Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Г.И. ШУМАН
О.А. ВОЛГИНА

высшАЯ математикА

Практикум

Часть 4

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2010

ББК 22.143
Ш 96

Шуман, Г.И., Волгина, О.А.
Ш 96 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА : практикум. Часть 4. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2010. – 152 с.

В практикуме содержится большой список задач для самостоятельной работы студентов, контрольные работы и индивидуальные домашние задания. По каждой теме приводится необходимая теоретическая часть, в которой рассматриваются основные понятия и их свойства, а также формулы, необходимые для решения задач, описано подробное решение достаточно большого числа задач.

Практикум предназначен для студентов I курса экономических специальностей, обучающихся по учебной программе дисциплины, а также может быть рекомендован и студентам заочной формы обучения

ББК 22.143

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Высшая математика» является основой экономического образования. Знания, приобретаемые студентами в результате изучения математики, играют важную роль в процессе его обучения в институте. Они необходимы для успешного усвоения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами экономических специальностей.

В практикуме предлагаемого объема невозможно полностью осветить весь изучаемый теоретический материал, поэтому в начале каждого раздела приведены лишь необходимые теоретические сведения: определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения по теории, отражающие количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов. Для решения последующих задач помещены необходимые методические указания, затем приводятся подробные решения типичных задач с подробными пояснениями теоретических положений, без чего невозможно успешное изучение математики. В конце каждого раздела содержится достаточное количество методически подобранных задач для самостоятельного решения с ответами к ним. Подбор задач осуществлялся по принципу «от простого к сложному».

Достоинство практикума состоит в том, что он может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих в том или ином объеме высшую математику. При наличии такого количества задач он может быть использовано и как задачник, и как раздаточный материал для выполнения контрольных работ по соответствующему разделу курса «Высшая математика». Практикум содержит 30 различных вариантов индивидуального домашнего задания по двум разделам. Кроме того, практикум может быть использован студентами для самостоятельного изучения соответствующего материала, а также является основой для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов по высшей математике.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции $f(x)$ найти ее производную (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная её производную $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \text{ (или } dF(x) = f(x)dx\text{).} \tag{1.1}$$

Например, для функции $f(x) = \cos x$ первообразной будет функция $F(x) = \sin x$ или $F(x) = \sin x - 5$, так как

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

или

$$F'(x) = (\sin x - 5)' = \cos x.$$

Поэтому первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \sin x + C,$$

где C – постоянная.

Теорема 1. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой

$$F(x) + C, \tag{1.2}$$

где C – постоянное число.

Теорема 2. Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то $F(x) - \Phi(x) = C$ на $(a;b)$, где C – некоторая константа.

Определение. Множество всех первообразных функций $F(x)+C$ для $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$

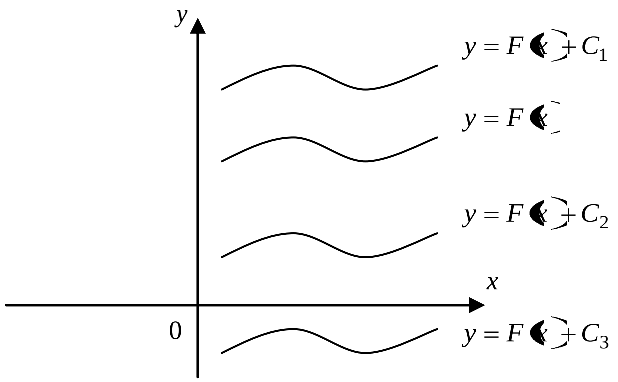
Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \qquad (1.3.)$$

Здесь $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, $\int$ – знаком неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x)+C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется интегральной кривой.



Имеет место теорема, утверждающая, что «всякая непрерывная на интервале $(a;b)$ функция имеет на этом интервале первообразную», а следовательно, и неопределенный интеграл.

1.2. Свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования)

Свойства неопределенного интеграла, вытекающие из его определения.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx,$$

где a – постоянная, $a \neq 0$.

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то и $\int f(u)du = F(u) + C,$ где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Это свойство говорит о том, что формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от неё, имеющей непрерывную производную.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию и, зная таблицу производных (или таблицу дифференциалов), нетрудно составить таблицу основных неопределенных интегралов.

1. $\int du = u + C.$ 2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$ 3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$a > 0, \quad a \neq 1$

4. $\int e^u du = e^u + C.$ 5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$ 6. $\int \cos u du = \sin u + C.$

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$ 8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$

9. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C.$ 10. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C.$

11. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$ 12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + C.$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C. \end{cases}$ 14. $\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} arctgu + C \\ -arcctgu + C. \end{cases}$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C \\ -\arccos \frac{u}{a} + C. \end{cases}$ 16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{u}{a} + C. \end{cases}$

17. $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C.$ 18. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C.$

19. $\int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$ 20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

В приведенной таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования). Достаточно часто интегрируя те или иные функции, пользуются следующими соотношениями:

$$1. \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C. \qquad (1.4)$$

$$2. \quad \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \qquad (1.5)$$

где a и b – постоянные, $a \neq 0$.

Справедливость формул интегрирования, а также и каждый результат интегрирования можно проверить путем дифференцирования (согласно первому или второму свойствам неопределенного интеграла).

В простейшем случае, когда заданный интеграл представляет одну из формул интегрирования, задача интегрирования сводится к простому применению этих формул.

Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^3}$ и проверить результат дифференцированием.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$, тогда

$$\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C.$$

Проверка. Найдем дифференциал полученной функции:

$$d\left(-\frac{1}{2x^2}+C\right)=d\left(-\frac{1}{2x^2}\right)+d(C)=d\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)+0=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)'\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-2-1}\cdot dx=x^{-3}dx=\frac{dx}{x^3}.$$

Сравнивая полученный дифференциал с подынтегральным выражением данного интеграла, убеждаемся в том, что интеграл найден верно (согласно второму свойству неопределенного интеграла).

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int 3^x\cdot5^x dx$ и проверить результат дифференцированием.

Решение. Так как $3^x\cdot5^x=(3\cdot5)^x=15^x$, тогда получим

$$\int 3^x\cdot5^x\cdot dx=\int 15^x dx=\frac{15^x}{\ln15}+C.$$

Проверка. Найдем производную от полученного результата:

$$\left(\frac{15^x}{\ln15}+C\right)'=\left(\frac{15^x}{\ln15}\right)'+(C)'=\frac{1}{\ln15}(15^x)'+0=\frac{1}{\ln15}\cdot15^x\cdot\ln15=15^x.$$

Совпадение полученного результата с подынтегральной функцией говорит о том, что неопределенный интеграл найден верно (согласно первому свойству).

Пример 3. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{du}{2u^2-6}$.

Решение. В знаменателе подынтегральной функции общий множитель 2 вынесем за скобку, тогда постоянный множитель подынтегральной функции $\frac{1}{2}$ вынесем за знак интеграла (используем четвертое свойство):

$$\int \frac{du}{2u^2-6} = \int \frac{du}{2(u^2-3)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-(\sqrt{3})^2}.$$

Воспользуемся формулой 20 таблицы интегралов, где $a=\sqrt{3}$, тогда получим:

$$\int \frac{du}{2u^2-6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл $\int x\sqrt{x}dx.$

Решение. Так как $x\sqrt{x} = x\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$, тогда получим:

$$\int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + x^{-2}.$$

Тогда получим (согласно пятому свойству)

$$\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int (x^2 - 2 + x^{-2})dx = \int x^2dx - \int 2dx + \int x^{-2}dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\int dx + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C.$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл $\int tg^2 xdx$.

Решение. $tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$

Используя преобразованный вид функции и свойства интегралов, получим:

$$\int tg^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Пример 7. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3}{x^{1/3}} - \frac{5x^2}{x^{1/3}} + \frac{7x^{1/2}}{x^{1/3}} =$$

$$= x^{3-\frac{1}{3}} - 5x^{2-\frac{1}{3}} + 7x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{8}{3}} - 5x^{\frac{5}{3}} + 7x^{\frac{1}{6}}.$$

Данный интеграл будет равен:

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(x^{8/3} - 5x^{5/3} + 7x^{1/6}\right)dx = \int x^{8/3}dx - 5\int x^{5/3}dx +$$

$$+7\int x^{1/6}dx = \frac{x^{8/3+1}}{8/3+1} - 5\cdot\frac{x^{5/3+1}}{5/3+1} + 7\cdot\frac{x^{1/6+1}}{1/6+1} + C = \frac{x^{11/3}}{11/3} - 5\frac{x^{8/3}}{8/3} +$$

$$+7\cdot\frac{x^{7/6}}{7/6} + C = \frac{3}{11}x^{11/3} - 5\cdot\frac{3}{8}x^{8/3} + 7\cdot\frac{6}{7}x^{7/6} + C = \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} - \frac{15}{8}\sqrt[3]{x^8} +$$

$$+6\sqrt[6]{x^7} + C.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы

1. $\int\left(3x^7 + 6x^5 - 3x^2 + 4\right)dx.$ **2.** $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)dx.$ **3.** $\int\left(tgx \cdot ctgx\right)dx.$

4. $\int \frac{x^2 + 2}{x}dx.$ **5.** $\int\left(2x + 3\cos x\right)dx.$ **6.** $\int \frac{dx}{x^2 + 4}.$ **7.** $\int \frac{dx}{5 - x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}.$ **9.** $\int\left(x + 2\right)\left(x^2 - 3\right)dx.$ **10.** $\int ctg^2 x dx.$ **11.** $\int \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8}dx.$

12. $\int\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx.$ **13.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}}.$ **14.** $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - \sqrt[7]{x}}{x}dx.$

15. $\int\left(1 + tg^2 x\right)dx.$ **16.** $\int\left(1 + ctg^2 x\right)dx.$ **17.** $\int 2^x \cdot 3^x dx.$

18. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$ **19.** $\int \frac{3+2ctg^2 x}{5\cos^2 x}dx.$ **20.** $\int \frac{x^3-8}{x-2}dx.$

Ответы. 1. $x^8 + x^6 - x^3 + 4x + C.$ **2.** $2\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + x + C.$

3. $x + C.$ **4.** $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + C.$ **5.** $x^2 + 3\sin x + C.$ **6.** $\frac{1}{2} arctg\frac{x}{2} + C.$

7. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right| + C.$ **8.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$ **9.** $\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 6x + C.$

10. $-ctg - x + C.$ **11.** $x - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right| + C.$ **12.** $x - \cos x + C.$

13. $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 7}\right| + C.$ **14.** $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 7\sqrt[7]{x} + C.$ **15.** $tgx + C.$

16. $-ctgx + C.$ **17.** $\frac{6^x}{\ln 6} + C.$ **18.** $\ln|x| + 2arctg\frac{x}{2} + C.$

19. $\frac{3}{5}tgx - \frac{2}{5}ctgx + C.$ **20.** $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + C.$

1.4. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам (если это возможно), называется непосредственным интегрированием.

Рассмотренные в предыдущем пункте примеры были решены именно этим методом.

Весьма эффективным методом интегрирования является метод замены переменной интегрирования (метод подстановки), в результате чего заданный интеграл заменяется другим интегралом. Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ можно заменить переменную x новой переменной t, связанной с x подходящей формулой $x = \varphi(t)$. Определив из этой формулы $dx = \varphi'(t)dt$ и подставляя, получим

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int F(t)dt.$$

Если полученный интеграл с новой переменной интегрирования t будет найден, то преобразовав результат к переменной x, пользуясь исходной формулой $x=\varphi(t)$, получим искомое выражение заданного интеграла.

Пример 8. Найти интеграл $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Пусть $\sqrt{x}=t$ или $x=t^2$, тогда $dx=(t^2)'dt$, $dx=2tdt$.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{t}{1+t}dt=2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=$$

$$=2\int\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{1}{t+1}dt=2t-2\int\frac{1}{t+1}dt.$$

Согласно соотношению (1.4) $\int\frac{1}{t+1}dt=\ln|t+1|+C$, получаем

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2t-2\ln|t+1|+C.$$

Возвращаясь к исходной переменной интегрирования $\sqrt{x}=t$, окончательно получаем:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$$

Можно найти данный интеграл иначе:

пусть $t=1+\sqrt{x}$. Отсюда $\sqrt{x}=t-1$, $x=(t-1)^2$, $dx=((t-1)^2)'dt$, $dx=2(t-1)dt$. Тогда получим:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2(t-1)}{t}dt=2\int\left(\frac{t}{t}-\frac{1}{t}\right)dt=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t}=$$

$$=2t-2\ln|t|+C=2(1+\sqrt{x})-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C=2\sqrt{x}+2-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C.$$

Полученные результаты отличаются постоянным слагаемым 2; оба результата правильные, так как, согласно теореме 2, две первообразные от данной подынтегральной функции отличаются на некоторую константу.

Пример 9. Найти интеграл $\int\frac{2x^2dx}{x^6+4}$.

