Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Л.С. НИКУЛИНА
А.Н. ТКАЛИЧ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум
Часть 2
для студентов специальности
230100 «Сервис транспортных и технологических машин
и оборудования»

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2007

ББК 22.11
Н 65

Рецензент: Н.Ю. Голодная, доцент каф. ММ;
И.В. Пивоварова, ст. преп. каф. ММ

Никулина Л.С., Ткалич А.Н.
Н 65 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Практикум. Ч. 2 – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. – 60 с.

Пособие является методическим руководством для изучения общего курса высшей математики студентами-заочниками 2-го курса специальности 230100 «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования». В пособии содержатся контрольные задания и методические указания к выполнению контрольных работ. Приводятся примеры решения типовых задач.

ББК 22.11

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

ВВЕДЕНИЕ

Знания, приобретаемые студентом в результате изучения математики, играют важную роль в процессе его обучения в высшем учебном заведении. Математические методы широко используются для решения всевозможных технических задач, и поэтому их изучение необходимо для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебным планом специальности.

Данное учебно-практическое пособие соответствует учебной программе курса «Высшая математика» для специальности «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования» и является продолжением одноименного пособия, предлагаемого студентам первого курса данной специальности в качестве методического руководства для работы над курсом высшей математики.

Во вторую часть практикума для студентов-заочников 2-го курса специальности СТ по курсу высшей математики включены такие разделы: дифференциальные уравнения первого и второго порядков, числовые и функциональные ряды, элементы операционного исчисления, кратные интегралы и их применение к решению некоторых геометрических и технических задач, элементы теории вероятностей и статистики.

Для удобства студентов практикум разделен на три главы. В первой содержится краткое изложение теории, во второй – решение типовых задач, предлагаемых студентам-заочникам в контрольных работах, и в третьей – задачи для контрольных работ. Решение задач производится со ссылками на определения, теоремы, формулы и обозначения, приводящиеся в первой главе пособия, поэтому особое внимание следует обращать на определение основных понятий, формулировки теорем, подробно разбирать примеры, которые поясняют эти определения или ту или иную теорему. Решение каждой задачи необходимо доводить до ответа, в вычислениях не следует заменять корни, числа π, e их приближенными значениями.

В процессе изучения курса высшей математики студент 2-го курса должен выполнить три контрольных работы. Контрольные работы студент должен выполнять самостоятельно, так как несамостоятельно выполненная контрольная работа не дает студенту возможности приобретения навыков решения задач, в результате чего он оказывается неподготовленным к сдаче экзамена.

Контрольные работы после их выполнения высылаются на проверку в университет. Без прорецензированных работ студент к экзамену не допускается. Номера задач в контрольных работах должны соответствовать последней цифре учебного шифра студента, который обязательно пишется на обложке тетради.

1. КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

1.1. Математический анализ

1.1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

1.Основные понятия. Функциональное уравнение $F(x,y,y') = 0$ или $y'= f(x,y)$, связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка.*

Решением уравнения первого порядка называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместе со своей производной $y'=\varphi(x)$, обращает его в тождество относительно x.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y = \varphi(x,C)$ которая при любом значении параметра C является решением этого дифференциального уравнения. Уравнение $\Phi(x,y,C) =0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения $y' = f\left(x,y\right)$, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, носит название *задачи Коши.*

2. **Уравнение с разделяющимися переменными** имеет вид:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0\,.$$

Путем деления на $N_1(y)\cdot M_2(x)$ это уравнение приводится к виду $\dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$. Интегрируя левую часть уравнения по x, а правую – по y, приходим к общему интегралу исходного уравнения.

3.Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду $y' = f(\frac{y}{x})$ или к виду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – *однородные функции одного порядка*, т.е. существует такое число $k\in Z$, что $M(tx,ty) = t^k M(x,y)$ и $N(tx,ty) = t^k N(x,y)$ при $t \neq 0$.

Однородные уравнения преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными с помощью подстановки $\frac{y}{x} = u$. Отсюда находим

y и y': $y = ux, y' = u'x + u$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными u и x.

4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно содержит y и y' в первой степени, т.е. имеет вид $y' + P(x)y = Q(x)$.

Уравнением *Бернулли* называется дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' + P(x)y = Q(x)y^m$, где $m \neq 0$ и $m \neq 1$.

Эти уравнения решают с помощью подстановки $y = uv$.

1.1.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

5. Определения. Дифференциальное уравнение *второго порядка* имеет вид $F(x,y,y',y'')=0$ или $y'' = f(x, y, y')$.

Общим решением уравнения второго порядка называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, которая при любых значениях параметров C_1, C_2 является решением этого уравнения.

6. Уравнения, допускающие понижение порядка:

уравнения вида $y'' = f(x)$ решают путем двукратного интегрирования: $y' = \int f(x)dx + C_1,\ y = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2$;

уравнения, не содержащие явно y*, т.е. уравнения вида* $F(x, y', y'') = 0$, решают с помощью замены $y' = p$ и $y'' = p'$;

уравнения, не содержащие явно x*, т.е. уравнения вида* $F(y, y', y'') = 0$, решают с помощью замены $y' = p$, $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$.

7. Линейные однородные уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение второго порядка называется *линейным*, если оно имеет вид: $y'' + p(x)y' + qy = f(x)$. Если правая часть уравнения $f(x) \neq 0$, то уравнение называют *линейным неоднородным*. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид $y'' + p(x)y' + qy = 0$ и называется *линейным однородным*.

8. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$, из которого определяется число k, называется *характеристическим уравнением* данного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. По таблице определяется общее решение однородного линейного уравнения в зависимости от корней его характеристического уравнения.

Таблица 1

N	k_1, k_2	$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$
1 2 3 4	$k_1 \neq k_2 \in R$ $k_1 = k_2 = k$ $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $k_{1,2} = \pm \beta i$	$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ $e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right)$ $e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$ $C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

9. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. *Теорема***.** Общее решение линейного неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ равно сумме какого–нибудь частного решения этого уравнения y^* и общего решения $\overline{y}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Принцип наложения решений. Решение y^* уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$, где правая часть есть сумма функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, можно представить в виде суммы $y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* и y_2^* являются соответственно решениями уравнений $y'' + py' + qy = f_1(x)$ и $y'' + py' + qy = f_2(x)$.

Ниже рассматриваются случаи, когда по виду правой части уравнения можно определить вид его частного решения методом неопределенных коэффициентов.

Таблица 2

№	$f(x)$	№	k_1, k_2	y^*
1	2	3	4	5
I	ae^{mx}	1 2 3	$k_1, k_2 \neq m$ $k_1 = m, k_2 \neq m$ $k_1 = k_2 = m$	Ae^{mx} xAe^{mx} $x^2 Ae^{mx}$

1	2	3	4	5
II	$P_n(x)e^{mx}$, где $P_n(x)=a_0x^n$ $+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n$.	1 2 3	$k_1\neq m, k_2\neq m$ $k_1=m, k_2\neq m$ $k_1=k_2=m$	$Q_n(x)e^{mx}$ $xQ_n(x)e^{mx}$ $x^2Q_2(x)e^{mx}$
III	$P_n(x)$	1 2 3	$k_1\neq 0, k_2\neq 0$ $k_1=0, k_2\neq 0$ $k_1=k_2=0$	$Q_n(x)$ $xQ_n(x)$ $x^2Q_n(x)$
IV	$M\cos\beta x+$ $+N\sin\beta x$	1 2	$k_{1,2}\neq\pm\beta i$ $k_{1,2}=\pm\beta i$	$A\cos\beta x+B\sin\beta x$ $x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
V	$P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+$ $+Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ где степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ могут быть разными, и один из многочленов может быть тождественно равен нулю.	1 2	$k_{1,2}\neq\alpha\pm\beta i$ $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}(U(x)\cos\beta x+$ $+V(x)\sin\beta x)$ $xe^{\alpha x}(U(x)\cos\beta x+$ $+V(x)\sin\beta x)$, где степени $U(x)$, $V(x)$ равны максимальной из степеней $P(x)$,$Q(x)$.

1.1.3. Элементы операционного исчисления

1. Преобразование Лапласа. Преобразованием Лапласа, или *изображением* функции $f(t)$, $t\in R$, называется функция $F(p)$ комплексной переменной p, определяемая следующим равенством:

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt .$$

Если функция *f(t)* удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t)=0$ при $t<0$;

2) существуют такие постоянные σ_0 и М, что $|f(t)|<Me^{\sigma_0 t}$ при *t>0*.

3) на любом конечном отрезке $[0,T]$ функция *f(t)* имеет не более, чем конечное число точек разрыва первого рода, то функция *f(t)* называется *оригиналом*.

Соответствие между оригиналом и изображением символически обозначается $\risingdotseq$. $F(P)$ является изображением *f(t)* или *f(t)* является оригиналом $F(p)$ записывают символически так: $f(t) \risingdotseq F(P)$.

2. Изображение производных. **Если** $f(t), f'(t),.., f^{(n)}(t)$ **являются функциями-оригиналами и** $f(t) \risingdotseq F(p)$ **, то**

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$
$$f''' \risingdotseq p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0)$$
…………………

3. Таблица оригиналов и изображений. При вычислении изображений и нахождении оригиналов по изображениям следует использовать таблицу.

Таблица 3

№	*f(t)*	*F(p)*	№	*f(t)*	*F(p)*
1	2	3	4	5	6
1	1	$\frac{1}{p}$	11	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
2	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	12	$e^{-\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	13	$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$

1	2	3	4	5	6
4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	14	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
5	$shat$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	15	$tshat$	$\frac{2pa}{(p^2-a^2)^2}$
6	$chat$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	16	$tchat$	$\frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
7	$e^{-\alpha t}\sin at$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	17	$\frac{1}{2a^3}(sinat - atcosat)$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
8	$e^{-\alpha t}\cos at$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	18	$\frac{1}{2a^3}(atchat - shat)$	$\frac{1}{(p^2-a^2)^2}$
9	$e^{-\alpha t}shat$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2-a^2}$	19	$\frac{t}{8a^3}(sinat - atcosat)$	$\frac{p}{(p^2+a^2)^3}$
10	$e^{-\alpha t}chat$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-a^2}$	20	$\frac{t}{8a^3}(atchat - shat)$	$\frac{p}{(p^2-a^2)^3}$

1.1.4. Кратные и криволинейные интегралы

1. **Двойной интеграл в декартовых координатах.** Пусть функция $Z = f(x,y)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D плоскости Oxy. *Двойной интеграл* от функции $f(x,y)$ по области D обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению *двукратных* (повторных) интегралов. Пусть область D ограничена кривыми $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x), x=a, x=b$, причем $x\in[a,b]$, а функции

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ (рис.1).Прямая, параллельная оси *Oy*, пересекает границу области *D* не более чем в двух точках. Такую область *D* называют простой и правильной в направлении оси *Oy*.

