Министерство образования Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

ШАВЛЮГИН А.И.

МЕХАНИКА
И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Практикум

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2003

ББК 22.3
Ш 13

Рецензент: Печников В.С., канд физ.-мат. наук, доцент (ДВГУ)

Шавлюгин А.И.
Ш 13 МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА: Практикум. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2003. – 124 с.

Настоящее издание представляет собой первую часть пособия, предназначенного для студентов технических специальностей очной и заочной форм обучения. Цель практикума – на большом количестве разобранных примеров научить студентов решать задачи по физике самостоятельно.

Пособие содержит два основных раздела – механику и молекулярную физику, полностью соответствующих программе курса физики для вузов. Каждый раздел состоит из нескольких частей в соответствии с традиционным изложением курса в наиболее популярных учебниках по физике. Структура каждой части включает в себя краткие теоретические сведения, примеры решенных задач и задания для самостоятельной работы студентов.

Пособие рассчитано как на студентов, изучающих физику в течение двух семестров, в ходе которых учебными планами предусмотрено выполнение четырех контрольных работ, так и на тех, кто изучает физику в течение одного семестра и выполняет две контрольные работы.

ББК 22.3

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика материальной точки

Справочные сведения

Скорость и ускорение материальной точки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Средняя скорость, среднее ускорение $\vec{v} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int\limits_{t_1}^{t_2}\vec{v}(t)dt$, $\vec{a} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int\limits_{t_1}^{t_2}\vec{a}(t)dt$.

Средняя путевая скорость при кусочно-равномерном прямолинейном движении $v = \frac{s_1 + s_2 + ... + s_N}{t_1 + t_2 + ... + t_N}$.

Нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{r}$ направлено вдоль нормали к траектории в сторону ее вогнутости; r – радиус кривизны траектории.

Тангенциальное (касательное) ускорение $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ направлено по касательной к траектории.

Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$; для плоского движения $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$.

Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, $\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота.

Уравнение равномерного прямолинейного движения $x = x_0 + vt$; равномерного вращения $\varphi = \varphi_0 + \omega t$. Для равномерного вращения $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, T – период, ν – частота вращения.

Уравнения равнопеременного прямолинейного движения: $v = v_0 + at$, $x = x_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$; равнопеременного вращения: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Связь линейных и угловых величин при вращательном движении: $v = \omega R$, $a_n = \omega^2 R$, $a_\tau = \varepsilon R$.

Примеры решения задач

Решение задач по кинематике необходимо начинать с определения типа движения тела (материальной точки). Подавляющее большинство задач можно отнести к одному из следующих типов простейших движений материальной точки: прямолинейное равномерное или равнопеременное движение, равномерное или равнопеременное вращение. В большинстве задач, в особенности в случае криволинейного движения на плоскости, следует изобразить на рисунке координатные оси, направления скоростей и ускорений. После этого необходимо выписать соответствующие уравнения с учетом условий данной задачи и затем решить полученную систему. Рассмотрим методы решения задач по кинематике на конкретных примерах.

Задача 1. На дорогу от пункта А до пункта Б водитель обычно тратит время t = 40 *мин*. Однако в часы пик, чтобы ехать с привычной скоростью, ему приходится выбирать другой маршрут. Этот путь на $\eta = 20\%$ длиннее и Δt = 12 *мин* занимают остановки. Все равно водитель экономит $\tau = 15$ *мин*. Во сколько раз его скорость в часы пик меньше его обычной скорости?

Решение

Данная задача относится к случаю равномерного движения и решается исходя из определения средней скорости. Пусть расстояние от А до Б равно s, скорость автомобили в обычное время v_1, а в часы пик v_2. Тогда, согласно условию, для движения в обычное время $t = \frac{s}{v_1}$. Если бы в часы пик автомобиль двигался по прежнему маршруту, то на это было бы затрачено время $t_1 = \frac{s}{v_2}$, в действительности же с учетом удлинения маршрута и движения с обычной скоростью на дорогу было затрачено $t_2 = \dfrac{(1+\eta)s}{v_1}$. С учетом времени, затраченного на остановки и сэкономленных минут, получаем уравнение

$$t_1 = t_2 + \tau + \Delta t \;\Rightarrow\; \frac{s}{v_2} = \frac{(1+\eta)s}{v_1} + \tau + \Delta t\,. \qquad (1.1.1)$$

Подставляя в (1.1.1) $s = v_1 t$, находим

$$\frac{v_1}{v_2}t = (1+\eta)t + \tau + \Delta t\,.$$

Отсюда получаем для отношения скоростей выражение

$$\frac{v_1}{v_2} = 1 + \eta + \frac{\tau + \Delta t}{t}\,.$$

Подставляя числовые значения, находим

$$\frac{v_1}{v_2} = 1 + 0{,}2 + \frac{15+12}{40} = 1{,}875\,.$$

Таким образом, скорость автомобиля в часы пик в 1,875 раза меньше его скорости в обычное время.