Решение.

$$\int\frac{2x^2dx}{x^6+4}=2\int\frac{x^2dx}{(x^3)^2+4}.$$

Пусть $x^3 = y$, $dy = (x^3)'dx$, $dy = 3x^2dx$, $x^2dx = \frac{1}{3}dy$,

тогда получим

$$2\int\frac{x^2dx}{(x^3)^2+4} = 2\int\frac{\frac{1}{3}dy}{y^2+4} = 2\cdot\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y^2+2^2} = \frac{2}{3}\int\frac{dy}{y^2+2^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\,\frac{y}{2} + C = \frac{1}{3}arctg\,\frac{x^3}{2} + C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

Решение. Обозначим $y = \sqrt{1+2\cos x}$, тогда $y^2 = 1+2\cos x$, дифференцируем обе части равенства, $dy^2 = d(1+2\cos x)$, $(y^2)'dy = (1+2\cos x)'dx$, $2ydy = -2\sin xdx$, $\sin xdx = -ydy$.

$$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}} = \int\frac{-ydy}{y} = -\int dy = -y + C = -\sqrt{1+2\cos x} + C.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int\frac{dy}{\sqrt{e^y+1}}$.

Решение. Берем подстановку $z = \sqrt{e^y+1}$, $z^2 = e^y+1$, дифференцируем обе части равенства $dz^2 = d(e^y+1)$, $(z^2)'dz = (e^y+1)'dy$, $2zdz = e^ydy$, $dy = \frac{2zdz}{e^y}$, а так как $e^y = z^2-1$, тогда $dy = \frac{2zdz}{z^2-1}$. Получаем:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{e^y+1}} = \int\frac{2zdz}{(z^2-1)z} = 2\int\frac{dz}{z^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{e^y+1}-1}{\sqrt{e^y+1}+1}\right| + C.$$

Пример 12. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Беря подстановку $1+\sqrt{x} = y$, получаем $\sqrt{x} = y-1$, $x = (y-1)^2$, $dx = 2(y-1)dy$.

Подставляем в подынтегральное выражение, интегрируем и возвращаемся к переменной x:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{(y-1)\cdot 2(y-1)dy}{y} = 2\int \frac{(y-1)^2}{y}dy = 2\int \frac{y^2-2y+1}{y}dy =$$

$$= 2\int \left(\frac{y^2}{y} - \frac{2y}{y} + \frac{1}{y}\right)dy = 2\int ydy - 2\int 2dy + 2\int \frac{1}{y}dy = 2\cdot\frac{y^2}{2} - 4y + 2\ln|y| +$$

$$+C = (1+\sqrt{x})^2 - 4(1+\sqrt{x}) + 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C.$$

Пример 13. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

Решение. Полагаем $x = t^4$, тогда $\sqrt[4]{x} = t$, $\sqrt{x} = t^2$, $\sqrt[4]{x^3} = t^3$, $dx = (t^4)'dt$, $dx = 4t^3dt$. Подставляем в подынтегральное выражение и интегрируем:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{t^2\cdot 4t^3dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5dt}{t^3+1}.$$

Выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} t^5 \\ t^5+t^2 \end{array} & \begin{array}{l} t^3+1 \\ \hline t^2 \end{array} \\ \hline -t^2 & \end{array}$$

тогда $\frac{t^5}{t^3+1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}$.

$$4\int \frac{t^5dt}{t^3+1} = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt = 4\int t^2dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = 4\cdot\frac{t^3}{3} - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt.$$

Найдем $\int \frac{t^2}{t^3+1}dt.$ Для этого введем новую переменную $y = t^3+1$, $dy = 3t^2dt$, $t^2dt = \frac{1}{3}dy$. Полученные результаты подставим в подынтегральное выражение и проинтегрируем:

$$\int \frac{t^2dt}{t^3+1} = \int \frac{\frac{1}{3}dy}{y} = \frac{1}{3}ln|y| = \frac{1}{3}ln\left|t^3+1\right|.$$

Возвращаясь к данному интегралу, получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}} = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}ln\left|t^3+1\right| + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| + C.$$

Выбор удачной формулы (подстановки) для замены переменной имеет большое значение. Вместе с тем дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно. Освоить применение этого метода интегрирования можно только одним способом – решая как можно больше примеров.

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int cos(3x+5)dx$. **2.** $\int \sqrt[3]{2-7x}\,dx$. **3.** $\int (4-9x)^{20}dx$. **4.** $\int \frac{dx}{\sqrt[11]{3-11x}}$.

5. $\int \frac{x^2dx}{5-x^6}$. **6.** $\int \frac{dx}{x\,ln^2 x}$. **7.** $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$. **8.** $\int 7^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$. **9.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$.

10. $\int \frac{sin\,2xdx}{\sqrt{2+cos^2 x}}$. **11.** $\int \frac{\sqrt{1+ln\,x}}{x}dx$. **12.** $\int \frac{1-2\,sin\,x}{cos^2 x}dx$.

13. $\int \frac{x^4dx}{x^{10}-7}$. **14.** $\int cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$. **15.** $\int \frac{arccos^3 x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

16. $\int e^{ctgx}\cdot\frac{dx}{sin^2 x}$. **17.** $\int \frac{3-arcctgx}{1+x^2}dx$. **18.** $\int \frac{cos\,x}{sin^{15} x}dx$.

19. $\int \frac{x^6dx}{7+x^{14}}$. **20.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{ln^2 x-3}}$.

Ответы. 1. $\frac{1}{3}\sin(3x+5)+C$. **2.** $-\frac{3}{28}\sqrt[3]{(2-7x)^4}+C$.

3. $-\frac{1}{189}(4-9x)^{21}+C$. **4.** $-\frac{1}{10}\sqrt[11]{(3-11x)^{10}}+C$.

5. $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x^3}{\sqrt{5}-x^3}\right|+C$. **6.** $-\frac{1}{\ln x}+C$. **7.** $\frac{1}{4}\ln\left|3+4e^x\right|+C$.

8. $\frac{2\cdot 7^{\sqrt{x}}}{\ln 7}+C$.

9. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+1}\right|+C$. **10.** $-2\sqrt{2+cos^2 x}+C$.

11. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C.$ **12.** $tgx-\frac{2}{\cos x}+C.$ **13.** $\frac{1}{10\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{7}}{x^5+\sqrt{7}}\right|+C.$

14. $-\frac{1}{2}sin\frac{1}{x^2}+C.$ **15.** $-\frac{arccos^4 x}{4}+arcsin\,x+C.$ **16.** $-e^{ctgx}+C.$

17. $3arctgx+\frac{arcctg^2 x}{2}+C.$ **18.** $-\frac{1}{14\,sin^{14}x}+C.$

19. $\frac{1}{7\sqrt{7}}arctg\frac{x^7}{\sqrt{7}}+C.$ **20.** $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-3}\right|+C.$

Методом **интегрирования по частям** называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du, \tag{1.6}$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

Формула интегрирования по частям дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu,$ который может оказаться существенно более простым, чем исходный, или когда он будет ему подобен.

Для применения формулы (1.6) к некоторому интегралу $\int f(x)dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)dx$ представить в виде произведения двух множителей: u и dv; за dv всегда выбирается такое выражение, содержащее dx, из которого посредством интегрирования можно найти v; за u в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается. Иногда формулу интегрирования по частям приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислить методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{ax}dx,$ $\int P(x)sin(ax)dx,$ $\int P(x)\cos(ax)dx,$ где $P(x)$ – многочлен, a – число, $a\neq 0$. Удобно положить $u=P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители подынтегрального выражения, то есть

$$dv=\begin{cases} e^{ax}dx, \\ \sin(ax)dx, \\ \cos(ax)dx. \end{cases}$$

В данном случае формула (1.6) применяется столько раз, какова степень многочлена $P(x)$.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x) arccos\, xdx$, $\int P(x) arctgxdx$, $\int P(x) arcctgxdx$, $\int P(x)\ln xdx$. В таких интегралах удобно положить $dv = P(x)dx$, а за u обозначить остальные сомножители, то есть

$$u = \begin{cases} \arcsin x, \\ \arccos x, \\ arctgx, \\ arcctgx, \\ \ln x. \end{cases}$$

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \cdot sin(bx)dx$, $\int e^{ax} \cdot \cos(bx)dx$, где a и b – числа. В таком случае за u можно принять функцию $u = e^{ax}$ или $u = \sin(bx)$ ($u = \cos(bx)$). Формула интегрирования по частям будет применяться два раза. В повторном интегрировании по частям за u необходимо принять аналогичную в первом применении функцию. В таком случае получается уравнение относительно данного по условию интеграла, из которого легко найти этот интеграл. При неудачном выборе u и dv в повторном интегрировании получается бесполезное тождество.

Пример 14. Найти интеграл $\int x^2 e^{3x} dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, берущихся по частям. Степень многочлена $(P(x) = x^2)$ равна двум, поэтому будем пользоваться формулой (1.6) два раза.

Положим $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$, тогда $du = 2xdx$, $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (согласно соотношению (1.5)).

По формуле (1.6) найдем

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 2xdx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx.$$

К последнему интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = e^{3x}dx$, тогда $du = dx$,

$v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (только что был найден такой интеграл). По формуле (1.6) получим

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}.$$

Окончательно получаем

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + C = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} +$$
$$+ \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

Пример 15. Найти интеграл $\int (2x+1)\cos xdx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, берущихся по формуле (1.6). Здесь многочлен $P(x) = 2x+1$ первой степени, а значит формула (1.6) будет использоваться один раз. Пологая $u = 2x+1$, $dv = \cos xdx$, найдем: $du = 2dx$, $v = \int \cos xdx = \sin x$. По формуле интегрирования по частям получим

$$\int (2x+1)\cos xdx = (2x+1)\sin x - \int \sin x \cdot 2dx = (2x+1)\sin x - 2\int \sin xdx =$$
$$= (2x+1)\sin x + 2\cos x + C.$$

Пример 16. Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Решение. Интеграл относится ко второй группе интегралов, берущихся по частям. Пусть $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$, тогда $du = (\ln x)'dx$,

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (1.6) получим

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} =$$
$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + C = C - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$$

Пример 17. Найти интеграл $\int arcctgxdx$.

Решение. Так как дан интеграл второй группы, положим $u = arcctgx$, $dv = dx$, тогда $du = (arcctgx)'dx$, $du = -\frac{1}{1+x^2} \cdot dx$, $v = \int dx = x$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int arcctgxdx = xarcctgx - \int x \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = xarcctgx + \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Последний интеграл находим отдельно. Применим к нему метод подстановки. Обозначим $y = 1 + x^2$, тогда $dy = (1+x^2)'dx$, $dy = 2xdx$, отсюда $xdx = \frac{1}{2}dy$. Подставляем в подынтегральное выражение последнего интеграла, находим полученный новый интеграл и возвращаемся к заданной переменной x:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}ln|y| = \frac{1}{2}ln\left|1+x^2\right|.$$

Возвращаясь к данному по условию интегралу, получаем:

$$\int arcctgxdx = xarcctgx + \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C.$$

Здесь модуль выражения $(1+x^2)$ заменен скобками, так как это выражение при любых значениях x положительно.

Пример 18. Найти интеграл $\int e^{-x} \cdot cos\frac{x}{2}dx$.

Решение. Дан интеграл третьей группы. Пусть $u = e^{-x}$, $dv = \cos\frac{x}{2}dx$, тогда $du = (e^{-x})'dx$, $du = -e^{-x}dx$, $v = \int cos\frac{x}{2}dx = 2\,sin\frac{x}{2}$ (согласно равенству (1.5)).

По формуле (1.6) получим

$$\int e^{-x} \cdot cos\frac{x}{2}dx = e^{-x} \cdot 2\,sin\frac{x}{2} - \int 2\,sin\frac{x}{2}(-e^{-x})dx = 2e^{-x}\,sin\frac{x}{2} +$$
$$+ 2\int e^{-x} \cdot sin\frac{x}{2}dx.$$

Как видим, в последнем интеграле в сравнении с данным интегралом одна из функций изменилась на кофункцию, то есть $\cos\frac{x}{2}$ на

$\sin\frac{x}{2}$. Как было сказано ранее, к интегралам третьей группы метод интегрирования по частям применяется два раза, поэтому, решая последний интеграл, положим $u = e^{-x}$, $dv = \sin\frac{x}{2}dx$, тогда $du = -e^{-x}dx$, $v = \int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}$.

Используя формулу (1.6), последний интеграл примет вид:

$$\int e^{-x}\cdot \sin\frac{x}{2}dx = e^{-x}\cdot\left(-2\cos\frac{x}{2}\right) - \int\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\left(-e^{-x}dx\right) =$$

$$= -2e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2} - 2\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx.$$

Вернемся к данному интегралу

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} + 2\left(-2e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 2\int e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2}dx\right) =$$

$$= 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx.$$

Последний интеграл совпадает с исходным интегралом. Таким образом мы получили алгебраическое уравнение с неизвестным интегралом $\int e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2}dx$:

$$\int e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx.$$

Решим это уравнение относительно исходного интеграла:

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx + 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2},$$

$$5\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2}, \text{ тогда}$$

$$\int e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2}dx = \frac{2}{5}e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2} - \frac{4}{5}e^{-x}\cos\frac{x}{2} + C.$$

Если при отыскании второго интеграла выбрать u и dv иначе: $u = \sin\frac{x}{2}$, $dv = e^{-x}dx$, то получим $du = \left(\sin\frac{x}{2}\right)'dx$, $du = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$, $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$,

$$\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx=-e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2}-\int\left(-e^{-x}\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=$$

$$=-e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2}dx.$$

Возвращаясь к данному интегралу, получим

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2}+2\left(-e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx\right)=$$

$$=2e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2}-2e^{-x}\cdot\sin\frac{x}{2}+\int e^{-x}\cdot\cos\frac{x}{2}dx,\quad 0=0.$$

Получили бесполезное тождество.