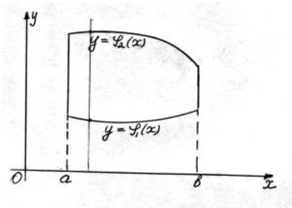


Рис. 1

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, причем сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной *y*, а полученный интеграл берется по переменной *x*.

Если на отрезке [a,b] верхняя или нижняя граница области задается несколькими аналитическими выражениями, то область *D* следует разбить на количество областей, равное числу аналитических выражений верхней (или нижней) границы области, причем двойной интеграл по области *D* в этом случае равен сумме двойных интегралов по полученным областям.

В том случае, когда область *D* справа и слева ограничена кривыми $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y)$, непрерывными на [c,d] , прямыми $y = c$ и $y = d$, область *D* является простой и правильной в направлении оси *Ox*.

Двойной интеграл по такой области вычисляют по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

Если область *D* правильна в направлении обеих координатных осей, то двойной интеграл по такой области можно вычислять в любом порядке: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

2. Двойной интеграл в полярных координатах. Пусть область *D* ограничена линиями $r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где φ и r – полярные координаты точки на плоскости, связанные с ее декартовыми координатами *x* и *y* соотношениями: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ (рис. 2).

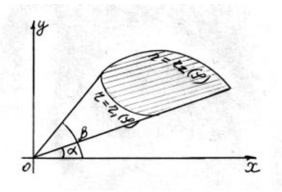


Рис. 2

В этом случае

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

3. Геометрические приложения двойного интеграла. С помощью двойного интеграла вычисляют *площади* плоских фигур: $S = \iint\limits_D dxdy$ – в декартовых координатах, $S = \iint\limits_D rd\varphi dr$ – в полярных координатах.

Двойной интеграл применяют для вычисления *объемов* тел. Пусть геометрическое тело ограничено с боков цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси *Oz*, а сверху и снизу – поверхностями $z = f_1(x,y), z = f_2(x,y)$, где *(x,y)*∈*D* (*D* – проекция тела на плоскость *Oxy*) (рис. 3).

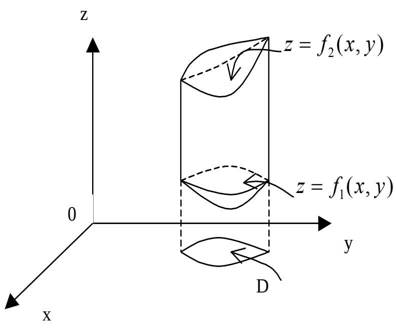


Рис. 3

Тогда объем этого тела вычисляют с помощью двойного интеграла: $V=\iint\limits_D [f_2(x,y)-f_1(x,y)]dxdy$.

4. **Механические приложения.** Если пластинка занимает область D плоскости Oxy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma(x,y)$, то *масса* пластинки M и ее *статические моменты* относительно координатных осей вычисляют по формулам:

$$M=\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy,\ M_X=\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy,\ M_Y=\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy.$$

Координаты центра масс вычисляют по формулам:

$$\bar{x}=\frac{M_Y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy},\ \bar{y}=\frac{M_X}{M}=\frac{\iint\limits_D y\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy}.$$

5. Криволинейный интеграл. Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – функции двух переменных, непрерывные в некоторой области D, и L – гладкая линия, целиком расположенная в этой области..

Если существует предел последовательности интегральных сумм при условии, что $\max \Delta x_i \to 0$ и $\max \Delta y_i \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения кривой AB на частичные дуги, ни от выбора точек $M_i(\mu_i,\eta_i)$, то этот предел называется *криволинейным* интегралом (2-го рода) по кривой AB и обозначается $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,т.е.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} P(\mu_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\mu_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

Замечание. $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=-\int\limits_{BA} Pdx+Qdy$.

Вычисление криволинейного интеграла:

а) если кривая AB задана уравнением $y=f(x), x\in[a,b]$, то $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b P(x,y(x))dx+Q(x,y(x))y'_x dx$, где a и b – это абсциссы точек A и B кривой;

б) если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t), y=y(t), t\in[t_1,t_2]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}[P(x(t),y(t))x'_t+Q(x(t),y(t))y'_t]dt,$$

где t_1, t_2 – это значения параметра t, отвечающие соответственно точкам A и B.

1.1.5. Ряды

1. Числовые ряды. Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + .. + u_n + ...(u_1, u_2, .. u_n, ..$ – некоторая числовая последовательность) называется *числовым рядом*. Конечные суммы $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, .., S_n = u_1 + u_2 + .. + u_n, ..$ называются частичными суммами ряда.

Если существует конечный $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то числовой ряд называется *сходящимся*, а число S – суммой ряда. В противном случае ряд называется расходящимся.

Необходимое условие сходимости. Если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Если же $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

2. Признаки сходимости числовых рядов. Рассмотрим *знакоположительные* числовые ряды, т.е. ряды, члены которых $u_n > 0$ при $\forall n$.

Признак сравнения. Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если ряд с большими членами сходится, то сходится и ряд с меньшими членами; если же ряд с меньшими членами расходится, то и ряд с большими членами расходится.

Признак сравнения в предельной форме. Если существует конечный и отличный от нуля $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

В качестве рядов для сравнения берут гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,о которых известно, что первый сходится, а второй при p>1сходится, а при p≤1 расходится.

Признак Даламбера. Если существует конечный $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то 1) при $l < 1$ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, 2) при $l > 1$этот ряд расходится, 3) при $l = 1$признак ответа не дает.

Признак Коши. Если существует конечный $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то 1) при $l<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, 2) при $l>1$ этот ряд расходится, 3) при $l=1$ признак ответа не дает.

Интегральный признак Коши. Пусть функция *f(x)>0* и монотонна при *x≥1,* и пусть для всех $n\in N$ имеет место равенство $u_n = f(n)$. Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx, a\geq 1$.

Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Пусть члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ монотонно убывают, т.е. $u_1>u_2>..>u_n>..$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. Тогда ряд сходится, причем для его суммы *S* имеет место оценка $S<u_1$.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Тогда, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n.}$.

Если сходится ряд из модулей членов ряда, т.е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *абсолютно* сходящимся.

Если ряд из модулей членов ряда расходится, а сам ряд сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *условно* сходящимся.

3. Степенные ряды. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+..$ называется *степенным по степеням* x, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+..$ – *степенным по степеням* $(x-x_0)$.

Существует *интервал* (*-R,R*), во всех точках которого степенной ряд абсолютно сходится, за пределами интервала расходится, а на концах интервала, т.е. в точках $x = R$ и $x = -R$, ряд может быть сходящимся или расходящимся.

Интервал сходимости степенного ряда ищут, применяя либо признак Даламбера, либо признак Коши.

4. Разложение функций в ряд Тейлора. Функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R,R)$, если на этом интервале данный степенной ряд сходится к функции $f(x)$.

Если функция представлена в виде степенного ряда, то этот ряд является ее рядом *Тейлора*: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ или $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

При решении задач рекомендуется пользоваться разложениями в ряд Маклорена (частный случай ряда Тейлора) элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + .. = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, \infty) ;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + .. = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$x \in (-\infty, \infty) ;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - .. = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x \in (-\infty, \infty) ;$$

4. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + .. = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, |x| < 1;$$

5. $$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$|x| < 1;$$

6.
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$$

$$|x| < 1, m \in R \setminus N .$$

(в случае, когда m – натуральное число, функция $(1+x)^m$ раскладывается по формуле бинома Ньютона в многочлен);

7. $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+..=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, |x|<1$;

(последнее разложение является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $|x|<1$).

5. Ряды Фурье. Тригонометрический ряд

$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$, коэффициенты которого вычислены по формулам *Фурье*, т.е.

$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$, называется *рядом Фурье* периодической с периодом 2π функции *f(x)*, ($x\in(-\pi,\pi)$).

Если *f(x)* – четна или нечетна, то имеем следующие ряды Фурье:

1) если $f(x)$ является *четной*, то $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, где $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)dx, a_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx$;

2) если $f(x)$ является *нечетной*, то

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \text{ где } b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Если $x\in(-l,l)$, т.е. если функция *f(x)* является периодической с периодом 2*l*, то имеют место следующие формулы:

1) $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$,

где $a_0=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx$, $a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$, $b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$;

2) если $f(x)$ – *четна*, то

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \text{ где } a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx, a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

3) если $f(x)$ – *нечетна*, то

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \text{ где } b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Замечание. Если $f(x)$ *не является периодической*, то эту функцию доопределяют до периодической. Затем получившуюся периодическую функцию раскладывают в ряд Фурье, который будет сходиться к функции *f(x)* на промежутке, где задана эта функция.

1.2. Элементы теории вероятностей и математической статистики

1.2.1. Основные понятия теории вероятностей

Испытание – это опыт, явление, наблюдение и т.д.

Событие – это результат (исход) испытания. События обозначают буквами A,B,C…

Виды событий.

Событие называют *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате испытания. Если же событие не может наступить, то его называют *невозможным*.

Случайным называется событие, которое в результате опыта может появиться, а может и не появиться, о чем заранее неизвестно.

Несовместными называются события, которые не могут появиться вместе в процессе испытания.

Единственно возможными называют события, если в процессе испытания не могут появиться другие события.

Равновозможными называют события, если условия их появления одинаковы и нет основания полагать, что одно из них более возможно, чем другое.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них и никакое другое.

Два несовместных события A и $\overline{A}$,образующих полную группу, называются *противоположными*.

Если несколько событий образуют полную группу, несовместны и равновозможны, то они называются *элементарными исходами* или *случаями*.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов к числу всех возможных элементарных исходов испытания: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Суммой $A+B$ событий A и B называют событие, состоящее в появлении или события A, или B, или обоих сразу.

Произведением событий A и B называют событие AB, состоящее в одновременном наступлении обоих событий.

1.2.2. Основные теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

События называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности другого.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$или $p+q=1$, где q-вероятность противоположного событию A события.

Теорема умножения независимых событий:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема умножения зависимых событий:

$$P(AB) = P(A)P_A(B),$$

где $P_A(B)$ – *условная* вероятность события B, т. е. вероятность, вычисленная при условии наступления события A.

Эти теоремы справедливы для любого конечного числа событий.