Задача 2. Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору метро за время t_1 = 3 *мин*, а по движущемуся вверх эскалатору за время t_2 = 2 *мин.* Сможет ли он подняться по эскалатору, движущемуся с той же скоростью вниз? Если сможет, то за какое время?

Решение

Рассматриваемая задача также относится к типу задач на равномерное движение. Отличие от предыдущей заключается в том, что здесь необходимо правильно записывать все скорости в неподвижной системе отсчета (относительность движения). Пусть длина эскалатора равна *s*, а скорости эскалатора относительно земли и человека относительно эскалатора равны соответственно v_1 и v_2. Тогда для первых двух случаев можно написать уравнения равномерного движения

$$t_1 = \frac{s}{v_2}\;,\; t_2 = \frac{s}{v_1 + v_2}\,. \qquad (1.1.2)$$

Аналогично для движения человека по движущемуся ему навстречу эскалатору

$$t_3 = \frac{s}{v_2 - v_1}\,. \qquad (1.1.3)$$

Разрешая (1.1.2) относительно скоростей, находим

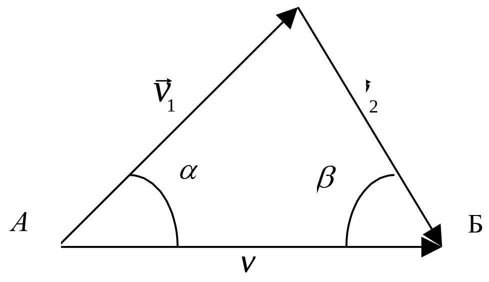

Рис. 1.1.1

$$v_2 = \frac{s}{t_1}, \; v_1 = \frac{s}{t_2} - \frac{s}{t_1}. \qquad (1.1.4)$$

Подставляя (1.1.4) в (1.1.3) получаем $t_3 = \dfrac{s}{2\dfrac{s}{t_1} - \dfrac{s}{t_2}}$, откуда после несложных алгебраических преобразований следует

$$t_3 = \frac{t_1 t_2}{2t_2 - t_1}.$$

После подстановки числовых значений находим

$$t_3 = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2 - 3} = 6\,\text{мин}.$$

Полученный ответ означает, что человек сможет подняться по движущемуся ему навстречу эскалатору (об этом свидетельствует положительный знак ответа) и сделает это за 6 минут.

Задача 3. Самолет совершает прямой и обратный рейсы между двумя населенными пунктами. При каком направлении ветра относительно трассы время полета будет максимальным? минимальным?

Решение

Обозначим расстояние между пунктами через s, собственную скорость самолета (относительно воздуха) и скорость ветра (относительно земли) соответственно через v_1 и v_2, а углы, которые образуют векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ с вектором $\vec{v}$ скорости самолета относительно земли, через α и β соответственно (рис. 1.1.1). Проектируя векторы скоростей на направления полета самолета и перпендикулярное к нему, получаем уравнения $v_{АБ} = v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta$ (по ветру), $v_{БА} = v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta$ (против ветра),

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta \, . \qquad (1.1.5)$$

Общее время движения, очевидно, равно

$$t = \frac{s}{v_{АБ}} + \frac{s}{v_{БА}} = \frac{s}{v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta} + \frac{s}{v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta} \, . \qquad (1.1.6)$$

Исключая из (1.1.6) угол α при помощи (1.1.5) и основного тригонометрического тождества, преобразуем (1.1.6) к виду

$$t = \frac{2 \cdot s \cdot \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \sin^2\beta}}{v_1^2 - v_2^2} \, .$$

Учитывая элементарные свойства тригонометрических функций, приходим к выводу, что наименьшее время полета будет в случае, когда $\beta = \frac{\pi}{2}$, т.е. когда ветер дует перпендикулярно направлению полета. Если же $\beta = 0$ время полета будет максимальным.