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int x^2\cos x dx$. **2.** $\int (x-1)\sin x dx$. **3.** $\int e^{3x}(x-3)dx$. **4.** $\int \arccos x dx$.

5. $\int x\ln 5x dx$. **6.** $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x dx$. **7.** $\int \arcsin 2x dx$. **8.** $\int \mathrm{arctg}\,3x dx$.

9. $\int e^{-2x}\sin 5x dx$. **10.** $\int e^{4x}\cos\frac{x}{3}dx$.

Ответы. 1. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$. **2.** $(1-x)\cos x+\sin x+C$.

3. $\frac{(x-3)}{3}e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C$. **4.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

5. $\frac{x^2}{2}\ln 5x-\frac{x^2}{4}+C$. **6.** $\frac{x^2}{2}\mathrm{arcctg}\,x+\frac{x+1}{2}\mathrm{arcctg}\,x+C$.

7. $x\arcsin 2x+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$. **8.** $x\,\mathrm{arctg}\,3x-\frac{1}{6}\ln\left|1+9x^2\right|+C$.

9. $-\frac{5}{29}\left(e^{-2x}\cos 5x+\frac{2}{5}e^{-2x}\sin 5x\right)+C$.

10. $\frac{3}{145}e^{4x}\left(\sin\frac{x}{3}+12\cos\frac{x}{3}\right)+C$.

1.5. Интегрирование рациональных функций

Определение. Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, то есть $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)},$ где $P_m(x)$ – многочлен степени m, а $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m<n;$ в противном случае (если $m \ge n$) рациональная дробь называется неправильной.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби.

Следующие правильные дроби называются простейшими или элементарными:

1. $\dfrac{A}{x-a}$;

2. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, где m – целое число, больше единицы (то есть $m \ge 2$, $m \in N$);

3. $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, где знаменатель дроби не имеет действительных корней, то есть $D=p^2-4q<0$.

Здесь A, a, b, p, q – действительные числа.

Рассмотрим на примерах интегралы от простейших рациональных дробей.

Пример 19. Найти интеграл $\int \dfrac{5}{x+2}dx.$

Решение. Воспользуемся свойством 4 неопределенных интегралов и равенством (1.5):

пусть $f(x)=x+2,$ тогда $f'(x)=1,$ поэтому $\int \dfrac{5}{x+2}dx = 5\int \dfrac{1}{x+2}dx = 5\ln|x+2|+C.$

Таким образом

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C.$$

Пример 20. Найти интеграл $\int \dfrac{3}{(x-4)^5}dx.$

Решение. Обозначим $x-4=y$, $dy=(x-4)'dx$, $dy=1\cdot dx$, $dy=dx$, тогда получим

$$\int\frac{3}{(x-4)^5}dx=3\int\frac{dy}{y^5}=3\int y^{-5}dy=3\cdot\frac{y^{-5+1}}{-5+1}+C=$$

$$=3\cdot\frac{y^{-4}}{-4}+C=-\frac{3}{4y^4}+C=-\frac{3}{4(x-4)^4}+C.$$

Следовательно

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=-\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+C\ .$$

Пример 21. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Решение. Рассмотрим квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе подынтегральной функции x^2+4x+8: $D=4^2-4\cdot1\cdot8=16-32=-16<0$, действительных корней квадратный трехчлен не имеет, поэтому выделим полный квадрат из квадратного трехчлена $x^2+4x+8=x^2+2\cdot2\cdot x+4+4=(x+2)^2+4$. Обозначим через $y=x+2$, тогда $dy=(x+2)'dx$, $dy=dx$; $x^2+4x+8=y^2+4$.

Подставим в данный интеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dy}{y^2+2^2}=\frac{1}{2}arctg\,\frac{y}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+2}{2}+C.$$

Пример 22. Найти интеграл $\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$.

Решение. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат

$$2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right]=$$

$=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$. Введем новую переменную $z=x-\frac{3}{4}$, тогда $dz=dx$, $x=z+\frac{3}{4}$.

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx = \int \frac{7-8\left(z+\frac{3}{4}\right)}{2\left(z^2-\frac{1}{16}\right)}dz = \int \frac{7-8z-6}{2\left(z^2-\frac{1}{16}\right)}dz = \frac{1}{2}\int \frac{1-8z}{z^2-\frac{1}{16}}dz.$$

Далее разложим полученный интеграл на сумму двух интегралов, соответственно двум слагаемым в числителе, и находим их по формуле 20 таблицы интегралов и равенству (1.4)

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-\frac{1}{16}} - \frac{1}{2}\int \frac{8z}{z^2-\frac{1}{16}}dz = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 4\int \frac{2z}{z^2-\frac{1}{16}}dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\, ln\left|\frac{z-\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{4}}\right| - 2\,ln\left|z^2-\frac{1}{16}\right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx = ln\left|\frac{x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\right| - 2\,ln\left|\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right| + C =$$

$$= ln\left|\frac{x-1}{x-{}^{1}\!/_{2}}\right| - 2\,ln\left|x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right| + C.$$

Пример 23. Найти интеграл $\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{3x^2-2x+4}dx.$

Решение. Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь, поэтому сначала выделим целую часть данной функции, деля числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,6x^3-7x^2+3x-1 & 3x^2-2x+4 \\ \cline{2-2} \underline{6x^3-4x^2+8x} & 2x-1 \\ -\,-3x^2-5x-1 & \\ \underline{-3x^2+2x-4} & \\ -7x+3 & \end{array}$$

Таким образом $\dfrac{6x^3-7x^2+3x-1}{3x^2-2x+4}=2x-1+\dfrac{-7x+3}{3x^2-2x+4}$. Интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$\int\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{3x^2-2x+4}dx=\int 2xdx-\int dx+\int\frac{-7\left(x-\frac{3}{7}\right)}{3x^2-2x+4}dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^2}{2}-x-7\int\frac{x-\frac{3}{7}}{3x^2-2x+4}dx=x^2-x-7\int\frac{x-\frac{3}{7}}{3x^2-2x+4}dx.$$

Последний интеграл найдем отдельно. Для этого выделим полный квадрат $3x^2-2x+4=3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)=\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right]=$

$=3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right].$

$$\int\frac{x-\frac{3}{7}}{3x^2-2x+4}dx=\int\frac{y+\frac{1}{3}-\frac{3}{7}}{3\left(y^2+\frac{11}{9}\right)}dy=\frac{1}{3}\int\frac{y-\frac{2}{21}}{y^2+\frac{11}{9}}dy.$$

Разложим полученный интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int\frac{y-\frac{2}{21}}{y^2+\frac{11}{9}}dy=\int\frac{y}{y^2+\frac{11}{9}}dy-\frac{2}{21}\int\frac{dy}{y^2+\frac{11}{9}}.$$

$$\int\frac{ydy}{y^2+\frac{11}{9}}=\int\frac{\frac{1}{2}\cdot 2ydy}{y^2+\frac{11}{9}}=\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{y^2+\frac{11}{9}}=\frac{1}{2}ln\left|y^2+\frac{11}{9}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}ln\left|\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right|=\frac{1}{2}ln\left|x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right|.$$

Здесь мы использовали формулу (1.4).

$$\int \frac{dy}{y^2+\frac{11}{9}} = \int \frac{dy}{y^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{11/3}}\, arctg\, \frac{y}{\sqrt{11/3}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{11}}\, arctg\, \frac{3y}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}\, arctg\, \frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}\, arctg\, \frac{3x-1}{\sqrt{11}}..$$

Следовательно,

$$\int \frac{x-\frac{3}{7}}{3x^2-2x+4}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right| - \frac{2}{21}\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}\, arctg\, \frac{3x-1}{\sqrt{11}} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right| - \frac{2}{7\sqrt{11}}\, arctg\, \frac{3x-1}{\sqrt{11}}.$$

Возвращаясь к данному интегралу, окончательно получаем

$$\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{3x^2-2x+4}dx = x^2-x-7\left(\frac{1}{6}\ln\left|x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right| - \frac{2}{7\sqrt{11}}\, arctg\, \frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)+$$

$$+C = x^2-x-\frac{7}{6}\ln\left|x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right| + \frac{2}{\sqrt{11}}\, arctg\, \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C.$$

Теорема. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители $Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)$, где $p^2-4q<0$, можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{A_3}{(x-x_1)^3} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} +$$

$$+ \frac{B_3}{(x-x_2)^3} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} \qquad (1.7)$$

где $A_1,\ A_2,\ldots,A_{k_1},\ B_1,\ B_2,\ldots,B_{k_2},\ldots,C,\ D-$ некоторые действительные коэффициенты.

Действительные коэффициенты можно определить из следующих положений. Написанное равенство есть тождество, поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителе справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_1,\ A_2,\dots,A_{k_1},\ B_1,\ B_2,\dots,B_{k_2},\dots,C,\ D$. Этот метод нахождения коэффициентов называется методом неопределенных коэффициентов.

Наряду с этим для определения коэффициентов можно воспользоваться следующим замечанием: так как многочлены, получившиеся в правой и левой частях равенства, после приведения к общему знаменателю должны быть тождественно равны, то их значения равны при любых частных значениях x. Придавая x частные значения, получим уравнения для определения коэффициентов.

Пример 24. Найти интеграл $\int \frac{x+2}{x(x-3)}dx.$

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью (степень многочлена числителя, равная единице, меньше степени многочлена знаменателя, равной двум), причем знаменатель дроби разложен на не повторяющиеся множители, имеющие действительные корни.

Разложим данную дробь $\frac{x+2}{x(x-3)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{x+2}{x(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю, а затем приравняем многочлены в числителях справа и слева:

$$\frac{x+2}{x(x-3)}=\frac{^{x-3/}A}{x}+\frac{^{x/}B}{x-3}=\frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)},$$

$$x+2=A(x-3)+Bx,\quad x+2=Ax-3A+Bx.$$

Приравнивая коэффициенты при x и x° (свободный член), получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$x:1=A+B \qquad\qquad A=-\frac{2}{3},$$

$$x^\circ:2=-3A. \qquad B=1-A=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

Тогда данная дробь примет вид:

$$\frac{x+2}{x(x-3)}=\frac{-2/3}{x}+\frac{5/3}{x-3}.$$

Подставляя правую часть последнего равенства в данный интеграл, получим:

$$\int \frac{x+2}{x(x-3)}dx = \int\left(\frac{-{}^{2}\!/_{3}}{x} + \frac{{}^{5}\!/_{3}}{x-3}\right)dx = \int \frac{-{}^{2}\!/_{3}}{x}dx + \int \frac{{}^{5}\!/_{3}}{x-3}dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-3} = -\frac{2}{3}ln|x| + \frac{5}{3}ln|x-3| + C.$$

Пример 25. Найти интеграл $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx.$

Решение. Степень многочлена числителя равна двум, а знаменателя – четырем. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3\cdot(x-2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{B}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$x^2+2 = A_1(x+1)^2\cdot(x-2) + A_2(x+1)(x-2) + A_3(x-2) + B(x+1)^3.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов воспользуемся методом частных значений аргумента x, придавая ему четыре различных значения (так как требуется найти четыре коэффициента):

при $x=-1$ получим $(-1)^2+2=-3A_3,\ \ A_3=-1;$

при $x=2$: $2^2+2=27B,\ \ B=\frac{2}{9};$

при $x=1$: $1+2=-4A_1-2A_2-A_3+8B,\ \ 3=-4A_1-2A_2+1+\frac{16}{9},$

$4A_1+2A_2=-\frac{2}{9},\ \ 2A_1+A_2=-\frac{1}{9};$

при $x=0$: $2=-2A_1-2A_2-2A_3+B,\ \ 2=-2A_1-2A_2+2+\frac{2}{9},$

$2A_1+2A_2=\frac{2}{9},\ \ A_1+A_2=\frac{1}{9}.$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A_1+A_2=-\frac{1}{9}, \\ A_1+A_2=\frac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=-\frac{2}{9}, \\ A_2=\frac{1}{9}-A_1; \end{cases} \begin{cases} A_1=-\frac{2}{9}, \\ A_2=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Получили $A_1=-\frac{2}{9}$, $A_2=\frac{1}{3}$, $A_3=-1$, $B=\frac{2}{9}$.