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$, т. е. $P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$, где $q_i = 1 - p_i$, если $p_i = P(A_i)$.

Формула полной вероятности. Вероятность события A, которое может наступить лишь с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу, вычисляют по формуле $P(A) = P(H_1)P_{H_1}P(A) + P(H_2)P_{H_2}P(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}P(A)$, где $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Формула Бейеса для оценки вероятности события после испытания: $P(H_i) = \dfrac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}$,где $P(A)$-полная вероятность события A.

Формула Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний событие А наступает с одной и той же вероятностью p, то вероятность того, что в результате испытания событие наступит ровно m раз, вычисляют по формуле $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, q = 1 - p$.

1.2.3. Дискретные случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение , наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Обозначают случайные величины буквами *X*, *У*, *Z*, …

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Таких значений может быть либо конечное число, либо счетное множество.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Ясно, что непрерывная случайная величина имеет бесконечно много значений.

Законом распределения случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Его можно задать таблично и тогда он называется *рядом распределения*, в виде формулы и графически.

Ряд распределения записывают в виде:

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

Здесь $\sum p_i = 1$.

Графиком ряда распределения является *многоугольник распределения*. В прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а потом соединяют их отрезками прямых.

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины *X* – числа появления события в *n* независимых испытаниях, в каждом их которых вероятность появления события равна *p*. Вероятность возможного значения *X*=*m* вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$.

Дисперсией случайной величины называется $D(X) = M[X - M(X)]^2$. Дисперсию обычно вычисляют по формуле

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Функцией распределения называют функцию $F(x)=P(X<x)$, т. е. функцию, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

1.2.4. Непрерывные случайные величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения:

$f(x) = F'(x).$ По известной плотности можно найти функцию распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины, все возможные значения которой принадлежат интервалу (a,b) определяется равенством $M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx.$

Дисперсию находят по формуле

$$D(X) = \int\limits_{a}^{b} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$. Здесь a и σ – соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины. *Вероятность попадания в заданный интервал* такой случайной величины находят по формуле

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\dfrac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}).$ $\Phi(x)$ – это функция Лапласа, значения которой находят по таблице приложения 2 (Гмурман В. Е.).

Вероятность заданного отклонения случайной величины от математического ожидания задается формулой $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\dfrac{\delta}{\sigma})$, а при

$a = 0 \quad P(|X| < \delta) = 2\Phi(\dfrac{\delta}{\sigma}).$

2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

2.1. Дифференциальные уравнения

Задание 1.а) Решить уравнение $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные : $(e^{2x}+5)dy=-ye^{2x}dx$, далее разделим обе части уравнения на произведение $y(e^{2x}+5)$. Получим $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{e^{2x}dx}{e^{2x}+5}$. Интегрируем обе части и получаем: $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{2x}+5)}{e^{2x}+5}$. Отсюда $\ln|y|=-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+5)+\ln C$, $\ln|y|=\ln\dfrac{C}{\sqrt{e^{2x}+5}}$, $y=\dfrac{C}{\sqrt{e^{2x}+5}}$.

б) Решить уравнение $xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$.

Решение. Разрешим это уравнение относительно y'. Имеем $y'=(3\sqrt{x^2+y^2}+y)/x$. Сделаем подстановку $\dfrac{y}{x}=u$, $y=ux$, $y'=u'x+u$.

Тогда $u'x+u=3\dfrac{\sqrt{x^2+(ux)^2}}{x}+u$, $u'x=3\dfrac{\sqrt{x^2(1+u^2)}}{x}$, $\dfrac{du}{dx}x=3\sqrt{1+u^2}$.

Разделим переменные и проинтегрируем: $\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\dfrac{3dx}{x}$,

$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=3\ln|x|+\ln C$, $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln Cx^3$, $u+\sqrt{1+u^2}=Cx^3$.

Подставляя вместо u его значение, получим общий интеграл однородного уравнения $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^4$.

в) Решить уравнение $y'-\dfrac{y}{x+1}=e^x(x+1)$.

Решение. Это линейное уравнение решим с помощью подстановки $y=uv$, где u и v-вспомогательные неизвестные функции. Подставим их в уравнение. Имеем $u'v+uv'-\dfrac{uv}{x+1}=e^x(x+1), v(u'-\dfrac{u}{x+1})+uv'=e^x(x+1)$.

А теперь найдем u, приравнивая к нулю выражение в скобках: $u' - \dfrac{u}{x+1} = 0$. Тогда $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u}{x+1}$, $\dfrac{du}{u} = \dfrac{dx}{x+1}$.

Проинтегрировав последнее выражение, получаем $u=x+1$. Подставим это в оставшуюся после приравнивания к нулю скобки часть уравнения и найдем v. $(x+1)v' = e^x(x+1)$, $v' = e^x$, $v = e^x + C$. Тогда $y = uv = (x+1)(e^x + C)$.

Задание 2. а) Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Решение. Данное уравнение не содержит y. Положим $y' = p, y'' = p'$. Тогда имеем уравнение $xp' + p = 0$, или $x\dfrac{dp}{dx} + p = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dx}{x}$, откуда $\ln p = -\ln x + \ln C_1 \Rightarrow p = \dfrac{C_1}{x}$. Заменим p в уравнении на $\dfrac{dy}{dx}$. Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c_1}{x}$. Интегрируя, получим $y = C_1\int\dfrac{dx}{x} = C_1\ln|x| + C_2$.

б) Решим уравнение $y''y^3 + 1 = 0, y(1) = y'(1) = -1$. Это уравнение не содержит явно x, поэтому решаем его с помощью подстановки $y' = p, y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Имеем $p\dfrac{dp}{dy}y^3 + 1 = 0$ или, разделяя переменные, $pdp = -\dfrac{dy}{y^3}$. Вычислим интегралы от обеих частей, получим $\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{1}{2y^2} + \dfrac{C_1}{2}$, $p^2 = \dfrac{1}{y^2} + C_1$. Подставляя начальные условия $x=1$, $y(1) = y'(1) = p(1) = -1$, получим $C_1 = 0$. Тогда $p^2 = \dfrac{1}{y^2}$, $p = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}$.

Отсюда $ydy = dx$, $\dfrac{y^2}{2} = x + C_2$. Снова подставляя начальные условия, получим $1/2 = 1 + C_2$, $C_2 = -1/2$. Имеем далее $\dfrac{y^2}{2} = x - \dfrac{1}{2}$, а, учитывая, что при $x=1$ $y=-1$, получим окончательно $y = -\sqrt{2x-1}$.

Задание 3. а) Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^2 - 5k + 6 = 0,\ k_1 = 2, k_2 = 3$. Корни действительны и различны.

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

б) Решим дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$. Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения: $k^2 - 6k + 9 = 0$. Тогда $(k-3)^2 = 0$ и $k = 3$. Общее решение данного дифференциального уравнения: $y = e^{3x}(C_1 + xC_2)$.

в) Составить общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни. Имеем $k^2 + 4k + 13 = 0$. Отсюда $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm \sqrt{-9} = = -2 \pm 3i$. Тогда согласно формуле общего решения линейного однородного уравнения в случае комплексных корней характеристического уравнения получаем общее решение данного дифференциального уравнения: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

г) Найти общее решение линейного уравнения 2-го порядка $y'' - 2y' = 2ch2x$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения: $ch2x = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$.

Поэтому имеем уравнение $y'' - y' = e^{2x} + e^{-2x}$, которое является неоднородным с правой частью, состоящей из двух функций. Общее решение такого уравнения состоит из суммы общего решения $\bar{y}$ однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$, корнями которого являются числа $k_1 = 0,\ k_2 = 2$. Получим общее решение однородного уравнения по таблице 1 (1.1.2.): $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x}$.

По виду правой части найдем какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. Так как правая часть состоит из двух функций, то по принципу наложения ищем частное решение в виде суммы частных решений уравнений $y'' - 2y' = e^{2x}$ и $y'' - 2y' = e^{-2x}$.

Решаем первое уравнение. По таблице 2 (1.1.2.) подбираем вид частного решения. Здесь один корень характеристического уравнения совпадает с числом $m = 2$, поэтому ищем решение в виде $y_1^* = xAe^{2x}$, где A – неопределенный коэффициент. Подставим y_1^* в уравнение. Для этого вычислим его первую и вторую производные. $(y_1^*)' = Ae^{2x} + Axe^{2x}2 = Ae^{2x}(1+2x)$, $(y_1^*)'' = 2Ae^{2x}(2+2x)$. Подставляя в уравнение эти выражения, имеем $2Ae^{2x}(2x+2) - 2Ae^{2x}(1+2x) = e^{2x}$. Разделим обе части полученного выражения на $e^{2x} \neq 0$. Тогда получим $2A(2x+2)$-$2A(1+2x)$=1, $4Ax+4A-4Ax-2A$=1, $2A$=1 и, наконец, A=0,5. Таким образом, $y_1^* = 0{,}5xe^{2x}$. Поскольку правая часть второго уравнения e^{-x} и в этом случае ни один из корней характеристического уравнения не совпадает с m=-2, то решение ищем в виде $y_2^* = Be^{-2x}$. Проделав аналогичные действия, найдем: B=1/8=0,125. Тогда $y_2^* = 0{,}125e^{-2x}$, а общее решение исходного уравнения $y = C_1 + C_2e^{2x} + 0{,}5xe^{2x} + 0{,}125e^{-2x}$.

2.2. Решение систем операционным методом

Задание 4. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$

$$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

Решение. Перейдем к изображениям. Обозначим:

$x(t) \overset{\bullet}{=} X(p)$, $y(t) \overset{\bullet}{=} Y(p)$, $x'(t) \overset{\bullet}{=} pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$y'(t) \overset{\bullet}{=} pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$, $1 \overset{\bullet}{=} \dfrac{1}{p}$, $3 \overset{\bullet}{=} \dfrac{3}{p}$. Тогда получим систему операционных уравнений:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 3Y(p) + \dfrac{3}{p}, \\ pY(p) - 1 = X(p) - Y(p) + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Преобразуем систему к стандартному виду и решим ее по формулам Крамера. Имеем: $\begin{cases} X(p)(p-1) - 3Y(p) = \dfrac{3}{p}, \\ -X(p) + Y(p)(p+1) = \dfrac{1}{p} + 1. \end{cases}$ Вычислим определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -3 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 - 4.$ Найдем вспомогательные определители: $\Delta_X = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{p} & -3 \\ \dfrac{1+p}{p} & p+1 \end{vmatrix} = 6\dfrac{p+1}{p}$, $\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{3}{p} \\ -1 & \dfrac{1}{p} \end{vmatrix} = \dfrac{p^2+2}{p}$. Получаем $X(p) = 6\dfrac{p+1}{p(p^2-4)}$, $Y(p) = \dfrac{p^2+2}{p(p^2-4)}$.