Задача 4. Частица пролетает расстояние $l = 2$ *м* равномерно, а затем тормозит с ускорением $a = 5 \cdot 10^5$ *м*/*с*^{2}. При какой начальной скорости частицы время ее движения от вылета до остановки будет наименьшим?

Решение

Пусть начальная скорость частицы равна v_0. Тогда время ее равномерного движения $t_1 = \frac{l}{v_0}$. Из уравнения скорости равнозамедленного движения $v = v_0 - at$ находим время движения $t_2 = \frac{v_0}{a}$. Следовательно, общее время движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{v_0} + \frac{v_0}{a} \, . \qquad (1.1.7)$$

Исследуем функцию $t(v_0)$ на экстремум:

$$t'(v_0) = -\frac{l}{v_0^2} + \frac{1}{a} = 0, \Rightarrow v_0 = \sqrt{al} \, .$$

Так как производная в окрестности критической точки меняет знак с минуса на плюс, полученное значение v_0 обеспечивает минимальное время движения частицы от момента вылета до остановки. Подставляя числовые значения, получаем:

$$v_0 = \sqrt{5 \cdot 10^5 \,{}^{м}\!/_{с^2} \cdot 2м} = 10^3 \,{}^{м}\!/_{с}\,.$$

Задача 5. Тело, свободно падающее с некоторой высоты, первый участок пути проходит за время *t*, а такой же последний – за время $\frac{t}{2}$. Определить высоту, с которой падало тело.

Решение

Пусть все время падения тела равно t_1, тогда высота падения тела

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2}. \tag{1.1.8}$$

За время *t* тело пролетает расстояние

$$h = \frac{gt^2}{2}, \tag{1.1.9}$$

а за время $t_1 - \frac{t}{2}$ – расстояние

$$h_1 - h = \frac{g\left(t_1 - \frac{t}{2}\right)^2}{2}. \tag{1.1.10}$$

После подстановки (1.1.8) и (1.1.9) в (1.1.10) получаем $t_1^2 - t^2 = \left(t_1 - \frac{t}{2}\right)^2$. Решая это уравнение, находим $t_1 = \frac{5t}{4}$, следовательно, высота падения тела

$$h_1 = \frac{25gt^2}{32}.$$

Задача 6. Частица движется в положительном направлении оси *X* так, что ее скорость изменяется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α – положительная постоянная. Имея в виду, что в момент времени $t = 0$ она находилась в точке $x = 0$, найти: зависимость скорости и ускорения частицы от времени; среднюю скорость частицы за время, в течение которого она пройдет *l* метров пути.

Решение

Согласно определению скорости $v = \dfrac{dx}{dt}$. Таким образом, закон движения частицы можно найти, интегрируя уравнение $x' = \alpha\sqrt{x}$ с начальным условием $x(0) = 0$. Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt$, а после интегрирования $2\sqrt{x} = \alpha t + C$. Подстановка начального условия дает $C = 0$, что позволяет записать закон движения частицы в виде $x = \dfrac{\alpha^2 t^2}{4}$. Используя полученный результат, находим зависимости скорости и ускорения от времени:

$$v(t) = \left(\frac{\alpha^2 t^2}{4}\right)' = \frac{\alpha^2 t}{2},\ a(t) = \left(\frac{\alpha^2 t}{2}\right)' = \frac{\alpha^2}{2} = const\,.$$

Для ответа на последний вопрос задачи определим время, необходимое частице для преодоления l метров пути: $l = \dfrac{\alpha^2 t^2}{4} \Rightarrow t = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{l}$. Тогда, используя определение средней скорости, получаем

$$v_{cp} = \frac{1}{t}\int_0^t v(t)dt = \frac{\alpha}{2\sqrt{l}}\int_0^{\frac{2}{\alpha}\sqrt{l}} \frac{\alpha^2 t}{2}dt = \left.\frac{\alpha^3 t^2}{8\sqrt{l}}\right|_0^{\frac{2}{\alpha}\sqrt{l}} = \frac{\alpha\sqrt{l}}{2}\,.$$

Задача 7. Закон движения материальной точки имеет вид $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} - (t^2 - 1)\vec{j}$. Найти уравнение траектории, закон изменения скорости и ускорения от времени.