Подынтегральная функция примет вид:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3\cdot(x-2)}=\frac{-2/9}{x+1}+\frac{1/3}{(x+1)^2}+\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{2/9}{x-2}.$$

Проинтегрируем правую часть полученного равенства, используя свойства и таблицу неопределенных интегралов:

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=-\frac{2}{9}ln|x+1|+\frac{1}{3}\int(x+1)^{-2}dx-\int(x+1)^{-3}dx+\frac{2}{9}ln|x-2|=$$

$$=-\frac{2}{9}ln|x+1|+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}-\frac{(x+1)^{-3+1}}{-3+1}+\frac{2}{9}ln|x-2|+C=$$

$$=-\frac{2}{9}ln|x+1|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{2}{9}ln|x-2|+C.$$

Пример 26. Найти интеграл $\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx.$

Решение. Разложим знаменатель правильной дроби на множители:

$$x^4+x=x(x^3+1)=x(x+1)(x^2-x+1).$$

В последнем множителе дискриминант $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0.$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Приведем к общему знаменателю обе части равенства и приравняем многочлены числителей:

$$x^3+4x^2-2x+1=A(x+1)(x^2-x+1)+Bx(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)x.$$

При $x=0$: $1=A$, $A=1$;

$x=-1$: $-1+4+2+1=-3B$, $-3B=6$, $B=-2$;

$x=1$: $1+4-2+1=2A+B+2C+2D$,

$4=2-2+2C+2D$, $C+D=2$;

$x=2$: $8+16-4+1=9A+6B+12C+6D$,

$21 = 9 - 12 + 12C + 6D,\ 12C + 6D = 24,$

$2C + D = 4.$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} C + D = 2; \\ 2C + D = 4; \end{cases} \quad (-) \quad \begin{cases} \mathrm{C} = 2, \\ \mathrm{D} = 0. \end{cases}$$

Получили $A = 1, \ \ B = -2, \ \ C = 2, \ \ D = 0.$

Тогда подынтегральная функция примет вид:

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - x + 1}.$$

Проинтегрируем правую часть последнего равенства:

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= ln|x| - 2\,ln|x+1| + \int \frac{2x}{x^2 - x + 1} dx.$$

Найдем отдельно последний интеграл. Выделим полный квадрат: $x^2 - x + 1 = \left(x^3 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$ Введем новую переменную $y = x - \frac{1}{2}, \ \ x = y + \frac{1}{2}, \ \ dx = dy, \ \ x^2 - x + 1 = y^2 + \frac{3}{4}.$

$$\int \frac{2x}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{2\left(y + \frac{1}{2}\right)}{y^2 + \frac{3}{4}} dy = \int \frac{2y + 1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy =$$

$$= \int \frac{2ydy}{y^2 + \frac{3}{4}} + \int \frac{dy}{y^2 + \frac{3}{4}}.$$

Используя равенство (1.4), получим:

$$\int \frac{2ydy}{y^2 + \frac{3}{4}} = ln\left|y^2 + \frac{3}{4}\right| = ln\left|\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right| = ln\left|x^2 - x + 1\right|.$$

$$\int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dy}{y^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} arctg \frac{y}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2y}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Тогда $\int \frac{2x}{x^2-x+1}dx = ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$ Возвращаясь к данному интегралу, окончательно получим:

$$\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx = ln|x| - 2\,ln|x+1| + ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x-7}$. 2. $\int \frac{4dx}{3-x}$. 3. $\int \frac{dx}{(x+5)^7}$. 4. $\int \frac{5dx}{(2x+1)^6}$. 5. $\int \frac{3x+1}{x+2}dx.$

6. $\int \frac{x^3}{x+1}dx.$ 7. $\int \frac{x^2-1}{x+2}dx.$ 8. $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$. 9. $\int \frac{x-5}{x^2+4x-5}dx.$

10. $\int \frac{dx}{4x-1-4x^2}$. 11. $\int \frac{18x^2+13x}{1+6x+9x^2}dx.$ 12. $\int \frac{(x-2)dx}{x(x-1)(x+2)}$.

13. $\int \frac{(x+5)dx}{x^2(x+1)(x-2)}$. 14. $\int \frac{x^2+3x+2}{x(x-1)^2(x-3)}dx.$ 15. $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+4x+5}$.

16. $\int \frac{x^3+3x-1}{2x^2-4x+7}dx.$ 17. $\int \frac{dx}{x^3+27}$. 18. $\int \frac{(x-6)dx}{(x+1)(x^2-x+2)}$.

Ответы. 1. $\ln|x-7|+C.$ 2. $-4\ln|3-x|+C.$ 3. $-\frac{1}{6(x+5)^6}+C.$

4. $-\frac{1}{2(2x+1)^5}+C.$ 5. $3x-5\ln|x+2|+C.$

6. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C.$ 7. $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+2|+C.$

8. $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$ 9. $\frac{5}{3}\ln|x+5|-\frac{2}{3}\ln|x-1|+C.$

10. $\frac{1}{4x-2}+C.$ 11. $2x+\frac{1}{9}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right|+\frac{7}{27x+9}+C.$

12. $\ln\left|\frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}\right|+C.$

13. $\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{4}{3}\ln|x+1|+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{2x}+C.$

14. $2\ln|x|-\frac{19}{3}\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{3}\ln|x-3|+C.$

15. $\ln\left|x^2+4x+5\right|-arctg\,(x+2)+C.$

16. $\frac{x^2}{4}+x+\frac{7}{4}ln\left|x^2-2x+\frac{7}{2}\right|-\frac{9}{\sqrt{10}}arctg\,\frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{\sqrt{5}}+C.$

17. $\frac{1}{27}\ln|x+3|-\frac{1}{54}\ln\left|x^2-3x+9\right|-\frac{11}{81\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}+C.$

18. $\frac{7}{4}ln\left|x^2+4x+5\right|-\frac{7}{2}ln|x+1|+\frac{9}{2}arctg\,(x+2)+C.$

1.6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\int\frac{Adx}{(x-m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ называются неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Первые два интеграла находятся следующим образом: под радикалом выделяется полный квадрат, затем основание полного квадрата обозначается новой переменной. После необходимых преобразований, выполненных над подынтегральным выражением, получаем табличные интегралы. Интегралы третьего вида подстановкой $(x-m)=\frac{1}{y}$ приводятся к виду первых двух интегралов.

Пример 27. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+3}}$.

Решение. Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:
$2x^2-6x+3=2\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)=2\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right].$

Введем новую переменную $x-\frac{3}{2}=y,$ тогда $x=y+\frac{3}{2},$ $dx=dy;$
$2x^2-6x+3=2\left(y^2-\frac{3}{4}\right).$

Данный интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+3}}=\int\frac{dy}{\sqrt{2\left(y^2-\frac{3}{4}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-\frac{3}{4}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|y+\sqrt{y^2-\frac{3}{4}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{3}{2}}\right|+C.$$

Пример 28. Найти интеграл $\int\frac{x-5}{\sqrt{x^2+10x}}dx.$

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, выделяя полный квадрат:

$$x^2+10x=\left(x^2+2\cdot x\cdot 5+25\right)-25=\left(x+5\right)^2-25.$$

Воспользуемся подстановкой $z=x+5,$ тогда $x=z-5,$ $dx=dz,$
$x^2+10x=z^2-25.$

Подставим полученные выражения в данный интеграл и преобразуем его:

$$\int\frac{x-5}{\sqrt{x^2+10x}}dx=\int\frac{z-5-5}{\sqrt{z^2-25}}dz=\int\frac{z-10}{\sqrt{z^2-25}}dz=\int\frac{zdz}{\sqrt{z^2-25}}-\int\frac{10dz}{\sqrt{z^2-25}}.$$

Найдем отдельно каждый интеграл. Для нахождения первого интеграла воспользуемся методом замены переменной:

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{z^2-25}}=\left|\begin{array}{c} z^2-25=y,\ dy=d\left(z^2-25\right) \\ dy=\left(z^2-25\right)'dz,\ dy=2zdz,\ zdz=\frac{1}{2}dy \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{y}}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^{1/2}}=\frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{y}=\sqrt{z^2-25}.$$

Рассмотрим второй интеграл

$$\int\frac{10dz}{\sqrt{z^2-25}}=10\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-25}}=10\ln\left|z+\sqrt{z^2-25}\right|.$$

Возвращаясь к данному интегралу и исходной переменной интегрирования x, получаем:

$$\int\frac{x-5}{\sqrt{x^2+10x}}dx=\sqrt{z^2-25}-10\,ln\left|z+\sqrt{z^2-25}\right|+C=\sqrt{(x+5)^2-25}-$$

$$-10\,ln\left|x+5+\sqrt{(x+5)^2-25}\right|+C=\sqrt{x^2+10x}-10\,ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x}\right|+C.$$

Пример 29. Найти интеграл $\int\frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx.$

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен $-x^2+4x+5=-\left(x^2-4x-5\right)=-\left[x^2-2\cdot x\cdot 2+4-4-5\right]=-\left[(x-2)^2-9\right]=$
$=-(x-2)^2+9=9-(x-2)^2.$

Введем новую переменную $y=x-2,$ тогда $x=y+2,$ $dx=dy,$ $-x^2+4x+5=9-y^2.$

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx=\int\frac{5(y+2)+3}{\sqrt{9-y^2}}dy=\int\frac{5y+13}{\sqrt{9-y^2}}dy=$$

$$=\int\frac{5ydy}{\sqrt{9-y^2}}+\int\frac{13dy}{\sqrt{9-z^2}}.$$

Рассмотрим каждый интеграл отдельно.

$$\int \frac{5ydy}{\sqrt{9-y^2}} = \left| \begin{array}{c} 9-y^2=z,\ dz=d\left(9-y^2\right),\ dz=\left(9-y^2\right)'dy, \\ dz=-2ydy,\ ydy=-\frac{1}{2}dz \end{array} \right| = \int \frac{5\cdot\left(-\frac{1}{2}dz\right)}{\sqrt{z}} =$$

$$= -\frac{5}{2}\int \frac{dz}{z^{1/2}} = -\frac{5}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz = -\frac{5}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{z^{1/2}}{1/2} = -5\sqrt{z} = -5\sqrt{9-y^2}.$$

$$\int \frac{13dy}{\sqrt{9-y^2}} = 13\int \frac{dy}{\sqrt{3^2-y^2}} = 13 arcsin\frac{y}{3}.$$

Исходный интеграл будет равен

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx = -5\sqrt{9-y^2} + 13 arcsin\frac{y}{3} + C.$$

Возвращаясь к данной переменной интегрирования x, окончательно получим:

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx = -5\sqrt{9-\left(x-2\right)^2} + 13 arcsin\frac{x-2}{3} + C =$$
$$= -5\sqrt{-x^2+4x+5} + 13 arcsin\frac{x-2}{3} + C.$$

Пример 30. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\left(x+2\right)\sqrt{x^2+2x}}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $x+2=\frac{1}{y}$, тогда

$$x=\frac{1}{y}-2,\ dx=-\frac{1}{y^2}dy,\ x^2+2x=\left(\frac{1}{y}-2\right)^2+2\left(\frac{1}{y}-2\right)=\frac{1}{y^2}-\frac{4}{y}+4+\frac{2}{y}-4=$$
$$=\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}=\frac{1-2y}{y^2}.$$

Получим интеграл:

$$\int \frac{dx}{\left(x+2\right)\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{-\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1-2y}{y^2}}} = -\int \frac{dy}{y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\sqrt{\frac{1-2y}{y^2}}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1-2y}}.$$

Воспользуемся еще раз подстановкой: $1-2y=z$, тогда $y=\frac{1}{2}(1-z)$, $dy=-\frac{1}{2}dz.$ Подставляя полученные выражения в последний интеграл, получим:

$$-\int\frac{dy}{\sqrt{1-2y}}=-\int\frac{-\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=z^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{z}+C=\sqrt{1-2y}+C.$$

Вернемся к данному интегралу и исходной переменной интегрирования x:

$$\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}=\sqrt{1-2y}+C=\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{x+2}}+C=\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}+C=$$

$$=\sqrt{\frac{x+2-2}{x+2}}+C=\sqrt{\frac{x}{x+2}}+C.$$

Если подынтегральная функция содержит иррациональности разных показателей корней, тогда подстановка $x=t^s$, где $s-$ наименьшее общее кратное показателей корней, сводит интеграл к интегралу от рациональной функции.