Для того чтобы найти оригиналы полученных изображений, необходимо разложить эти дроби на простейшие.

$\dfrac{p+1}{p(p^2-4)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+2} + \dfrac{C}{p-2}$, умножим обе части этого тождества на $p(p^2-4)$. Получим тождество $p+1=A(p+2)(p-2)+Bp(p-2)+Cp(p+2)$. Подставляя в обе части поочередно p=0, p=2, p=-2, находим A=-0,25, B=-0,125 и C=0,375. Тогда $X(p) = 6(\dfrac{-0{,}25}{p} - \dfrac{0{,}125}{p+2} + \dfrac{0{,}375}{p-2})$. По таблице оригиналов и изображений получаем $x(t) = -1{,}5 - 0{,}75e^{-2t} + 2{,}25e^{2t}$. Проделав аналогичные действия, получим $y(t) = -0{,}5 + 0{,}75e^{-2t} + 0{,}75e^{2t}$.

2.3. Кратные и криволинейные интегралы

Задание 5. Найти координаты центра масс пластины, ограниченной параболами $y^2 = 4x+4$ и $y^2 = 4-2x$ (пластина однородна).

Решение. Изобразим пластину (рис.4).

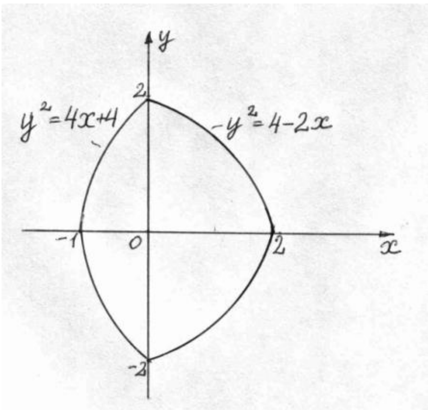


Рис. 4

Она симметрична относительно оси Ох, поэтому, как известно из физики, центр тяжести пластины лежит на этой оси, то есть $y_C = 0$. Найдём абсциссу центра масс. Вычислим массу $m = \iint\limits_D \rho dxdy$.

$$m = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx = \int\limits_{-2}^{2} x\Big|_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy = \int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4}\right)dy =$$

$$= 2\cdot\int\limits_{0}^{2}\left(3 - \frac{3}{4}y^2\right)dy = 2\cdot\left(3y - \frac{3}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 8.$$

$$M_y = \iint\limits_D \rho x dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} xdx = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}\left[\left(\frac{4-y^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y^2-4}{4}\right)^2\right]dy = \int\limits_{0}^{2}\left(\frac{16-8y^2+y^4}{4} - \frac{y^4-8y^2+16}{16}\right)dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{2}\left(3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{16}y^4\right)dy = \left(3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3}{80}y^5\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{5}.$$

Тогда $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{16}{5} : 8 = \dfrac{2}{5}$. Таким образом, $C(\dfrac{2}{5};0)$.

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} xydx + x^2dy$

а) вдоль прямой y=2x+1 между точками A(0;1) и B(2;5),

б) вдоль параболы y=x^2 между точками A(0;0) и B(;,4).

Решение. а) $\int\limits_{AB} xydx + x^2dy = \int\limits_{0}^{2}[x(2x+1) + x^2\cdot 2]dx =$

$$= \int\limits_{0}^{2}(4x^2 + x)dx = \left(\frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{3} + 2 = \frac{38}{3};$$

б) $\int\limits_{AB} xydx + x^2dy = \int\limits_{0}^{2}(x\cdot x^2 + x^2\cdot 2x)dx = \int\limits_{0}^{2}3x^3dx = \dfrac{3x^4}{4}\Bigg|_0^2 = \dfrac{3\cdot 16}{4} = 12.$

2.5. Ряды

Задание 7. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$, г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

Решение. а) Этот ряд сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Применим признак сравнения в предельной форме. Действительно, если рассматривать лишь старшие степени n в $u_n=\frac{n}{n^2+4\sqrt{n}}$, то u_n имеет порядок $\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4\sqrt{n}}:\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot n}{n^2+4\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$.

Таким образом, данный ряд расходится, как и гармонический.

б) Очевидно, $u_n=\frac{1}{n^2+4}$ и $v_n=\frac{1}{n^2}$ - это величины одинакового порядка, так как обе они содержат n^2 в знаменателе. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+4}:\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$. И оба ряда сходятся, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ сходится вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

в) $u_n=\frac{e^n}{n!}=\frac{e^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$; $u_{n+1}=\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}$. Тогда согласно признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)\cdot e^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1}=e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=e\cdot 0=0<1.$$

Ряд сходится.

г) Члены ряда $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ положительны и монотонно убывают. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, очевидно, также положительна при *x≥2* и монотонно убывает.

Вычислим (или исследуем на сходимость):

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_2^b =$$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} 2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2} = +\infty$, так как $\ln x \to \infty$ при $x \to +\infty$. Несобственный интеграл, а вместе с ним и числовой ряд расходятся.

Задание 8. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n}{n^2}$ и исследовать ряд на его концах.

Решение. Интервал сходимости будем искать по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+5|^{n+1} n^2}{(n+1)^2|x+5|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+5| n^2}{(n+1)^2} = |x+5|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x+5|.$$

Этот предел будет меньше единицы, если $|x+5| < 1$. Тогда $-1 < x+5 < 1$, а $-6 < x < -4$. Следовательно, степенной ряд абсолютно сходится в интервале $(-6,-4)$.

Исследуем поведение ряда на концах этого интервала, полагая *x* равным сначала –4, а затем –6.

Если $x = -4$, то имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-4+5)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Известно, что этот ряд сходится.

Если $x = -6$, то получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-6+5)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Этот ряд сходится абсолютно, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, сходится.

Таким образом, степенной ряд абсолютно сходится на отрезке [-6,-4].

Задание 9. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \sqrt[3]{27-x}$.

Решение. Зная разложение функции $(1+x)^m$ в биномиальный ряд, сходящийся на интервале (-1,1), преобразуем данную функцию так, чтобы воспользоваться биномиальным рядом:

$$\sqrt[3]{27-x}=\sqrt[3]{27(1-\frac{x}{27})}=3\sqrt[3]{1-\frac{x}{27}}=3(1-\frac{x}{27})^{\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся биномиальным разложением при $m=\frac{1}{3}$, полагая в разложении x равным $-\frac{x}{27}$:

$$3(1-\frac{x}{27})^{\frac{1}{3}}=3\Big[1+\frac{1}{3}(-\frac{x}{27})+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(-\frac{x}{27})^2+\ldots+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\ldots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}(-\frac{x}{27})^n+\ldots\Big],\text{ где }\left|\frac{x}{27}\right|<1.$$

После преобразований получим

$$3(1-\frac{x}{27})^{\frac{1}{3}}=3+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})\ldots(\frac{4}{3}-n)}{n!}(-\frac{x}{27})^n=$$

$$=3+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})\ldots(\frac{4-3n}{3})}{n!}(\frac{x}{27})^n=$$

$$=3-\frac{x}{27}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^{n-1}n!}\frac{x^n}{27^n}(-1)^n(-1)^{n-1}=$$

$$=3-\frac{x}{27}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8..(3n-4)}{n!3^{n-1}\cdot3^{3n}}x^n = =3-\frac{x}{27}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-4)}{n!3^{4n-1}}x^n.$$

Полученный ряд сходится в интервале -27<x<27.

Задание 10. Используя соответствующие разложения, вычислить с точностью до 0,0001 а) cos0,3, б) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

Решение. а) Используя разложение в ряд косинуса, получим: $\cos 0{,}3=1-\frac{0{,}3^2}{2}+\frac{0{,}3^4}{4!}-\frac{0{,}3^6}{6!}+\ldots=1-0{,}045+0{,}0003-0{,}000001+\ldots$. Так как четвертый член ряда меньше заданной погрешности, то согласно признаку Лейбница сумма всех членов ряда, начиная с четвертого, не превосходит по модулю четвертого члена и, следовательно, меньше заданной погрешности. Таким образом, cos0,3 получаем, отбрасывая все члены ряда, начиная с четвертого. Имеем cos0,3≈1-0,045+0,0003=0,9553.

б) Разложим функцию в степенной ряд :

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \ldots$$

Тогда имеем:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots) dx =$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^8}{4!} dx - \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{2\cdot 5}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{6\cdot 7}\Big|_0^1 + \frac{x^9}{24\cdot 9}\Big|_0^1 - .. =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + .. \qquad .$$

Так как получившийся ряд является знакочередующимся, то сумма знакочередующегося ряда не превосходит первого члена такого ряда. Ясно, что часть ряда, которую в задаче следует отбросить, также является знакочередующимся рядом и его сумма не превзойдет модуля первого отброшенного члена ряда.

Таким образом, первый отброшенный член ряда должен быть меньше заданной погрешности, т.е. 0,0001.

Вычислив еще несколько членов ряда $-\frac{1}{1320}, -\frac{1}{9360}, -\frac{1}{75600}$, видим, что $\frac{1}{75600} < 0{,}0001$. Отбросив этот и следующие за ним члены ряда, получим

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} = 0{,}7468.$$

Задание 11. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x$ на промежутке $(0,\pi)$ по синусам.

Решение. Доопределим функцию $y = x$ до периодической нечетным образом.

Тогда $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx$. Вычислим интеграл по частям: $\int udv = uv-\int vdu$. Имеем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx=\begin{bmatrix} u=x, du=dx \\ dv=\sin nxdx, v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{bmatrix}=$$

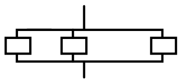
$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right),$$

т.е. $b_n=-\frac{2}{n}\cos n\pi$, а $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}\cos n\pi\cdot\sin nx$, где $x\in(0,\pi)$ или

$$S(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

2.6. Элементы теории вероятностей

Задание 12. Для повышения надежности прибора он дублируется (n-1) такими же приборами. Надежность каждого прибора равна p. Найти надежность P системы.



Решение. Система работает, если работает хотя бы один прибор. Тогда вероятность работы системы, т. е. ее надежность вычисляем по формуле $P=1-q_1q_2...q_n$. В нашем случае каждый прибор работает с вероятностью p, а отказывает с вероятностью q=1-p. Так что надежность системы будет равна: $P=1-(1-p)^n$.