Решение

Из закона изменения радиус-вектора от времени находим зависимости координат от времени:

$$x(t) = 2t,\ y(t) = 1 - t^2. \qquad (1.1.11)$$

Исключая из (1.1.11) время, получаем уравнение траектории:

$$t = \frac{x}{2} \Rightarrow y = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Законы изменения скорости и ускорения от времени находятся по определению:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 2t\vec{j},\ \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j}\,.$$

Зависимость от времени модулей этих величин устанавливается по формулам

$$v(t)=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4+4t^2}\ ,\ a(t)=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=2=const\ .$$

Задача 8. Угол поворота диска радиусом R изменяется со временем по закону $\varphi=4+2t+6t^2$. Определить зависимости от времени угловой скорости, углового ускорения и линейной скорости точек, находящихся на краю диска. В какой момент времени угол между векторами скорости и ускорения будет составлять 45^0?

Решение

Зависимости от времени угловой скорости и углового ускорения находим согласно определениям этих величин:

$$\omega(t)=\frac{d\varphi}{dt}=2+12t\ ,\ \varepsilon(t)=\frac{d\omega}{dt}=12\ .$$

Для получения зависимости от времени линейной скорости используем связь между линейными и угловыми величинами:

$$v=\omega R=2(1+6t)R\ .$$

Вектор скорости в любой момент времени направлен по касательной к поверхности диска, а вектор ускорения все время изменяется по величине и направлению в соответствии с тем, как меняются нормальное и касательное ускорения. Угол между векторами скорости и ускорения будет составлять 45^0 в тот момент, когда нормальное ускорение станет равным касательному (тогда треугольник ускорений становится равнобедренным).

Нормальное ускорение можно определить по формуле

$$a_n=\omega^2R=4(1+6t)^2R\ , \qquad (1.1.12)$$

а касательное – по формуле

$$a_\tau=\varepsilon R=12R\ . \qquad (1.1.13)$$

Приравнивая правые части (1.1.12) и (1.1.13), получаем

$$(1+6t)^2=3\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}-1}{6}\ .$$

Задача 9. С самолета, летящего горизонтально со скоростью v_0 на высоте H, сброшен груз. На какой высоте h скорость груза будет направлена под углом φ к горизонту? Найти радиус кривизны R траектории на данной высоте. Чему равно расстояние l между грузом и самолетом в момент падения груза на землю?

Решение

Направим оси *X* и *Y* горизонтально и вертикально вниз. Угол, который образует вектор скорости с горизонтом, можно определить из треугольника скоростей (рис. 1.1.2), из которого следует

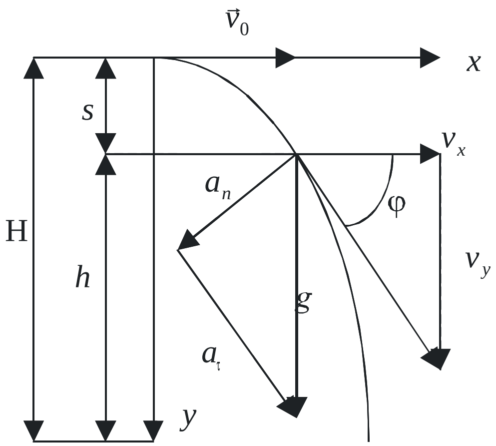

Рис. 1.1.2

$$tg\varphi = \frac{v_y}{v_x}. \tag{1.1.14}$$

Если пренебречь сопротивлением воздуха, движение по горизонтали будет равномерным со скоростью $v_x = v_0$, а по вертикали – равноускоренным со скоростью $v_y = gt$. Так как перемещение в вертикальном направлении за время *t* составит $s = \frac{gt^2}{2}$, то

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \Rightarrow v_y = \sqrt{2gs}\ .$$

Подставляя полученные выражения в (1.1.14), находим

$$tg^2\varphi = \frac{2gs}{v_0^2},$$

а поскольку $h = H - s$, то искомая высота определяется по формуле

$$h = H - \frac{v_0^2 tg^2\varphi}{2g}\ .$$

Для определения радиуса кривизны траектории на данной высоте воспользуемся треугольниками скоростей и ускорений. Из рисунка (1.1.2) видно, что

$$\sin\varphi = \frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{a}, \ \cos\varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{a_n}{a}.$$