Пример 31. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

Решение. Воспользуемся методом подстановки, обозначив $(1-2x)=y^4$, так как $4-$ наименьшее общее кратное показателей корней два и четыре, тогда $d(1-2x)=d(y^4)$, $(1-2x)'dx=(y^4)'dy$,

$$-2dx=4y^3dy,\ \ dx=-2y^3dy,\ \ \sqrt{1-2x}=y^2,\ \ \sqrt[4]{1-2y}=y.$$

Подставляя в данный интеграл, получим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}=\int\frac{-2y^3dy}{y^2-y}=-2\int\frac{y^3dy}{y(y-1)}=-2\int\frac{y^2dy}{y-1}.$$

Получили подынтегральную функцию, которая является неправильной рациональной дробью. Выделим целую часть, а для этого разделим многочлен числителя на многочлен знаменателя:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,\begin{array}{r} y^2 \\ y^2 - y \end{array} & y-1 \\ \cline{2-2}
\hline
-\,\begin{array}{r} y \\ y-1 \end{array} & y+1 \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

Таким образом $\dfrac{y^2}{y-1} = y+1+\dfrac{1}{y-1}.$

Подставим в последний интеграл полученную функцию и проинтегрируем:

$$
-2\int\frac{y^2dy}{y-1} = -2\int\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy = -2\int ydy - 2\int dy - 2\int\frac{dy}{y-1} =
$$

$$
= -2\cdot\frac{y^2}{2} - 2y - 2\ln|y-1| + C = -y^2 - 2y - 2\ln|y-1| + C.
$$

Возвращаясь к данному интегралу и переменной интегрирования x, получим:

$$
\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = -\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^2 - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right| + C =
$$

$$
= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x^{-1}}\right| + C.
$$

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx.$ 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$ 3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ 4. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx.$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x}}.$ 6. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}.$ 7. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{12x-2-9x^2}}.$ 9. $\displaystyle\int\frac{(3x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}.$ 10. $\displaystyle\int\frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}.$

11. $\displaystyle\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}.$ 12. $\displaystyle\int\frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}.$ 13. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}.$

14. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Ответы. 1. $2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right)+C$.

2. $2arctg\sqrt{x+1}+C$. 3. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$.

4. $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x}{2}}+C$. 5. $-2arctg\sqrt{1-x}+C$.

6. $\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C$. 7. $C-\ln\left|1-x+\sqrt{5-2x+x^2}\right|$.

8. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$. 9. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}$.

10. $\frac{61}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.

11. $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$. 12. $\sqrt{x^2-6x+1}+C$.

13. $\ln|x|-\ln\left|1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}\right|+C$.

14. $\ln\left|x+\sqrt{1+x+x^2}\right|-\ln\left|2+x+\sqrt{1+x+x^2}\right|+C$.

1.7. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложение, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x;\cos x)$, где R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x;\cos x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\,\frac{x}{2}=t$, которая называется универсальной.

Действительно, $\sin x=\frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$x = 2arctgt,\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Поэтому $\int R(\sin x;\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt =$

$= \int R_1(t)dt,$ где $R_1(t)$ – рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он всегда приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x;\cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, то есть $R(-\sin x;\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x;\cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, то есть $R(\sin x;-\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x;\cos x)$ четна относительно $\sin x$ и $\cos x$: $R(-\sin x;-\cos x) = R(\sin x;\cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой

$$tgx = t,\quad \sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = arctg\ t,\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Для нахождения интегралов типа $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$ используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t,$ если n – целое положительное нечетное число;

2) подстановка $\cos x = t,$ если m – целое положительное нечетное число;

3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$ $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$ если m и n – целые неотрицательные четные числа;

4) подстановка $tgx = t,$ если $m+n$ – есть четное отрицательное целое число.

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx dx,\quad \int \cos ax \cos bx dx,\quad \int \sin ax \sin bx dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Пример 32. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

Решение. Воспользуемся универсальной подстановкой $t = tg\,\frac{x}{2}$.

Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{10t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+10t+3-3t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt\cdot(1+t^2)}{(1+t^2)\cdot(10t+6)} = \int \frac{2dt}{2(5t+3)} = \int \frac{dt}{5t+3} = \frac{1}{5}\ln|5t+3| + C.$$

Возвращаясь к переменной интегрирования *x*, получим $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x} = \frac{1}{5}\ln\left|5tg\,\frac{x}{2}+3\right| + C.$

Пример 33. Найти интеграл $\int \sin^5 x dx$.

Решение. Так как $R(-\sin x;\cos x) = (-\sin x)^5 = -\sin^5 x = -R(\sin x;\cos x)$, то полагаем $\cos x = t$, $\sin^5 x = \sin^4 x\cdot\sin x = (\sin^2 x)^2\cdot\sin x = (1-\cos^2 x)^2\sin x$, $dt = -\sin x dx$, тогда $\sin x dx = -dt$.

Данный интеграл примет вид:

$$\int \sin^5 x dx = \int (1-\cos^2 x)^2\cdot\sin x dx = \int (1-t^2)^2\cdot(-dt) =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4)dt = -\int dt + 2\int t^2 dt - \int t^4 dt =$$

$$= -t + 2\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{2}{3}t^3 - t - \frac{t^5}{5} + C.$$

Возвращаясь к данной переменной интегрирования x, получим:

$$\int \sin^5 x dx = \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Пример 34. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

Решение. Так как $R(\sin x; -\cos x) = \sin^2 x(-\cos x)^3 =$ $= \sin^2 x(-\cos^3 x) = -\sin^2 x \cos^3 x = -R(\sin x; \cos x)$, то воспользуемся подстановкой $\sin x = t, \quad dt = \cos x dx$.

$$\sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\cos x dx =$$
$$= t^2(1 - t^2)dt = (t^2 - t^4)dt.$$

Тогда получим интеграл

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int (t^2 - t^4)dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Пример 35. Найти интеграл $\int \frac{1}{\cos^6 x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{\cos^6 x} = R(\sin x; \cos x)$, $R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^6} = \frac{1}{\cos^6 x} = R(\sin x; \cos x)$. Воспользуемся подстановкой $tgx = t$, тогда $\cos^6 x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^6 = \frac{1}{(1+t^2)^3}$, $\frac{1}{\cos^6 x} = (1+t^2)^3$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Получим интеграл

$$\int \frac{1}{\cos^6 x} = \int (1+t^2)^3 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int (1+t^2)^2 dt = \int (1 + 2t^2 + t^4)dt =$$
$$= \int dt + 2\int t^2 dt + \int t^4 dt = t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + C.$$

Переходя к данной переменной интегрирования x, получим

$$\int \frac{1}{\cos^6 x}dx = tgx + \frac{2}{3}tg^3 x + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

Пример 36. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 xdx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию

$$\sin^4 x \cdot \cos^2 x = \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin^2 x \cdot \left(\sin x \cos x\right)^2 =$$

$$= \sin^2 x \cdot \left(\frac{2\sin x \cos x}{2}\right)^2 = \sin^2 x \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = \sin^2 x \cdot \frac{\sin^2 2x}{4}.$$

Воспользуемся формулой понижения порядка для первого множителя:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{8}\left(\sin^2 2x - \sin^2 2x \cos 2x\right).$$

Получили интеграл:

$$\int \sin^4 x \cos^2 xdx = \frac{1}{8}\int \left(\sin^2 2x - \sin^2 2x \cos 2x\right)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx -$$

$$-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2xdx.$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{16}\int \left(1-\cos 4x\right)dx = \frac{1}{16}\int dx -$$

$$-\frac{1}{16}\int \cos 4xdx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\int \cos 4x \cdot \frac{1}{4}d\left(4x\right) = \frac{1}{16}x -$$

$$-\frac{1}{64}\int \cos 4xd\left(4x\right) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x.$$

Во втором интеграле положим $\sin 2x = z,$ тогда $dz = d\left(\sin 2x\right) = 2\cos 2xdx,$ $\cos 2xdx = \frac{1}{2}dz.$ $\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2xdx =$

$$= \frac{1}{8}\int z^2 \cdot \frac{1}{2}dz = \frac{1}{16}\int z^2 dz = \frac{1}{16} \cdot \frac{z^3}{3} = \frac{1}{48}\sin^3 2x.$$

Подставляя полученные результаты, имеем $\int \sin^4 x \cos^2 xdx =$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Пример 37. Найти интеграл $\int \sin 3x \cdot \sin 2x dx$.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$.

$$\int \sin 3x \cdot \sin 2x dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int(\cos x - \cos 5x)dx = \frac{1}{2}\int \cos x dx - \frac{1}{2}\int \cos 5x dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int \cos 5x \cdot \frac{1}{5}d(5x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\int \cos 5x d5x =$$
$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

Пример 38. Найти интеграл $\int \sin 4x \cos 7x dx$.

Решение. Применяя формулу

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$ получим $\int \sin 4x \cos 7x dx =$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\sin(4x-7x) + \sin(4x+7x)\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin(-3x) + \sin 11x\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin(-3x)dx + \frac{1}{2}\int \sin 11x dx = -\frac{1}{2}\int \sin 3x \cdot \frac{1}{3}d(3x) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \sin 11x \cdot \frac{1}{11}d(11x) = -\frac{1}{6}\int \sin 3x d3x + \frac{1}{22}\int \sin 11x d(11x) =$$
$$= \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{22}\cos 11x + C.$$

Пример 39. Найти интеграл $\int \cos 5x \cos 9x dx$.

Решение. Используя формулу $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$ получим

$$\int \cos 5x \cos 9x dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(5x-9x) + \cos(5x+9x)\right) = \frac{1}{2}\int(\cos(-4x))dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \cos 14x dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x dx + \frac{1}{2}\int \cos 14x dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x \cdot \frac{1}{4}d(4x) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \cos 4x \cdot \frac{1}{14}d(14x) = \frac{1}{8}\int \cos 4x d(4x) + \frac{1}{28}\int \cos 14x d(14x) = \frac{1}{8}\sin 4x +$$
$$+ \frac{1}{28}\sin 14x + C.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int \sin^2 3x dx$. 2. $\int cos^4 x dx$. 3. $\int \sin^3 x dx$. 4. $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$.

5. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$. 6. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$. 7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

8. $\int tg^3 x dx$. 9. $\int \frac{1}{\cos^8 x} dx$. 10. $\int \sin x \cdot \sin 3x dx$.

11. $\int \cos 4x \cdot \cos 7x dx$. 12. $\int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4} dx$. 13. $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$.

14. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$. 15. $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2}$.

Ответы. 1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C$. 2. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

3. $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$. 4. $\frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x + C$. 5. $\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

6. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$. 7. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 x} + C$.

8. $\frac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$. 9. $\frac{tg^7 x}{7} + \frac{3tg^5 x}{5} + tg^3 x + tgx + C$.

10. $-\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. 11. $\frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin 3x}{6} + C$.

12. $-\frac{\cos x}{2} + \cos\frac{x}{2} + C$. 13. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 2}{2tg\frac{x}{2} - 1}\right| + C$.

14. $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right) + C$. 15. $\frac{1}{2}tg\frac{x}{2} + \frac{1}{6}tg^3\frac{x}{2} + C$.

Индивидуальное домашнее задание по теме «Неопределенный интеграл»

Найти интегралы:

Вариант 1.

1. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt[4]{x}} dx$. 2. $\int \frac{3x + 1}{3x - 2} dx$. 3. $\int (4 - 3x)e^{-3x} dx$.

4. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. 6. $\int \frac{x^3+1}{x^2+x}\,dx$.

7. $\int \frac{6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$. 8. $\int \frac{4x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx$.

Вариант 2.

1. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+7)\,dx$. 2. $\int 4^{2x-1}\,dx$. 3. $\int (3x+4)e^{3x}\,dx$.

4. $\int (x^2-4)\cos 5x\,dx$. 5. $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$. 6. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}\,dx$.

7. $\int \frac{6x^2+13x+8}{x(x+2)^2}\,dx$. 8. $\int \frac{4x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

Вариант 3.

1. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$. 3. $\int (4-16x)\sin 4x\,dx$.

4. $\int (x^2+4x+3)\cos x\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$. 6. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}\,dx$.

7. $\int \frac{-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^2}\,dx$. 8. $\int \frac{7x^2+7x-1}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$.

Вариант 4.

1. $\int \frac{\left(\frac{1}{x}-5\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx$. 2. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$. 3. $\int (1-6x)e^{2x}\,dx$.

4. $\int (x+2)^2\cos 7x\,dx$. 5. $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}\,dx$. 6. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}\,dx$.

7. $\int \frac{6x^2+14x+10}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$. 8. $\int \frac{4x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx$.

Вариант 5.

1. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx$. 2. $\int x\cdot 7^{x^2}\,dx$. 3. $\int \ln(4x^2+1)\,dx$.

4. $\int (x^2+7x+12)\cos 6x\,dx$. 5. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$. 6. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}\,dx$.

7. $\int \frac{-6x^2+11x-10}{(x-2)(x+2)^2}\,dx$. 8. $\int \frac{6x^2+9x+6}{(x+1)(x^2+2x+3)}\,dx$.

Вариант 6.

1. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$ 2. $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{7}}.$ 3. $\int arctg\sqrt{6x-1}dx.$

4. $\int(2x^2+4x-7)\cos 2xdx.$ 5. $\int\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx.$ 6. $\int\frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx.$

7. $\int\frac{6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^2}dx.$ 8. $\int\frac{11x^2+16x+10}{(x+2)(x^2+2x+3)}dx.$

Вариант 7.

1. $\int\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{3x}}dx.$ 2. $\int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ 3. $\int e^{-3x}(2-9x)dx.$

4. $\int(9x^2+9x+11)\cos 8xdx.$ 5. $\int\frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}.$

6. $\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx.$ 7. $\int\frac{6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^2}dx.$

8. $\int\frac{6x^2+5x-1}{(x+1)(x^2+2)}dx.$

Вариант 8.

1. $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx.$ 2. $\int x\cdot\sin(1-x^2)dx.$ 3. $\int(6x+6)\cos 2xdx.$

4. $\int(3x^2+16x+17)\cos 4xdx.$ 5. $\int\frac{dx}{x^2+4x+9}.$

6. $\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$ 7. $\int\frac{6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^2}dx.$

8. $\int\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx.$

Вариант 9.