Задание 13. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, где стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин как 3:7. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина равна 0,1, для легковой машины эта вероятность равна 0,2. Какова вероятность того, что машина, проезжающая по шоссе, заправится на этой бензоколонке.

Решение. Для решения задачи применим формулу полной вероятности $P(A)=P(H_1)P_{H_1}P(A)+P(H_2)P_{H_2}P(A)$.

Пусть A – событие, состоящее в том, что заправляется машина, подъехавшая к бензоколонке.

Обозначим через H_1 событие, состоящее в том, что по шоссе проедет грузовая машина, а через H_2 – легковая.

Так как на каждые 10 проезжающих машин приходится три грузовых и семь легковых, то $P(H_1) = 0{,}3$, а $P(H_2) = 0{,}7$. Вероятность того, что заправится грузовая машина $P_{H_1}(A) = 0{,}1$, а вероятность того, что заправится легковая машина $P_{H_2}(A) = 0{,}2$. Тогда, подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим $P(A)$=0,3·0,1+0,7·0,2=0,17.

Задание 14. Прибор состоит из 7 узлов, для каждого из которых надежность равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t откажет: а) хотя бы один узел; б) ровно один; в) ровно два; г) не менее двух узлов.

Решение. Вероятность того, что из семи узлов откажет хотя бы один узел, находим как вероятность противоположного события, состоящего в том, что все узлы исправны. Тогда p=0,2, q=1-p=0,8. Следовательно $P(A) = 1 - q^7$ =1- $0{,}8^7$ =1-0,1678=0,8322.

Далее применим формулу Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, q = 1 - p$.

$$P_7(1) = C_7^1 p^1 q^6 = 7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^6 = 0{,}3670; P(2) = C_7^2 p^2 q^5 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 =$$
=0,2752.

Событие–откажет не менее двух из семи узлов противоположно тому, что либо ни один узел не откажет, либо откажет один из семи узлов. Значит, $P(m \geq 2) = 1 - P_7(0) - P_7(1) = 1 - 0{,}8^7 - 0{,}3670$ =0,4233.

Задание 15. У электрика имеется 8 лампочек, 3 из которых бракованные. Электрик наудачу отбирает 3 лампочки и ввинчивает их в сеть. Составить закон распределения случайной величины X–числа бракованных лампочек, отобранных электриком, вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Вероятность того, что лампочка окажется бракованной, p=3/8=0,375. Число бракованных лампочек среди трех отобранных может быть равно 0, 1, 2, 3, т.е. случайная величина X принимает такие возможные значения. Вероятности этих возможных значений вычислим по формуле Бернулли.

$P_3(0)=q^3=0{,}625^3=0{,}2441$; $P_3(1)=C_3^1pq^2=3\cdot 0{,}375\cdot 0{,}3906$ =0,439 5; $P_3(2)=C_3^2p^2q=3p^2q=3\cdot 0{,}375^2\cdot 0{,}625$ =0,2637;

$P_3(3)=p^3=0{,}375^3$=0,0527. Контроль:0,2441+0,4395+0,2637+0,4395=1.

Искомый закон распределения *X*:

X	0	1	2	3
p	0,2441	0,4395	0,2637	0,0527

Математическое ожидание

$$M(X)=0\cdot 0{,}2441+1\cdot 0{,}4395+2\cdot 0{,}2637+3\cdot 0{,}0527=1{,}125.$$

Дисперсия $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$. Запишем закон распределения X^2:

X^2	0	1	4	9
p	0,2441	0,4395	0,2637	0,0527

Тогда $M(X^2)$ =0·0,2441+1·0,4395+4·0,2695+9·0,0527=3,1168. $D(X)$ =3,1168-1,2656=1,8512. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ =1,3606.

Найдем теперь функцию $F(x)=P(X<x)$. Значения случайной величины разбивают числовую ось на пять интервалов. В каждом интервале вычислим функцию.

Если $x\le 0$,то левее этого x нет ни одного значения случайной величины, и, значит, $F(x)=P(X<x)=0$.

Если $0<x\le 1$, то $F(x)$=0,2441.

Если$1<x\le 2$, то $F(x)$=0,2441+0,4395=0,6836.

Если $2<x\le 3$, то $F(x)$=0,6836+0,2637=0,9473.

Наконец, если $x>3$,то $F(x)$=0,9473+0,0527=1.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0{,}2441, & 0<x\le 1,\\ 0{,}6836, & 1<x\le 2,\\ 0{,}9473, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

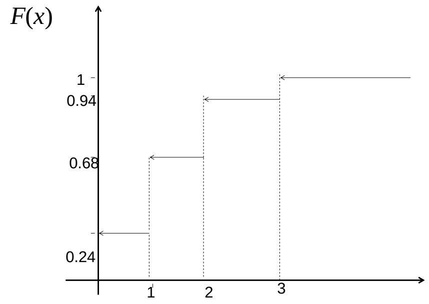


Рис. 5

Задание 16. Производится измерение длины детали без систематических ошибок одного знака. Случайные ошибки измерения X распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ =20 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

*Решение***.** Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, поэтому применима формула $P(|X|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)$. Положим $\delta=15, \sigma=20 \Rightarrow P(|X|<15)=2\Phi(0{,}75)$. По таблице значений функции Лапласа находим $\Phi(0{,}75)=0{,}2734$, поэтому искомая вероятность $P(|X|<15)$=2·0,2734=0,5468.

Задание 17. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Cx^2, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

Найти постоянную C, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, вероятность попадания значений X в интервал (2;2,5).

Решение. Для нахождения постоянной C воспользуемся свойством плотности вероятности: $\int_a^b f(x)dx=1$.

$$\int_0^3 Cx^2dx = C\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 = C\cdot 9=1, \Rightarrow C=\frac{1}{9}.$$

Таким образом, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{9}x^2, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины находим по формуле $M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx=\dfrac{1}{9}\int\limits_0^3 x^3dx=\dfrac{1}{9}\dfrac{x^4}{4}\Bigg|_0^3=\dfrac{9}{4}.$,

$$D(X)=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 x^4dx-(\frac{9}{4})^2=\frac{27}{5}-\frac{81}{16}=4{,}8625.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{4{,}8625}=2.2.$$

Функцию $F(x)$ найдем по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

При $x\le 0$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx=0,$

при $0<x\le 3$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_0^x\frac{1}{9}x^2dx=\frac{1}{27}x^3,$

при $x>3$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_0^3\frac{1}{9}x^2dx+\int\limits_3^x 0dx=1.$

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{27}x^3 & ,0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал найдем по формуле $P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$. В нашем случае $P(2<x<2{,}5)=F(2{,}5)-F(2)=\dfrac{125}{8\cdot 27}-\dfrac{8}{27}=\dfrac{61}{216}.$

2.7. Элементы математической статистики

Рассмотрим применение статистических методов к определению погрешности обработки материалов. Измерив все изготовленные детали партии, их разбивают на группы с одинаковыми размерами. Результаты измерений изображают графически: по оси ординат откладывают число деталей с одинаковыми размерами, т.е. частоты, а по оси абсцисс – размеры или их отклонения. Полученные точки соединяют ломаной, которую при большом числе измерений можно считать приближением кривой рассеяния или распределения размеров. Размах выборки $\xi = x_{\max} - x_{\min}$ определяет величину рассеяния размеров.

Если все погрешности случайны, то эта кривая симметрична, если же погрешности систематические, то она асимметрична. Величина рассеяния размеров не должна быть больше допуска на обработку, иначе будет брак. Случайные погрешности подчиняются нормальному закону:

$y = f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, где *y*–частота появления погрешности, σ–среднее квадратическое отклонение, *x*–отклонение действительных размеров от средних: $x = x_i - \bar{x}$. Если разбить все размеры в партии по их интервалам на группы, то $\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{m_i x_i}{n}$, где m_i - количество деталей в каждой группе, x_i – размеры отдельных групп деталей в каждом интервале, $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$ – общее число измерений, k - число групп. $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$, где $x_i - \bar{x}$ -отклонения действительных размеров деталей от средних в каждой группе.

Кривая распределения погрешностей представляет собой кривую Гаусса. Если $x_i = \bar{x}$, , то $y_{MAX} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}4\dfrac{1}{\sigma}$, а ординаты точек перегиба $y\big|_{X=\pm\sigma} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{y_{MAX}}{\sqrt{e}} \approx 0{,}24\dfrac{1}{\sigma}$. По правилу трех σ в интервале $(-3\sigma, 3\sigma)$ находится 99,7% всех обработанных деталей, так что если допуск на обработку больше шести σ, то практически все детали пригодны.

Вероятность получения брака определяют для двух случаев:

1. при смещении центра поля рассеяния от середины поля допуска по оси абсцисс;
2. при совмещении центра поля рассеяния с серединой поля допуска.

1. Величина смещения центра поля рассеяния от середины поля допуска $\Delta x_Ц = \bar{x} - \dfrac{x_B + x_H}{2}$, где x_B и x_H -соответственно верхнее и нижнее предельное значения размеров.

Вероятность получения брака по верхнему пределу допуска $P_B = P(z_B < z < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(z_B) = 0{,}5 - \Phi(z_B)$, а по нижнему $P_H = P(-\infty < z < z_H) = \Phi(z_H) - \Phi(-\infty) = 0{,}5 + \Phi(z_H)$, где $z_B = \dfrac{x_B - \bar{x}}{\sigma}, z_H = \dfrac{x_H - \bar{x}}{\sigma}$. Вероятность брака $P = P_B + P_H$.

2. Центр поля рассеяния совпадает с серединой поля допуска, т. е. $\Delta x_Ц = 0 \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{x_B + x_H}{2}$. Вероятность получения брака в этом случае определяют по формуле $P = 1 - 2\Phi(\dfrac{x_B - x_H}{2\sigma})$.

Задание 17. В таблице приведены данные фактических измерений диаметров роликов, изготовленных методом автоматического получения размеров. В партии 50 деталей с номинальным размером 20 мм; при заданном допуске $\begin{pmatrix} +0{,}03 \\ -0{,}08 \end{pmatrix}$ мм требуется: 1) построить кривую распределения фактических размеров; 2) сопоставить полученную кривую с теоретической кривой Гаусса; 3) установить характеристику рассеяния размеров; 4) определить вероятность заданного допуска и вероятность брака.

19,90	19,94	20,05	19,94	20,04
19,87	19,98	20,01	19,95	19,95
20,02	19,98	19,99	19,97	19,91
19,89	19,99	20,00	19,99	19,93
19,90	20,05	20,03	19,97	19,95
19,99	20,01	19,96	19,92	20,01
19,97	19,99	19,94	19,94	20,02
19,94	19,98	19,97	19,95	20,01
19,97	20,05	20,03	19,99	19,98
19,95	20,07	20,00	19,97	19,98

Решение. Приведенные размеры разбиваем на 10 групп с интервалом $h = 0{,}02$ мм.

