды со ступенчатым профилем.....	102
7.3. Волоконные световоды с градиентным профилем .....	107
8. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ .....	114
8.1. Совершенствование оптоволоконных каналов передачи информации.....	114
8.2. Совершенствование источников некогерентного излучения .....	116
8.3. Совершенствование приборов когерентного излучения .....	118
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	120
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ И ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	122

Учебное издание

Халаев Николай Лукич

# **ОПТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ**

Часть I

## **СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ КАНАЛАХ**

Учебное пособие

Редактор Л.И. Александрова  
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Подписано в печать 25.09.2015. Формат 70×100/16.  
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0.  
Уч.-изд. л. 9,8. Тираж 200 экз. Заказ

---

Издательство Владивостокского государственного университета  
экономики и сервиса  
690014, Владивосток, ул. Гоголя, 41  
Отпечатано во Множительном участке ВГУЭС  
690014, Владивосток, ул. Гоголя, 41