1. $\int\left(\frac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)^2dx.$ 2. $\int 2^{\sin x}\cdot\cos xdx.$ 3. $\int(\sqrt{2}\cdot x-3)\cos 2xdx.$

4. $\int(3-7x^2)\cos 9xdx.$ 5. $\int\frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx.$ 6. $\int\frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx.$

7. $\int\frac{6x^2+7x+2}{x(x+1)^2}dx.$ 8. $\int\frac{9x^2+21x+21}{(x+3)(x^2+3)}dx.$

Вариант 10.

1. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt[3]{x}}dx$. 2. $\int \frac{x^3dx}{\cos^2 x^4}$. 3. $\int (2x-5)\cos 4xdx$.

4. $\int (3x+5)^2 \sin xdx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$. 6. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-1)(x-3)(x-2)}dx$.

7. $\int \frac{-6x^2+13x+8}{x(x-2)^2}dx$. 8. $\int \frac{x^2+8x+8}{(x+2)(x^2+4)}dx$.

Вариант 11.

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$. 2. $\int e^{\sin^2 x}\cdot \sin 2xdx$. 3. $\int (x+5)\sin 3xdx$.

4. $\int (3-7x^2)\cos 2xdx$. 5. $\int \frac{x+1}{x^2-4x+3}dx$. 6. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx$.

7. $\int \frac{-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^2}dx$. 8. $\int \frac{5x^2+12x+4}{(x+2)(x^2+1)}dx$.

Вариант 12.

1. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$. 3. $\int arctg\sqrt{4x-1}dx$.

4. $\int (1-8x^2)\cos 7xdx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. 6. $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx$.

7. $\int \frac{-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^2}dx$. 8. $\int \frac{-4x^2-16x-12}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx$.

Вариант 13.

1. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}dx$. 2. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 3. $\int (4x-2)\cos 2xdx$.

4. $\int (x^2-3x)\sin 5xdx$. 5. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$. 6. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$.

7. $\int \frac{-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^2}dx$. 8. $\int \frac{13x^2-13x+1}{(x-2)(x^2-x+1)}dx$.

Вариант 14.

1. $\int (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})dx$. 2. $\int e^{-\left(x^2+1\right)}\cdot xdx$. 3. $\int (6x-2)e^{3x}dx$.

4. $\int (x^2+2x+1)\sin 4x\,dx$. 5. $\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+7}$. 6. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}dx$.

7. $\int \frac{6x^2+2x+3}{(x+2)x^2}dx$. 8. $\int \frac{7x^2+x-46}{(x-1)(x^2+9)}dx$.

Вариант 15.

1. $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$. 2. $\int 5^{3x+2}\cdot dx$. 3. $\int \ln(x^2-3)dx$.

4. $\int (x^2-3x+2)\sin x\,dx$. 5. $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3}dx$. 6. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$.

7. $\int \frac{9x^2+10x+2}{(x-1)(x+2)^2}dx$. 8. $\int \frac{24x^2+20x-28}{(x+3)(x^2+2x+2)}dx$.

Вариант 16.

1. $\int \frac{5x^8+1}{x^4}dx$. 2. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$. 3. $\int (2-x)\sin 2x\,dx$.

4. $\int (x^2-5x+6)\cos x\,dx$. 5. $\int \frac{x-1}{x^2+4x+7}dx$. 6. $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx$.

7. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)x^2}dx$. 8. $\int \frac{3x^2+3x+2}{(x+5)(x^2+1)}dx$.

Вариант 17.

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}}dx$. 2. $\int \left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$. 3. $\int e^{-2x}(4x-3)dx$.

4. $\int (x^2+6x+9)\sin 5x\,dx$. 5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. 6. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$.

7. $\int \frac{6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^2}dx$. 8. $\int \frac{11x^2+21x+21}{(x-4)(x^2+9)}dx$.

Вариант 18.

1. $\int \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^3}{\sqrt{2x}}dx$. 2. $\int \frac{arctg\,\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$. 3. $\int arcctg\sqrt{2x-1}dx$.

4. $\int (1-5x^2)\sin 3x\,dx$. 5. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$. 6. $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$.

7. $\int \frac{6x^2+5x}{(x+2)(x-3)^2}dx.$ 8. $\int \frac{x^2+x+3}{(x-6)(x^2+x+1)}dx.$

Вариант 19.

1. $\int \frac{(x^2+2)(x^2-1)}{\sqrt[4]{x^3}}dx.$ 2. $\int \frac{xdx}{x^2-4}.$ 3. $\int arctg\sqrt{5x-1}dx.$

4. $\int (x^2+35)\sin 8xdx.$ 5. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+6}}dx.$ 6. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx.$

7. $\int \frac{6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^2}dx.$ 8. $\int \frac{4x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2)}dx.$

Вариант 20.

1. $\int \left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$ 2. $\int \frac{2x+5}{2x-1}dx.$ 3. $\int (3x-2)\cos 5xdx.$

4. $\int (3x-x^2)\sin 4xdx.$ 5. $\int \frac{3x+2}{2x^2+x+5}dx.$ 6. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{x^2+5x}dx.$

7. $\int \frac{6x^2+5x+4}{(x-2)(x-3)}dx.$ 8. $\int \frac{7x^2+7x+9}{(x+1)(x^2+x+2)}dx.$

Вариант 21.

1. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$ 2. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx.$ 3. $\int (4x+7)\cos 3xdx.$

4. $\int (x+1)\ln^2(x+1)dx.$ 5. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+3x-1}}dx.$

6. $\int \frac{-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}dx.$ 7. $\int \frac{6x^2+4x+24}{(x-1)(x+2)^2}dx.$

8. $\int \frac{4x^2+4x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx.$

Вариант 22.

1. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$ 2. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx.$ 3. $\int (3-3x)\cos 5xdx.$

4. $\int x\ln^2 xdx.$ 5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$ 6. $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx.$

7. $\int \frac{6x^2+14x+4}{(x+1)(x-1)^2}dx$. 8. $\int \frac{3x^2+2x+6}{(x+2)(x^2+3)}dx$.

Вариант 23.

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)xdx$. 2. $\int (2-9x)^9 dx$. 3. $\int (2-3x)\sin 2xdx$.

4. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$. 5. $\int \frac{xdx}{3x^2+2x+8}$. 6. $\int \frac{2x^3-8}{x(x-2)(x+2)}dx$.

7. $\int \frac{6x^2+18x-4}{(x-3)(x+1)^2}dx$. 8. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x-3)(x^2+1)}dx$.

Вариант 24.

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^3 dx$. 2. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$. 3. $\int (3x+4)\sin 5xdx$.

4. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. 5. $\int \frac{5x+2}{x^2+4x+6}dx$. 6. $\int \frac{4x^3+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx$.

7. $\int \frac{-6x^2+14x-4}{(x+5)x^2}dx$. 8. $\int \frac{x^2+2x-2}{(x+6)(x^2-x+1)}dx$.

Вариант 25.

1. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)^2 x^2dx$. 2. $\int \frac{5}{tg\,\frac{x}{5}}dx$. 3. $\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3xdx$.

4. $\int e^{2x}\cdot \sin xdx$. 5. $\int \frac{dx}{x^2+6x+11}$. 6. $\int \frac{3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx$.

7. $\int \frac{6x^2+10x+12}{(x+3)x^2}dx$. 8. $\int \frac{5x^2+5x-7}{(x-6)(x^2+4)}dx$.

Вариант 26.

1. $\int \frac{(1-\sqrt{x})(x+1)}{\sqrt{x}}dx$. 2. $\int \sin^2 xdx$. 3. $\int (2x-3)2^{1-2x}dx$.

4. $\int e^{-3x}\cdot \cos xdx$. 5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$. 6. $\int \frac{2x^3+20}{x(x-4)(x+5)}dx$.

7. $\int \frac{6x^2+15x+2}{(x-4)(x-1)^2}dx$. 8. $\int \frac{3x^2+x-4}{(x+1)(x^2+3x+4)}dx$.

Вариант 27.

1. $\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{2\sqrt[3]{x}}dx.$ 2. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx.$ 3. $\int (2-x)5^{6x}dx.$ 4. $\int e^x\cdot\cos 2x dx.$

5. $\int \frac{1-2x}{5x^2+5x+4}dx.$ 6. $\int \frac{-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}dx.$ 7. $\int \frac{-6x^2+7x-4}{(x-1)^2\cdot(x+4)}dx.$

8. $\int \frac{2x^2+x+1}{x(x^2+2x+2)}dx.$

Вариант 28.

1. $\int \frac{(x^3+3x)^2}{\sqrt{x}}dx.$ 2. $\int \frac{3dx}{\sqrt{5x^2-7}}.$ 3. $\int \left(1-\frac{x}{3}\right)3^{x+2}dx.$

4. $\int e^{5x}\cdot\sin x dx.$ 5. $\int \frac{x+3}{1-x-3x^2}dx.$ 6. $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x+2)}dx.$

7. $\int \frac{-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^2}dx.$ 8. $\int \frac{x+4}{(x+2)(x^2+2)}dx.$

Вариант 29.

1. $\int \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)^3}{x}dx.$ 2. $\int \frac{4x^3}{x^8+5}dx.$ 3. $\int (x+1)\sin(x+1)dx.$

4. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx.$ 5. $\int \frac{4x-8}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx.$ 6. $\int \frac{2x^3-9}{x(x-1)(x+3)}dx.$

7. $\int \frac{6x^2-10x+52}{(x-2)x^2}dx.$ 8. $\int \frac{7x^2+12x+6}{x(x^2+1)}dx.$

Вариант 30.

1. $\int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})(\sqrt{x}+1)}{x}dx.$ 2. $\int tg\sqrt[3]{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$ 3. $\int \frac{x}{2}\cdot 9^{2-x}dx.$

4. $\int x^2e^{5x}dx.$ 5. $\int \frac{5x-10}{x^2-7x+13}dx.$ 6. $\int \frac{2x^3-7x}{x(x-3)(x+1)}dx.$

7. $\int \frac{-6x^2+13x-6}{(x-5)x^2}dx.$ 8. $\int \frac{3x^2+3x+2}{(x+3)(x^2+2x+3)}dx.$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы и его геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Выполним следующие действия:

1) с помощью точек $x_0 = a_1,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным способом на n частичных отрезков длиною $\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \ \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$;

2) в каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i],\ i = 1,2,\ldots,n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1} x_i]$ и вычислим значение функции в ней, то есть величину $f(c_i)$;

3) умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину Δx_i соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\Delta x_i$;

4) составим сумму S_n всех таких произведений

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ . \qquad (2.1)$$

Сумма вида (2.1) называется интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Обозначим через α длину наибольшего частичного отрезка: $\alpha = \max \Delta x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$;

5) найдем предел интегральной суммы (2.1), когда $n \to \infty$ так, что $\alpha \to 0$.

Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \alpha\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{2.2}$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, отрезок $[a;b]$ – областью (отрезком) интегрирования.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на этом отрезке.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

Непрерывность функции является достаточным условием её интегрируемости.

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x) \geq 0$, снизу – осью Ox, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$.

2.2. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – какая-либо её первообразная на $[a;b]$ $(F'(x) = f(x))$, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

Равенство (2.3) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Если ввести обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, то формулу Ньютона-Лейбница (2.3) можно переписать так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Формула Ньютона-Лейбница дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ надо найти её первообразную функцию $F(x)$ (в этом состоит связь определенного интеграла с неопределенным) и взять разность $F(b)-F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a;b]$.

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла, считая подынтегральную функцию интегрируемой на отрезке $[a;b]$.

1. Если c – постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx, \tag{2.4}$$

то есть постоянный множитель c можно выносить за знак определенного интеграла.

2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, тогда интегрируема на $[a;b]$ их алгебраическая сумма и

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx, \tag{2.5}$$

то есть интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов. Это свойство распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых.

3. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла изменяется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{2.6}$$

4. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования (интеграл в точке) равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{2.7}$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $a < c < b,$ то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{2.8}$$

то есть интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка. Это свойство называют аддитивностью определенного интеграла. Кроме того, свойство справедливо при любом расположении точек a,b,c (считаем, что функция $f(x)$ интегрируема на большем из получающихся отрезков).

6. «Теорема о среднем». Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{2.9}$$

7. Если функция $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a;b]$, где $a < b,$ то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет тот же знак, что и функция. Так, если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

8. Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a;b]$ $(a < b)$ можно интегрировать. Так, если $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx.$$

9. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{2.10}$$

10. Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx; \ a < b. \tag{2.11}$$

11. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом, то есть

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x). \qquad (2.12)$$

Это означает, что определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции.

2.3. Основные методы интегрирования

Согласно формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ при вычислении определенного интеграла надо сначала найти первообразную $F(x)$ или неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$, а затем вычислить разность $F(b) - F(a)$ значений первообразной, поэтому таблица неопределенных интегралов, указанная в пункте 1.3. справедлива и для определенных интегралов.