Заполним таблицу.

№ п/п	Интервалы размеров	$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	m_i	$x_i^* m_i$	$x_i^* - \bar{x}$	$(x_i^* - \bar{x})^2 \cdot 10^4$	$m_i 10^4 \cdot (x_i^* - \bar{x})$
1	19,87-19,89	19,88	2	39,76	-0,09	81	162
2	19,89-19,91	19,90	3	59,70	-0,07	49	147
3	19,91-19,93	19,92	4	79,68	-0,05	25	100
4	19,93-19,95	19,94	7	139,58	-0,03	9	63
5	19,95-19,97	19,96	8	159,68	-0,01	1	8
6	19,97-19,99	19,98	11	219,78	0,01	1	11
7	19,99-20,01	20,00	6	120,00	0,03	9	54
8	20,01-20,03	20,02	4	80,08	0,05	25	100
9	20,03-20,05	20,04	4	80,16	0,07	49	196
10	20,05-20,07	20,06	1	20,06	0,09	81	81

$\sum$ 50 998,48 922

Находим: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n} = \frac{998.48}{50} = 19{,}97$;

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i^* - \bar{x})^2 m_i}{n}} = \sqrt{\frac{922}{50 \cdot 10^4}} = 0{,}0429 \approx 0{,}04 .$$

Абсолютное поле рассеяния по фактическим измерениям $\xi = x_{\max} - x_{\min}$ =20,07-19,87=0,20.

Для построения кривой Гаусса ищем:

$$y_{\max} = 0{,}4 \frac{nh}{\sigma} = 0{,}4 \frac{50 \cdot 0{,}02}{0{,}04} = 10{,}00 ; \quad y_{\sigma} = 0{,}24 \frac{nh}{\sigma} = 0{,}24 \frac{50 \cdot 0{,}02}{0{,}04} = 6{,}00 .$$

Величина поля рассеяния $x = \pm 3\sigma = \pm 3 \cdot 0{,}04 = \pm 0{,}12$.

По полученным величинам строим кривую Гаусса, откладывая точки перегиба $(\bar{x}-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ и $(\bar{x}+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$, т. е. (19,93;6,00) и (20,01;6,00) и вершину (19,97;10,00).

На этом же чертеже в одном масштабе построим и график фактических размеров (полигон частот). Сюда же нанесем и величину заданного поля допуска $\begin{pmatrix} +0,03 \\ -0,08 \end{pmatrix}$ с предельными размерами $x_B = 20,03, \quad x_H = 19,92$.

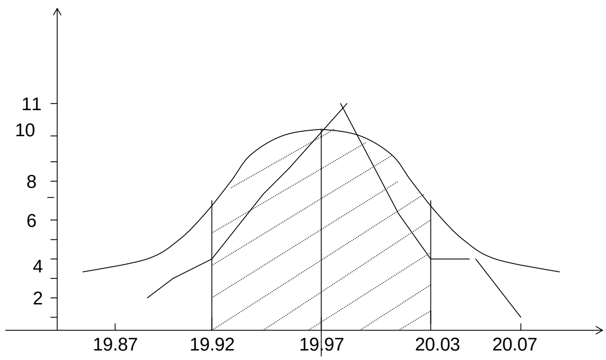


Рис. 6

Величина заштрихованной площади дает вероятность получения размеров деталей в границах допуска.

Центр поля рассеяния $\bar{x} = 19,97$, а середина поля допуска (20,03+19,92)/2=19,975. $\Delta x_Ц = \bar{x} - \frac{x_B + x_H}{2}$ =19,97-19,975=0,005. Имеем случай смещения центра поля рассеяния от середины поля допуска.

Найдем значения аргумента *z*. $z_B = \frac{x_B - \bar{x}}{\sigma} = \frac{20,03 - 19,97}{0,04} = 1,50$;

$z_H = \frac{x_H - \bar{x}}{\sigma} = \frac{19,92 - 19,97}{0,04} = -1,25$.

Вероятность брака по верхнему и нижнему пределу допуска равны соответственно: $P_B = 0{,}5 - \Phi(1{,}50) = 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668$;

$$P_H = 0{,}5 + \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 - 0{,}3944 = 0{,}1056.$$

Вероятность брака равна P= 0,0668+0,1056=0,1724.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Контрольная работа 1

Дифференциальные уравнения, кратные и криволинейные интегралы

1-10. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка:

1. а) $\left(y^2 - xy\right)dx + \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0;$ б) $e^{\sin x} \cdot dy - y^3 \cdot \cos x dy = 0.$

2. а) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx;$ б) $\left(4 + y^2\right) - x^2 \cdot y \cdot y' = 0.$

3. а) $\left(x - y \cdot \cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x \cdot \cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0;$ б) $y' \cdot \sqrt{4 - x^2} = y.$

4. а) $\left(x^2 - 1\right) \cdot y' - xy = x^3 - x;$ б) $\sqrt{9 - x^2}\,dy - ydx = 0.$

5. а) $\left(y^2 + xy^2\right)dx + \left(x^2 - yx^2\right)dy = 0.$ б) $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1};$

6. а) $2x \cdot \sqrt{1 - y^2} \cdot dx + ydy = 0.$ б) $xy' + x \cdot e^{\frac{y}{x}} = y;$

7. а) $y' \cdot \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x;$ б) $2dy - \left(1 + 4y^2\right) \cdot dx = 0.$

8. а) $y' + \dfrac{y}{x} + xy^2 = 0;$ б) $e^{-x} \cdot y^2 \cdot dx - dy = 0.$

9. а) $y' - \dfrac{y}{x \ln x} = x \ln x;$ б) $\left(x^2 - 1\right) \cdot dy + 2xy^2 dx = 0.$

10. а) $(x - y) \cdot ydx - x^2 dy = 0;$ б) $y' \cdot ctgx + y = 2.$

11-20. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным условиям:

11. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1);$ $y(2) = 1,$ $y'(2) = -1.$

12. $y \cdot y'' - (y')^2 = 0;$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 2.$

13. $\left(1 + x^2\right) \cdot y'' - 2xy' = 0;$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 3.$

14. $1 + (y')^2 = 2y \cdot y'';$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 1.$

15. $y \cdot y'' + (y')^2 = (y')^3;$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 1.$

16. $y'' = \dfrac{y'}{x} \cdot \left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right);$ $y(1) = \dfrac{1}{2},$ $y'(1) = 1.$

17. $2y \cdot y'' - 3(y')^2 = 4y^2;$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0.$

18. $(x+1)\cdot y''+x\cdot(y')^2=y';\quad y(1)=-2,\quad y'(1)=4.$

19. $2y\cdot y''+y^2-(y')^2=0;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

20. $y\cdot y''+(y')^2=1;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

21-30. Решить уравнение:

21. $y''-2y'=e^{2x}+5.$

22. $y''-2y'-8y=e^{x}-8\cos 2x.$

23. $y''+y'=5x+2e^{x}.$

24. $y''-y'=2x-1-3e^{x}.$

25. $y''-2y'+10y=\sin 3x+e^{x}.$

26. $y''-4y'+4y=2e^{2x}+\dfrac{x}{2}.$

27. $y''-3y'=x+\cos x.$

28. $y''-y'+y=x^3+6.$

29. $y''-4y=x^2e^{2x}.$

30. $y''+y'-2y=8\sin 2x-e^{-2x}.$

31-40. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений.

31. $\begin{cases} x'=x+3y+2 \\ y'=x-y+1 \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=2.$

32. $\begin{cases} x'=-x+3y+1 \\ y'=x+y \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=2.$

33. $\begin{cases} x'=x+4y \\ y'=2x-y+9 \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

34. $\begin{cases} x'=x+2y+1 \\ y'=4x-y \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

35. $\begin{cases} x'=2x+5y \\ y'=x-2y+2 \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1.$

36. $\begin{cases} x'=-2x+5y+1 \\ y'=x+2y+1 \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2.$

37. $\begin{cases} x'=-2x+6y+1 \\ y'=2x+2 \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

38. $\begin{cases} x'=2x+3y+1 \\ y'=4x-2y \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0.$

39. $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=2x+y+1 \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=5.$

40. $\begin{cases} x'=3x+5y+2 \\ y'=3x+y+1 \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2.$

41. Найти массу пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами $OB = a, OA = в$, если ее плотность в любой точке равна расстоянию точки от катета OA.

42. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и прямой OA, проходящей через начало координат и точку $A\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

43. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 1, x + 2y = 2, y = 0$, относительно осей Ox и Oy.

44. Найти моменты инерции треугольника, ограниченными прямыми $x + y = a, x = a, y = a$, относительно осей Ox и Oy, если ее плотность пропорциональна ординате точки.

45. Найти массу куба $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$, если его плотность в каждой точке выражается формулой $\gamma(x, y, z) = x + y + z.$

46. Найти момент инерции куба $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ относительно его ребра.

47. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

48. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной линиями $xy = a^2, y^2 = 8ax, x = 2a\ (a > 0)$.

49. В теле, имеющем форму полушара $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, z \ge 0$, плотность изменяется пропорционально расстоянию точки от центра. Найти центр тяжести этого тела.

50. В квадратной пластинке со стороной a плотность пропорциональна квадрату расстояния от одной из ее вершин. Вычислить момент инерции пластинки относительно стороны, проходящей через эту вершину.

51-60. Вычислить криволинейные интервалы.

51. $\int\limits_l \frac{x}{x^2 + y^2}dx - \frac{y}{x^2 + y^2}dy$, если l – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

52. $\int\limits_l \cos y dx - \sin x dy$, если l – отрезок AB биссектрисы второго координатного угла, абсцисса точки A равна 2, ордината точки B равна 2.

53. $\int\limits_l 2xdy-3ydx$, если l – контур треугольника с вершинами $A(1;2), B(3;1), C(2;5)$.

54. $\int\limits_l (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)dy$, если l – контур треугольника с вершинами $O(0;0), A(1;0), \mathrm{B}(0;1)$.

55. $\int\limits_A^B \frac{ydx-xdy}{y^2}$, если $A(1;2), B(2;1)$, AB – любой путь, не пересекающий ось Ox.

56. $\int\limits_A^B xdx+ydy-zdz$, если $A(1;0;-3), B(6;4;8)$, AB - любой путь, соединяющий точки A и B.