Метод непосредственного интегрирования в определенном интеграле основывается на тождественных преобразованиях подынтегральной функции.

Пример 40. Вычислить интеграл $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^2 dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, используя тождество квадрат суммы двух слагаемых:

$$\int_0^1 (1+\sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 (1+2\sqrt{x}+x)dx = \int_0^1 dx + 2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_0^1 xdx =$$

$$= x\Big|_0^1 + 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = 1-0+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2} - 0 = 1 + \frac{4}{3} - 0 + \frac{1}{2} = \frac{17}{16}.$$

Пример 41. Вычислить интеграл $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$

Решение. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$

Пример 42. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{e}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

Пример 43. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{2} \frac{x+3}{x^2+4} dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию. Для этого числитель дроби почленно разделим на знаменатель:

$$\frac{x+3}{x^2+4} = \frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4}.$$

Используя свойство 2 определенного интеграла, получим

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{x+3}{x^2+4} dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^2+4} + \int\limits_{0}^{2} \frac{3dx}{x^2+4}.$$

Рассмотрим каждый интеграл отдельно. Умножим и разделим числитель первой подынтегральной функции на 2:

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^2+4} = \int\limits_{0}^{2} \frac{\frac{1}{2} 2xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2} \frac{2xdx}{x^2+4}.$$

Согласно соотношению $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, получим

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \ln\left|x^2+4\right| \Big|_{0}^{2} = \frac{1}{2} \ln\left|2^2+4\right| - \frac{1}{2} \ln|0+4| = \frac{1}{2} \ln 8 - \frac{1}{2} \ln 4 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{8}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

Во втором интеграле воспользуемся свойством 1:

$$\int_0^2 \frac{3dx}{x^2+4} = 3\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2^2} = 3\cdot\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{3}{2}\,arctg\,\frac{2}{2} - \frac{3}{2}\,arctg\,0 =$$

$$= \frac{3}{2}\,arctg 1 - 0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

Значит, данный интеграл равен

$$\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}\,dx = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{8}.$$

При вычислении определенных интегралов широко используются метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b b(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема. Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha;\beta]$;

2) множеством значений функций $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок $[a;b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a,\ \ \varphi(\beta) = b,$ тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.13)$$

Формула (2.13) называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Пример 45. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx.$

Решение. Введем подстановку $1+\ln x = z,$ тогда $dz = d(1+\ln x),$ $dz = (1+\ln x)'dx,$ $dz = \frac{1}{x}dx;$ при $x=1$ $z = 1+\ln 1 = 1,$ при $x=2$ $z = 1+\ln 2.$ Получим интеграл $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int\limits_1^{1+\ln 2}\sqrt{z}dz = \int\limits_1^{1+\ln 2} z^{\frac{1}{2}}dz =$

$$= \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^{1+\ln 2} = \frac{2z^{3/2}}{3}\Bigg|_1^{1+\ln 2} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+\ln 2)^3}-\sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+\ln 2)^3}-1\right).$$

Пример 46. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3 x\cdot\sin 2xdx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию $\int\limits_0^{\pi/3}\cos^3 x\sin 2xdx = \int\limits_0^{\pi/3}\cos^3 x\cdot 2\sin x\cos xdx = 2\int\limits_0^{\pi/3}\cos^4 x\sin xdx.$

Обозначим $\cos x = y,$ тогда $dy = d(\cos x) = (\cos x)'dx = -\sin xdx,$ $\sin xdx = -dy;$ при $x=0$ $y=1,$ при $x=\frac{\pi}{3}$ $y=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$ Подставляя полученные результаты в данный интеграл, получим

$$2\int\limits_0^{\pi/3}\cos^4 x\sin xdx = 2\int\limits_1^{1/2} y^4\cdot(-dy) = -2\int\limits_1^{1/2} y^4dy = 2\int\limits_{1/2}^{1} y^4dy = 2\cdot\frac{y^5}{5}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{32}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{31}{32} = \frac{31}{80}.$$

Пример 47. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}.$

Решение. Введем подстановку $z = 3x+4,$ тогда $dz = d(3x+4) = (3x+4)'dx = 3dx,$ $dx = \frac{1}{3}dz;$ при $x = 1$ $z = 3(-1)+4 = 1,$ при $x=7$ $z = 3\cdot 7+4 = 25.$ Тогда получим

$$\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=\int_{1}^{25}\frac{\frac{1}{3}dx}{\sqrt{z}}=\frac{1}{3}\int_{1}^{25}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{3}\cdot\left.\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_{1}^{25}=$$

$$=\frac{2}{3}\left.z^{\frac{1}{2}}\right|_{1}^{25}=\frac{2}{3}\left.\sqrt{z}\right|_{1}^{25}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{25}-1\right)=\frac{2}{3}\left(5-1\right)=\frac{8}{3}.$$

Пример 48. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$.

Решение. Пусть $e^{x}=t$, $dt=d\left(e^{x}\right)=\left(e^{x}\right)'dx=e^{x}dx$; при $x=\ln 2$ $t=e^{\ln 2}=2$, при $x=\ln 3$ $t=e^{\ln 3}=3$;

$$\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{1}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}.$$

Данный интеграл примет вид:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{x}dx}{1+e^{2x}}=\int_{2}^{3}\frac{dx}{1+t^{2}}=\left.arctgt\right|_{2}^{3}=arctg3-arctg2\ .$$

Пример 49. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. Заменяя переменную при помощи подстановки $z=tg\,\frac{x}{2}$, найдем $\cos x=\dfrac{1-tg^{2}\frac{x}{2}}{1+tg^{2}\frac{x}{2}}=\dfrac{1-z^{2}}{1+z^{2}}$, $x=2arctgz,$ $dx=2\cdot\dfrac{dz}{1+z^{2}}$; при $x=0$ $z=0,$ при $x=\dfrac{\pi}{2}$ $z=tg\,\dfrac{\pi}{4}=1.$

Подставляя, получим

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^1\frac{2\cdot\dfrac{dz}{1+z^2}}{2+\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}=2\int_0^1\frac{dz\cdot(1+z^2)}{(1+z^2)(2+2z^2+1-z^2)}=$$

$$=2\int_0^1\frac{dz}{3+z^2}=2\int_0^1\frac{dz}{(\sqrt{3})^2+z^2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{z}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{0}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 50. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{5\cos xdx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

Решение. При решении данного интеграла можно воспользоваться универсальной подстановкой $tg\,\dfrac{x}{2}=t.$ Проверим возможность использования одной из частных подстановок $\cos x=t,$ $\sin x=t$ или $tgx=t\,(ctgx=t).$ По условию дана рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$: $R(\sin x;\cos x)=\dfrac{5\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

$$R(-\sin x;\cos x)=\frac{5\cos x}{\sqrt{1-(-\sin x)^2}}=\frac{5\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=R(\sin x;\cos x).$$

Данная функция является четной относительно $\sin x,$ поэтому подстановкой $\cos x=t$ воспользоваться не можем.

$$R(\sin x;-\cos x)=\frac{5\cdot(-\cos x)}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=-\frac{5\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=-R(\sin x;\cos x).$$

Функция нечетная относительно $\cos x$, поэтому используем подстановку $\sin x=t,$ тогда $dt=d(\sin x)=\cos dx,$ при $x=0$ $t=0,$ при $x=\dfrac{\pi}{6}$ $t=\dfrac{1}{2}.$ Данный интеграл примет вид:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{5\cos xdx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=5\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=5\arcsin t\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=5\arcsin\frac{1}{2}-5\arcsin 0=5\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}.$$

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int xe^x dx\,. \qquad (2.14)$$

Формула (2.14) называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет тот же вид, что и в неопределенном интеграле, поэтому все рекомендации для интегралов, берущихся по частям, данные для неопределенных интегралов (пункт 1.4), справедливы и для определенных интегралов.

Пример 51. Вычислить интеграл $\int_0^1 xe^x dx.$

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, берущихся по частям, поэтому $u = x,\quad dv = e^x dx,\quad v = \int e^x dx = e^x,$ $du = dx,$ тогда согласно формуле (2.14) получаем

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - e^x\Big|_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) =$$
$$= e - e + 1 = 1.$$

Пример 52. Вычислить интеграл $\int_1^e (x+1)\ln x dx.$

Решение. Интеграл относится ко второй группе интегралов, берущихся по частям. Положим $u = \ln x,\quad dv = (x+1)dx,$ тогда $du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx,\quad v = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x.$ Подставляя в формулу (2.14), получаем

$$\int_1^e (x+1)\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{e^2}{2} + e\right)\ln e -$$
$$-\left(\frac{1}{2} + 1\right)\ln 1 - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 1\right)dx = \frac{e^2 + 2e}{2} - 0 - \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Bigg|_1^e =$$
$$= \frac{e^2 + 2e}{2} - \left(\frac{e^2}{4} + e - \left(\frac{1}{4} + 1\right)\right) = \frac{e^2 + 2e}{2} - \left(\frac{e^2 + 4e}{4} - \frac{5}{4}\right) =$$
$$= \frac{e^2 + 2e}{2} - \frac{e^2 + 4e - 5}{4} = \frac{2e^2 + 4e - e^2 - 4e + 5}{4} = \frac{e^2 + 5}{4}.$$

Пример 53. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.$

Решение. Дан интеграл третьей группы интегралов, берущихся по частям: $u = e^x$, $dv = \cos x dx$, тогда $v = \int \cos x dx = \sin x$, $du = d\left(e^x\right) = \left(e^x\right)' dx = e^x dx.$

Подставим полученные результаты в формулу (2.14)

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cdot e^x dx = e^{\pi/2} \sin\frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0 -$$

$$- \int\limits_0^{\pi/2} \sin x e^x dx = e^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{воспользуемся еще раз формулой интегрирования по частям} \\ u = e^x,\ dv = \sin x dx,\ v = \int \sin x dx = -\cos x, \quad du = d\left(e^x\right) = e^x dx \end{array} \right| =$$

$$= e^{\pi/2} - \left(-\cos x e^x \Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \left(-\cos x\right) e^x dx \right) = e^{\pi/2} + e^x \cos x \Big|_0^{\pi/2} -$$

$$- \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^{\pi/2} + e^{\pi/2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} - e^0 \cdot \cos 0 - \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx =$$

$$= e^{\pi/2} - 1 - \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.$$

Получили алгебраическое уравнение относительно данного интеграла:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^{\pi/2} - 1 - \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.$$

Решим это уравнение:

$$2\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^{\pi/2} - 1, \text{ тогда } \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2} + C.$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{3x-2}$. 2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$. 3. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4}$. 4. $\int\limits_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}dx$.

5. $\int\limits_{-2}^2 x\cos\frac{x}{2}dx$. 6. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}dx$. 7. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)^4}$. 8. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

9. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$. 10. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$. 11. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$. 12. $\int\limits_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$.

13. $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$. 14. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$. 15. $\int\limits_0^1 \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 16. $\int\limits_0^{\pi/4} e^x\sin 2xdx$.

17. $\int\limits_1^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$. 18. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$. 19. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

20. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\cdot\sin 3xdx$.

Ответы. 1. $\frac{\ln 13}{3}$. 2. $\frac{2}{9}$. 3. $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$. 4. $\frac{3\pi}{8}+\frac{\ln 2}{2}$. 5. $8\sin 1$.

6. 0. 7. $\frac{1}{24}$. 8. $1{,}5(\ln 4-1)$. 9. $\frac{\pi}{4}$. 10. $\frac{1}{3}$. 11. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 12. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

13. $2(2-arctg 2)$. 14. $\ln\frac{4}{3}$. 15. $\frac{\pi^3}{24}$. 16. $0{,}3+0{,}1e^{\pi/6}$.

17. $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. 18. $\ln 2$. 19. $\frac{\pi}{6}$. 20. 0,4.

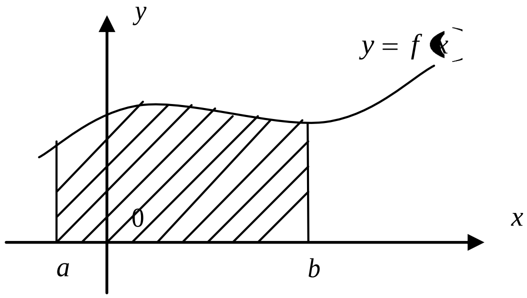
2.4. Приложения определенного интеграла

Приведем без вывода основные формулы и примеры геометрических приложений определенного интеграла.

1). Вычисление площадей плоских фигур.

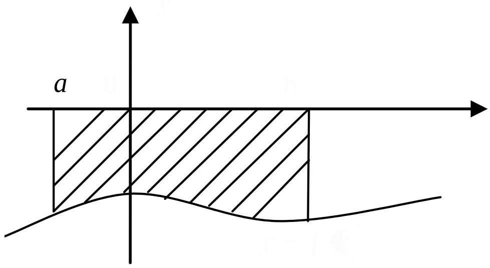
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$, непрерывна), прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b y\,dy = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2.15)$$



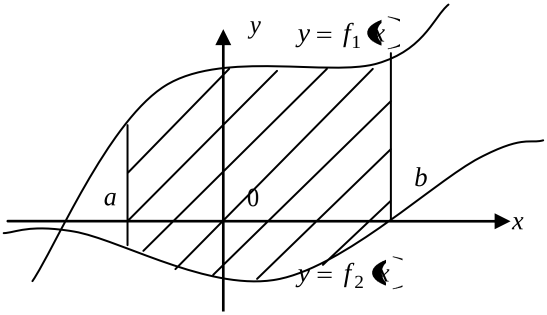
Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \le 0$), непрерывная, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox равна

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.16)$$

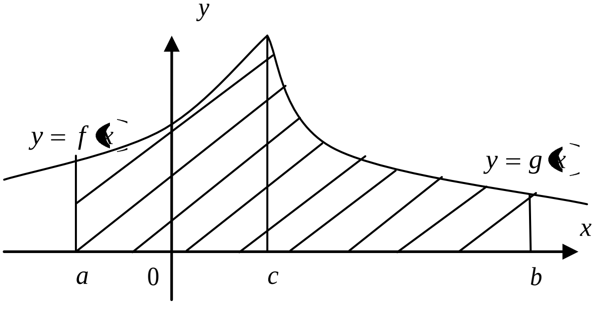


Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \ge f_2(x)$) и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ находится по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx. \qquad (2.17)$$



Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то прямыми, параллельными оси Oy, её следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы

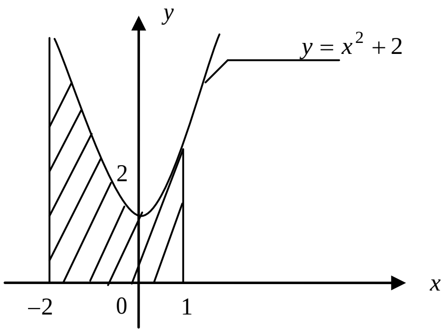


Здесь непрерывные и неотрицательные функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точке с абциссой $x = c$.

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx. \qquad (2.18)$$

Пример 54. Найти площадь фигуры, ошраниченной осью Ox, графиком функции $y = x^2 + 2$, прямыми $x = -2$ и $x = 1$.

Решение. Графиком функции $y = x^2 + 2$ является парабола, симметричная относительно оси Oy, ветви которой направлены вверх, вершина лежит в точке с координатами (0;2).



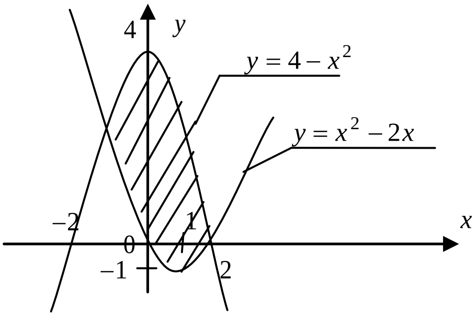
Найдем площадь фигуры по формуле (2.15)

$$S = \int_{-2}^{1} \left(x^2 + 2\right) dx = \int_{-2}^{1} x^2 dx + \int_{-2}^{1} 2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1} + 2x\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{(-2)^3}{3} + 2\cdot 1 - 2\cdot(-2) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 2 + 4 = 3 + 6 = 9\ (ед^2)$$

Пример 55. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение. Графиком функции $y = 4 - x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина в точке (0;4), симметричная относительно оси Oy. Графиком второй функции $y = x^2 - 2x$ также является парабола, ветви направлены вверх, найдем координаты вершины $x_0 = \frac{2}{2} = 1$, $y_0 = 1^2 - 2\cdot 1 = -1$, то есть вершина в точке (1;-1), парабола симметрична относительно прямой $x = -1$. Построим данную фигуру, площадь которой требуется найти



Найдем абсциссы точек пересечения двух графиков:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases} \quad 4 - x^2 = x^2 - 2x, \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad D = (-1)^2 - 4\cdot 1(-2) = 1 + 8 = 9,$$

$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Получили, что $a = -1$, $b = 2$. Согласно формуле (2.17), получим

$$S = \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2 - (x^2 - 2x)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2 - x^2 + 2x\right) dx =$$

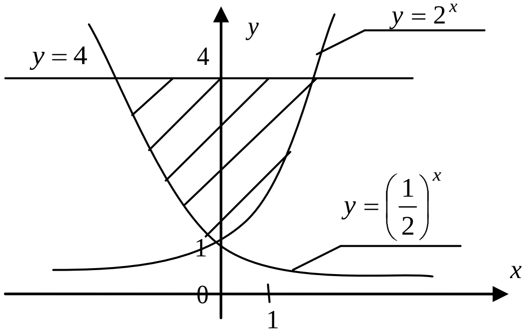
$$= \int_{-1}^{2} \left(4 - 2x^2 + 2x\right) dx = \int_{-1}^{2} 4dx - \int_{-1}^{2} 2x^2 dx + \int_{-1}^{2} 2xdx =$$

$$= 4x\Big|_{-1}^{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = 4\cdot 2 - 4(-1) + \frac{2}{3}\left(2^3 - (-1)^3\right) + 2^2 -$$

$$- (-1)^2 = 8 + 4 + \frac{2}{3}\cdot 9 + 4 - 1 = 21\,(\text{ед}^2).$$

Пример 56. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 4$.

Решение. Показательная функция $y = 2^x$ возрастающая, так как основание степени больше единицы (2>1). Показательная функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывающая, так как $\frac{1}{2} < 1$. Построим графики данных функций



Найдем абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 2^x$ и $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$: $2^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $2^x = 2^{-x}$, $x = -x$, $2x = 0$, $x = 0$.

Прямой $x = 0$ разобьем данную фигуру на две, тогда $S = S_1 + S_2$.

Найдем точку пересечения графиков функций $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ и $y = 4$:

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4$, $2^{-x} = 2^2$, $-x = 2$, $x = -2$, тогда, согласно формуле (2.17), получим

$$S_1 = \int_{-2}^{0}\left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)dx = 4x\Big|_{-2}^{0} - \left.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}\right|_{-2}^{0} =$$

$$= 4\cdot 0 - 4(-2) - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{\ln 2^{-1}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\ln 2^{-1}}\right) = 8 - \left(\frac{1}{-\ln 2} - \frac{4}{-\ln 2}\right) =$$

$$= 8 - \left(\frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\right) = 8 - \frac{3}{\ln 2}.$$

Найдем точку пересечения графиков функций $y = 2^x$ и $y = 4$: $2^x = 4$, $2^x = 2^2$, $x = 2$, тогда, используя формулу (2.17), получим:

$$S_2 = \int_0^2 (4 - 2^x)\,dx = 4x\Big|_0^2 - \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 = 4\cdot 2 - 4\cdot 0 -$$

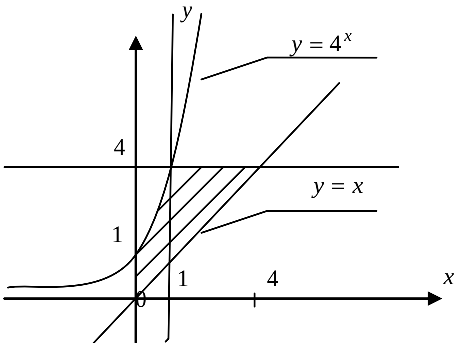
$$-\left(\frac{2^2}{\ln} - \frac{2^0}{\ln 2}\right) = 8 - \left(\frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\right) = 8 - \frac{3}{\ln 2}.$$

Таким образом, площадь данной фигуры равна

$$S = 8 - \frac{3}{\ln 2} + 8 - \frac{3}{\ln 2} = 16 - \frac{6}{\ln 2} = \frac{16\ln 2 - 6}{\ln 2}\ (\partial^2).$$

Пример 57. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4^x$, $y = x$, $y = 4$, $x \ge 0$.

Решение. Построим графики данных функций: $y = 4^x$ – это возрастающая показательная функция, так как основание этой функции больше единицы (4>1); графиком функции $y = x$ является прямая, проходящая через начало координат (биссектриса первого и третьего координатных углов); $y = 4$ – прямая, параллельная оси Ox, проходящая через точку (0;4)



Найдем абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 4^x$ и $y = 4$:

$\begin{cases} y = 4^x, \\ y = 4; \end{cases} \Rightarrow 4^x = 4, \quad x = 1.$ Прямой $x = 1$ разобьем данную фигуру на две, тогда $S_ф = S_1 + S_2$.

Найдем абсциссу точки пересечения графиков $y = 4$ и $y = x$:

$$\begin{cases} y = 4, \\ y = x; \end{cases} \Rightarrow x = 4.$$

Используя формулу (2.17), получим:

$$S_1 = \int_0^1 (4^x - x)dx = \int_0^1 4^x dx - \int_0^1 xdx = \left.\frac{4^x}{\ln 4}\right|_0^1 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{4}{\ln 4} - \frac{4^0}{\ln 4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{\ln 4} - \frac{1}{2}.$$

$$S_2 = \int_1^4 (4 - x)dx = \int_1^4 4dx - \int_1^4 xdx = 4x\Big|_1^4 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 = 16 - 4 - \left(\frac{4^2}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 12 - \left(8 - \frac{1}{2}\right) = 12 - 7{,}5 = 4{,}5.$$

Следовательно, площадь данной фигуры равна:

$$S_ф = \frac{3}{\ln 4} - \frac{1}{2} + 4{,}5 = \frac{3}{\ln 4} + 4 = \frac{3 + 4\ln 4}{\ln 4}\ (\partial^2).$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

1. $y = -x^2,\ \ x + y + 2 = 0.$ **2.** $y = \dfrac{16}{x^2},\ \ y = 17 - x^2,\ \ x > 0.$

3. $y^2 = 4x^3,\ \ y = 2x^2.$ **4.** $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ x = 0.$

5. $y = \dfrac{1}{4}x^2,\ \ y = 3x - \dfrac{1}{2}x^2.$ **6.** $xy = 4\sqrt{2},\ \ y = 4,\ \ x = 3.$

7. $y = x^3,\ \ y = x,\ \ y = 2x.$ **8.** $y = e^x,\ \ y = e^{-x},\ \ x = 1.$

9. $y = x^2,\ \ y = \dfrac{x^2}{2},\ \ y = 2x.$

10. $y = x^2 - 2x,\ \ y = x,\ \ y = 2 - x,\ \ x \ge 1.$

Ответы. 1. $4{,}5.$ **2.** $18.$ **3.** $\dfrac{2}{15}.$ **4.** $\sqrt{2} - 1.$ **5.** $8.$

6. $12 - 4\sqrt{2}\left(1 + \ln\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right).$ **7.** $1{,}5.$ **8.** $\dfrac{(e-1)^2}{e}.$ **9.** $4.$ **10.** $\dfrac{17}{3}.$

2). Вычисление длины дуги.

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y = f(x)$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \qquad (2.19)$$

где a, b – абсциссы начала и конца дуги $(a < b)$.

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$, то

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy, \qquad (2.20)$$

где c, d – ординаты начала и конца дуги $(c < d)$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то длина дуги выражается формулой

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt, \qquad (2.21)$$

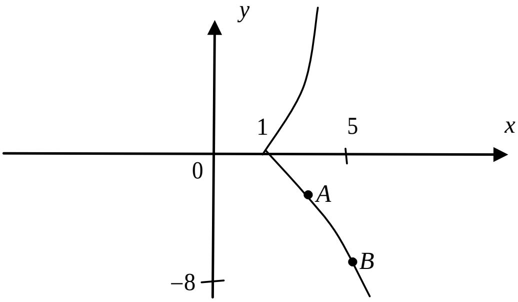
где $t_1,\ t_2$ – значения параметра, соответствующие концам дуги $(t_1 < t_2)$.

Пример 58. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x-1)^3$ между точками $A(2;-1)$ и $B(5;-8)$.

Решение. Разрешаем данное уравнение относительно y и находим y':

$$y = \pm(x-1)^{\frac{3}{2}};\quad y' = \frac{+3}{-2}(x-1)^{\frac{1}{2}};\quad (y')^2 = \frac{9}{4}(x-1).$$

Знаки $\pm$ в выражении y указывают, что кривая симметрична относительно оси *Ox*; точки *A* и *B*, имеющие отрицательные ординаты, лежат на той ветви кривой, которая расположена ниже оси *Ox*.



Подставляя в формулу (2.19), получим

$$l = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}}\,dx = \int_2^5 \sqrt{\frac{9}{4}x-\frac{5}{4}}\,dx =$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{9}{4}x-\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} \text{пусть } \dfrac{9}{4}x-\dfrac{5}{4} = z,\ x = \dfrac{4}{9}\left(z+\dfrac{5}{4}\right), \\ dx = d\left(\dfrac{4}{9}\left(z+\dfrac{5}{4}\right)\right) = \left(\dfrac{4}{9}\left(z+\dfrac{5}{4}\right)\right)' dz = \dfrac{4}{9}\,dz, \\ \text{при } x=2\ z=\dfrac{13}{4};\ \text{при } x=5\ z=10 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{13/4}^{10} z^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{4}{9}\,dz = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\,z^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{13}{4}}^{10} = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - \frac{13}{8}\sqrt{13}\right).$$