57. $\int\limits_l (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, если $l: x=a\cos t, y=a\sin t, \mathrm{z}=bt$, t изменяется от 0 до 2π, a и b – постоянные.

58. $\int\limits_l \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, если $l: x=a\cos t, y=a\sin t$, t изменяется 0 до 2π.

59. $\int\limits_l (2a-y)dx+xdy$, если $l: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, t изменяется 0 до 2π.

60. $\int\limits_l (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$, если l- ломаная OAB, где $O(0;0), \mathrm{A}(2;0), \mathrm{B}(4;2)$.

Контрольная работа 2

Ряды

61-70. Исследовать на сходимость ряд с общим членом U_n:

61. а) $U_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; б) $U_n=\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$;

в) $U_n=\left(\frac{6n+1}{6n+5}\right)^{2n+1}$; г) $U_n=\frac{\arcsin n}{\sqrt{1-n^2}}$.

62. а) $U_n = \dfrac{\sqrt[3]{n+2}}{n^2(n+1)}$; б) $U_n = \dfrac{(n+1)!}{n^n}$;

в) $U_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{n^2+1}$ г) $U_n = \dfrac{1}{(1+n^2)\,arctg n}$.

63. а) $U_n = \dfrac{n^3}{\sqrt{n^5+n}}$; б) $U_n = \dfrac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$;

в) $U_n = n\cdot\left(\dfrac{3n-1}{4n+2}\right)^n$; г) $U_n = \dfrac{arctg^3 n}{1+n^2}$.

64. а) $U_n = \dfrac{n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$; б) $U_n = \dfrac{(n!)^2}{(3n+1)\cdot(2n)!}$;

в) $U_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n^2}$; г) $U_n = \dfrac{arcctg n}{1+n^2}$.

65. а) $U_n = \dfrac{\sqrt[4]{n}+1}{n^4+n^2-1}$; б) $U_n = \dfrac{6^n(n^2-1)}{n!}$;

в) $U_n = n^4\cdot\left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$; г) $U_n = n\cdot e^{-n}$.

66. а) $U_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3-1}}$; б) $U_n = \dfrac{n!\cdot 3^n}{n^n}$;

в) $U_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2}$; г) $U_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

67. а) $U_n = \dfrac{n^2+1}{n^3\cdot\sqrt{n-1}}$; б) $U_n = \dfrac{n!\cdot\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$;

в) $U_n = \dfrac{n^5\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$; г) $U_n = \dfrac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}$.

68. а) $U_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{n^2-n+3}$; б) $U_n = \dfrac{10^n\cdot 2n!}{(2n)!}$;

в) $U_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n\cdot\dfrac{n}{5^{-n}}$; г) $U_n = \dfrac{1}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$;

69. а) $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}$; б) $U_n = \dfrac{n!\cdot e^n}{n^n}$;

в) $U_n = \left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{n^2}$; г) $U_n = \dfrac{\sqrt[3]{\ln(n+5)}}{n+5}$.

70. а) $U_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^3+5}$; б) $U_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$;

в) $U_n = 2^{n-1}\cdot e^{-n}$; г) $U_n = \dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)}$.

71-80. Найти область сходимости степенного ряда с общим членом U_n:

71. $U_n = \dfrac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n}$. **72.** $U_n = \dfrac{(x+4)^n}{(n+1)\cdot(n-2)}$.

73. $U_n = \dfrac{3^n\cdot(x-1)^n}{\sqrt{n}}$. **74.** $U_n = \dfrac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

75. $U_n = \dfrac{(x+1)^{2n}}{n\cdot 4^n}$. **76.** $U_n = \dfrac{(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

77. $U_n = \dfrac{n\cdot(x-4)^n}{2n+3}$. **78.** $U_n = \dfrac{n\cdot(x+2)^n}{(n+1)\cdot(n+2)}$.

79. $U_n = \dfrac{(n+1)\cdot(x-5)^n}{3^n\cdot(n-2)}$. **80.** $U_n = \dfrac{n^2\cdot(x+5)^n}{2n^2-1}$.

81-90. Используя соответствующие разложения функций в степенной ряд, вычислить с точностью до 0,0001:

81. а) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{1-e^{-3x}}{x}dx$; **82.** а) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$;

б) $\ln 1,1$. б) $\sqrt[5]{250}$.

83. а) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{216+x^3}}$; **84.** а) $\int\limits_0^{0,2}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

б) $\ln 1,25$. б) $\dfrac{1}{e^2}$.

85. а) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}dx$; **86.** а) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}dx$.

б) $\sqrt[3]{500}$. б) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

87. а) $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$;

б) $\sqrt[3]{1{,}015}$.

88. а) $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2} dx$;

б) $\sin 18^0$.

89. а) $\int\limits_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$;

б) $\frac{1}{e}$;

90. а) $\int\limits_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$;

б) $\cos 12^0$.

91-100. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням x:

91. $f(x) = \frac{9}{20 - x - x^2}$.

92. $f(x) = \ln(1 - x - 6x^2)$.

93. $f(x) = \frac{6}{8 + 2x - x^2}$.

94. $f(x) = \frac{7}{12 - x - x^2}$.

95. $f(x) = \ln(1 + 2x - 8x^2)$.

96. $f(x) = \frac{5}{6 + x - x^2}$.

97. $f(x) = \ln(1 - x - 20x^2)$.

98. $f(x) = \frac{3}{2 - x - x^2}$.

99. $f(x) = \ln(1 - x - 12x^2)$.

100. $f(x) = \frac{5}{1 + x - 6x^2}$.

101-106. Функцию $f(x)$ разложить в интервале $(0, \pi)$ в неполные ряды Фурье:

а) по синусам кратных дуг;

б) по косинусам кратных дуг;

101. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < \mathrm{x} \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \mathrm{x} < \pi. \end{cases}$

102. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < \mathrm{x} \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \mathrm{x} < \pi. \end{cases}$

103. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < \mathrm{x} \le \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < \mathrm{x} < \pi. \end{cases}$

104.

$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x \le 2; \\ 0, & 2 < x < \pi. \end{cases}$

105. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$ **106.** $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{3};\\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}, & \dfrac{\pi}{3}<x<\pi.\end{cases}$

107-110. Функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$:

107. $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x\le 0;\\ bx, & 0<x<\pi.\end{cases}$ **108.** $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0;\\ x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

109. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0;\\ 3, & 0<x<\pi.\end{cases}$ **110.** $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi<x\le 0;\\ 3x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Контрольная работа 3

Теория вероятностей и математическая статистика

111. В цехе работают 20 станков. Из них 10 станков марки А, 6 станков марки В, 4 станка марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равна 0,9; 0,8; 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

112. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт окажется дефектным? Случайно выбранный болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он произведён третьей машиной?

113. Прибор состоит из двух последовательно включённых узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого узла равна 0,9, второго узла – 0,8. За время испытания прибора зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятности следующих событий: 1) отказал первый узел; 2) отказал второй узел.

114. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 2:3:5, причём вероятности брака для этих заводов соответственно равны 0,02; 0,04; 0,01. Приобретённый прибор оказался бракованным. Найти вероятности следующих событий: 1) прибор произведён первым заводом; 2) прибор произведён вторым заводом; 3) прибор произведён третьим заводом.

115. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех даёт 0,001% брака, второй цех – 0,003%. Для контроля отобрано 40 деталей из первого цеха и 20 деталей из второго цеха. Эти 60 деталей смешаны в одну партию и из неё наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она окажется бракованной? Какова вероятность, что извлечённая бракованная деталь поступила из второго цеха?

116. Партия транзисторов, среди которых 5% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует вероятность, равная 0,01 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность, что случайно выбранный из партии транзистор будет признан: 1) дефектным; 2) исправным?

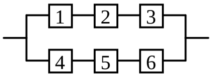
117. В первом ящике 20 изделий, из них 15 стандартных, во втором ящике 30 изделий, из них 24 стандартные, в третьем ящике 10 изделий, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь, из наудачу выбранного ящика окажется стандартной? Наудачу взятая деталь оказалась стандартной, какова вероятность, что она взята из первого ящика?

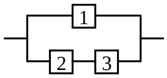
118. На двух станках обрабатываются одинаковые детали. Вероятность того, что деталь, обработанная на первом станке, будет стандартной равна 0,9; на втором станке – 0,95. Производительность второго станка втрое больше производительности первого станка. Какова вероятность, что взятая наудачу деталь окажется стандартной? Случайно взятая деталь оказалась стандартной, какова вероятность того, что она обработана на втором станке?

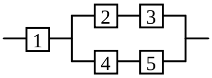
119. В двух ящиках содержится по 15 деталей, причём в первом ящике 9 стандартных, во втором – 10. Из первого ящика наудачу извлечена деталь и переложена во второй ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая после этого деталь из второго ящика окажется стандартной?

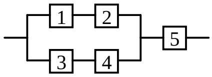
120. Имеется два цеха, выпускающих одну и ту же продукцию, причём их производительности относятся как 2:3. Первый цех выпускает 35% продукции первого сорта, второй – 40%. Продукция поступает на общий склад. Какой общий процент продукции первого сорта находится на складе?

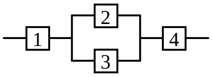
121-130. В задаче приведена схема соединения элементов, образующих цепь с одним входом и выходом. Отказы элементов – независимые совокупности события. Надёжность *к*-того элемента равна $p_к$. Отказ любого элемента приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вычислить надёжность (вероятность безотказной работы) всей схемы:

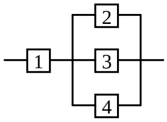
121. 

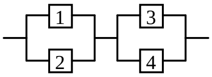
122. 

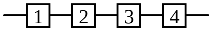
123. 

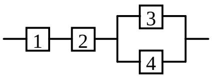
124. 

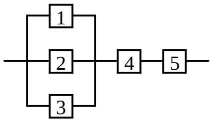
125. 

126. 

127. 

128. 

129. 

130. 

131-140. Составить ряд распределения дискретной случайной величины *X*. Найти её функцию распределения *F(x)* и построить её график. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

131. В партии из 10 деталей содержится 4 нестандартные. С целью проверки из партии случайным образом отбирают 2 изделия. Случайная величина *X* – число нестандартных деталей среди отобранных.

132. Трое стреляют в мишень по одному разу. Вероятности попадания в цель для каждого из них соответственно равны 0,7; 0,8; 0,85. Случайная величина *X* – число попаданий в мишень.

133. Из 20 приборов, испытываемых на надёжность, 5 высшего качества. Наудачу взяли 3 прибора. Случайная величина *X* – число приборов высшего качества среди взятых.

134. Вероятность выпуска нестандартного изделия равна 0,1. Из партии контролёр берёт изделие и проверяет его качество. Если изделие нестандартно, испытания прекращаются, партия задерживается. Если изделие стандартное, контролёр берёт следующее и так далее. Всего он проверяет не более пяти изделий. Случайная величина X – число проверяемых изделий.

135. Станок – автомат выпускает 2/3 всей продукции первым сортом и 1/3 вторым сортом. Отобрано 4 изделия. Случайная величина X – число изделий первого сорта среди отобранных.

136. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение. Случайная величина X – число светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

137. Вероятность перевыполнения плана заводом №1 равна 0,8; для завода №2 – 0,7; для завода №3 – 0,5. Случайная величина X – число заводов перевыполнивших план.

138. В партии 10% нестандартных изделий. Наудачу отобраны 4 детали. Случайная величина X – число нестандартных изделий, среди отобранных.

139. В первом ящике 20 деталей, из них 2 бракованные; во втором ящике 15 деталей, из них 3 бракованные; в третьем ящике 25 деталей, из них 5 бракованные. Из каждой коробки взято по одной детали. Случайная величина X – число бракованных деталей среди отобранных.

140. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень, при одном выстреле равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнётся, но не более четырёх патронов. Случайная величина X – число патронов, выданных стрелку.

141-150. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием равным M мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее m мм и не более n мм. Найти вероятности того, что длина наудачу взятой детали: 1) больше k мм; 2) меньше l мм.

141. $M=50$; $m=38$; $n=65$; $k=40$; $l=45$.

142. $M=40$; $m=25$; $n=57$; $k=35$; $l=55$.

143. $M=35$; $m=20$; $n=45$; $k=45$; $l=25$.

144. $M=30$; $m=18$; $n=42$; $k=40$; $l=50$.

145. $M=60$; $m=48$; $n=70$; $k=55$; $l=60$

146. $M=20$; $m=12$; $n=35$; $k=15$; $l=30$

147. $M=45$; $m=37$; $n=55$; $k=35$; $l=50$

148. $M=70$; $m=58$; $n=85$; $k=60$; $l=65$

149. $M=65$; $m=50$; $n=75$; $k=70$; $l=50$

150. $M=55$; $m=46$; $n=65$; $k=45$; $l=60$

151-160. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: 1) параметр C; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) математическое ожидание и дисперсию величины X; 4) вероятность попадания значений X в заданный интервал (a, b).

151. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ C(3x-x^2), 0<x\le 3,\\ 0, x>3.\end{cases}$$

$a=1; b=2.$

152. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ C\cos x, 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$a=\dfrac{\pi}{6}; b=\dfrac{\pi}{4}.$

153. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ C\sin x, 0<x\le \pi,\\ 0, x>\pi.\end{cases}$$

$a=\dfrac{\pi}{4}; b=\dfrac{\pi}{2}.$

154. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 1,\\ C(x-\dfrac{1}{2}), 1<x\le 2,\\ 0, x>2.\end{cases}$$

$a=\dfrac{3}{2}; b=\dfrac{5}{3}.$

155. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ C(1-\dfrac{x}{3}), 0<x\le 3,\\ 0, x>3.\end{cases}$$

$a=1; b=2.$

156. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le \dfrac{\pi}{2},\\ C\sin 2x, \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi,\\ 0, x>\pi.\end{cases}$$

$a=\dfrac{\pi}{4}; b=\dfrac{\pi}{3}.$

157. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ C\cos 2x, 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

$a=\dfrac{\pi}{8}; b=\dfrac{\pi}{4}.$

158. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le\dfrac{\pi}{6},\\ C\sin 3x, \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 0, x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

$a=\dfrac{\pi}{6}; b=\dfrac{\pi}{4}.$

159. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ C(1-\dfrac{x}{5}), 0<x\le 5,\\ 0, x>5.\end{cases}$$

$a=2; b=4.$

160. $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 2,\\ C(x-2), 2<x\le 3,\\ 0, x>3.\end{cases}$$

$a=\dfrac{5}{2}; b=3.$

161-170. В таблице приведены данные фактических измерений диаметров роликов, изготовленных методом автоматического получения размеров. В партии 50 деталей с номинальным размером *a* мм при заданном допуске $\begin{pmatrix}+a\\-b\end{pmatrix}$ мм требуется: 1) построить кривую распределения фактических размеров; 2) сопоставить полученную кривую с теоретической кривой Гаусса; 3) установить характеристику рассеяния размеров; 4) определить вероятность заданного допуска $\begin{pmatrix}+a\\-b\end{pmatrix}$ мм и вероятность брака.

161. *a*=25; *b*=0,02; *c*=0,09:

24,96	25,12	25,22	25,02	25,18
24,99	25,15	25,21	25,03	25,18
24,99	25,16	25,17	25,23	25,14
25,02	25,11	25,17	25,23	25,15
25,05	24,98	25,14	25,12	25,08
25,06	25,01	24,99	25,11	25,08
25,07	25,02	25,00	25,13	25,10
25,08	25,05	25,08	25,13	25,12
25,09	25,20	25,09	25,21	25,13
25,10	25,24	25,14	25,17	25,05

162. *a*=50; *b*=0,03; *c*=0,07:

50,00	49,98	50,01	49,96	49,95
50,00	50,03	49,97	50,02	49,97

50,01	49,97	49,99	50,00	49,99
49,95	50,00	50,03	49,98	49,99
49,97	50,00	50,03	49,99	50,01
49,98	50,01	49,99	50,01	50,00
50,00	50,02	50,01	50,00	50,02
50,01	50,04	50,00	50,00	50,01
50,02	50,03	50,02	50,01	50,05
50,04	49,97	50,00	49,98	50,02

163. a=60; b=0,02; c=0,06:

50,00	49,98	50,01	49,96	49,95
50,00	50,03	49,97	50,02	49,97
50,01	49,97	49,99	50,00	49,99
49,95	50,00	50,03	49,98	49,99
49,97	50,00	50,03	49,99	50,01
49,98	50,01	49,99	50,01	50,00
50,00	50,02	50,01	50,00	50,02
50,01	50,04	50,00	50,00	50,01
50,02	50,03	50,02	50,01	50,05
50,04	49,97	50,00	49,98	50,02

164. a=40; b=0,03; c=0,06:

40,03	39,92	40,08	40,05	40,9
39,83	39,99		39,91	40,05
39,87	40,05	39,93	39,87	39,92
40,04	40,07	39,96	40,01	40,00
40,06	39,88	40,10	40,04	40,17
39,91	40,15	40,04	40,01	39,97
40,00	39,96	40,16	40,08	40,13
39,95	39,97	40,11	40,10	40,7
40,01	40,01	40,09	40,12	40,12
40,05	39,99	40,05	40,02	40,01

165. a=30; b=0,04; c=0,05:

29,96	29,80	29,87	29,91	29,95
29,97	29,87	29,98	29,90	29,96
29,89	29,84	29,97	29,85	29,91
29,87	29,96	29,96	30,04	29,92
29,90	30,08	30,05	30,01	29,99
29,91	30,09	30,03	29,96	29,97
30,02	30,02	30,04	30,00	30,00

29,96	30,03	29,89	29,99	30,06
30,03	29,97	29,90	29,97	30,02
29,99	29,97	29,99	30,06	29,96

166. *a*=35; *b*=0,02; *c*=0,05:

35,10	35,06	35,07	35,18	35,06
35,11	34,91	35,11	35,14	35,15
35,12	35,23	35,12	35,04	34,92
34,86	35,03	35,21	35,08	35,14
34,92	35,09	34,93	35,06	35,19
35,04	35,10	34,94	35,05	35,03
35,08	34,93	35,22	35,09	35,08
35,99	35,24	35,06	35,05	35,00
35,08	35,98	35,05	34,92	35,16
35,14	35,16	35,04	35,04	35,07

167. *a*=45; *b*=0,03; *c*=0,06:

45,06	45,03	44,75	45,17	45,01
45,07	44,92	45,04	45,07	45,16
45,01	45,88	44,87	44,93	45,04
45,22	44,80	44,83	45,04	44,84
44,91	45,18	45,06	45,14	45,02
44,86	44,82	44,96	44,94	45,15
44,81	45,11	44,97	45,05	44,94
45,02	45,09	44,85	44,88	44,93
45,12	45,13	44,98	44,97	44,89
45,09	45,23	45,02	45,01	45,08

168. *a*=55; *b*=0,02; *c*=0,07:

55,18	54,83	55,05	55,04	55,03
55,19	54,87	55,06	55,05	55,04
54,94	54,97	55,05	54,88	55,05
54,94	55,04	54,93	54,94	54,95
54,96	54,92	54,97	55,03	54,93
55,03	54,83	55,09	54,92	55,07
54,91	55,11	55,13	55,07	55,08
55,07	55,03	55,04	55,05	55,11
55,12	55,02	54,95	55,09	55,12
55,05	55,05	55,08	54,96	55,19

169. *a*=70; *b*=0,03; *c*=0,05:

70,20	70,27	70,12	70,28	69,86
70,21	69,92	70,13	70,10	69,91
70,11	70,13	70,23	70,11	70,09
70,06	70,16	70,09	70,08	70,17
70,07	70,21	70,25	70,14	70,18
70,26	70,22	69,97	70,00	70,12
70,12	70,18	70,18	70,04	70,13
70,16	70,08	69,98	70,16	70,14
70,17	69,96	70,08	70,18	70,03
70,32	70,14	70,09	70,08	70,09

170. *a*=65; *b*=0,04; *c*=0,06:

66,06	66,06	66,15	65,92	65,89
66,07	66,07	66,12	65,93	65,91
65,87	66,08	66,13	66,04	65,92
65,88	66,02	66,06	66,03	65,93
65,99	66,03	66,07	66,05	66,10
65,98	66,04	66,05	66,12	66,04
65,97	66,04	66,06	66,09	66,04
66,00	65,97	66,09	66,10	66,05
66,01	65,98	66,03	66,00	66,02
66,02	65,94	66,05	66,01	66,03

4. ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. Шк., 1982.

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. Шк., 1982.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1985.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк, 1980. Ч. 1, 2.

Дополнительная литература

Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1978.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1988.

Учебно-методические разработки

Дубинина Л.Я., Никулина Л.С., Пивоварова И.В. Курс лекций по высшей математике. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Никулина Лидия Семеновна
Ткалич Анна Николаевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум
Часть 2
для студентов специальности
230100 «Сервис транспортных и технологических машин
и оборудования»

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать .02.07. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л..
Уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57