Поскольку полное ускорение груза равно ускорению свободного падения g, нормальное ускорение по определению $a_n = \frac{v^2}{R}$, а модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gs} = v_0\sqrt{1 + tg^2\varphi}$, получаем

$$\frac{v_x}{v} = \frac{v^2}{gR} \Rightarrow R = \frac{v^3}{gv_x} = \frac{v_0^2\left(1 + tg^2\varphi\right)^{3/2}}{g}.$$

Так как в пренебрежении сопротивлением воздуха горизонтальные скорости груза и самолета будут одинаковы, их перемещение друг относительно друга будет происходить строго по вертикали, и в момент приземления груза расстояние между ним и самолетом составит $l = H$.

Задача 10. Тело брошено под углом к горизонту так, что его радиус-вектор изменяется по закону $\vec{r}(t) = (5 + 3t)\vec{i} + (5 + 2t - 4{,}9t^2)\vec{j}$. Ось X направлена вдоль поверхности земли, ось Y – вертикально вверх. Под каким углом к горизонту α брошено тело? Какова дальность полета и максимальная высота полета тела? Определить радиус кривизны траектории в ее верхней точке.

Решение

Из уравнения движения тела можно определить законы изменения со временем координат тела:

$$x(t) = 5 + 3t, \ y(t) = 5 + 2t - 4{,}9t^2.$$

Используя определение скорости, находим уравнения проекций вектора скорости на оси X и Y:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 3 = const, \ v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 2 - 9{,}8t.$$

В начальный момент времени $v_x(0) = 3$, $v_y(0) = 2$, следовательно, для угла бросания получаем

$$tg\alpha = \frac{v_y(0)}{v_x(0)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = arctg\,\frac{2}{3} \approx 33^0 41'.$$

В момент приземления $y = 0$; решая квадратное уравнение, находим время полета тела:

$$4{,}9t^2 - 2t - 5 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25{,}5}}{4{,}9} .$$

Очевидно, моменту приземления соответствует знак плюс перед корнем, следовательно, $t \approx 1{,}235\,с$. Подставляя полученное значение в уравнение горизонтального движения, находим дальность полета

$$L = x(1{,}235) - x(0) = 5 + 3 \cdot 1{,}235 - 5 \approx 3{,}7\,м .$$

В верхней точке траектории вектор скорости направлен горизонтально, следовательно, $v_y = 0$, откуда находим время подъема тела до верхней точки траектории

$$2 - 9{,}8t = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{9{,}8} \approx 0{,}204\,с .$$

Подставляя найденное значение в уравнение вертикального движения, находим максимальную высоту подъема тела

$$y(0{,}204) = 5 + 2 \cdot 0{,}204 - 4{,}9 \cdot 0{,}204^2 \approx 5{,}2\,м .$$

Так как в верхней точке траектории модуль скорости тела $v = v_x(0) = 3\,{}^{м}\!/_{с}$, а нормальное ускорение равно полному (которое в любой точке траектории равно ускорению свободного падения g), из определения нормального ускорения находим радиус кривизны траектории в ее верхней точке

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_x^2(0)}{g} = \frac{3^2}{9{,}8} \approx 0{,}917\,м .$$

Индивидуальные задания

Студент проехал половину пути на велосипеде со скоростью $v_1 = 15\,{}^{км}\!/_{ч}$. Далее треть оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 10\,{}^{км}\!/_{ч}$, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3 = 5\,{}^{км}\!/_{ч}$. Определить среднюю скорость движения студента на всем пути. Ответ: $v_{ср} = \dfrac{2v_1(v_2 + 2v_3)}{3v_1 + v_2 + 2v_3} \approx 9{,}23\,{}^{км}\!/_{ч}$.

1.1.2. При падении камня в колодец его удар о поверхность воды доносится через 4 с. Принимая скорость звука $v = 330 \, ^{м}\!/_{с}$, определить время падения камня и глубину колодца. Ответ:

$$t = -\frac{v}{g} + \sqrt{\left(\frac{v}{g}\right)^2 + \frac{2vt}{g}} \approx 4{,}67с\ .$$

1.1.3. Тело падает с высоты h = 1 *км* с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, какой путь пройдет тело за две последние секунды падения. Ответ:

$$s = h - \frac{g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - t\right)^2}{2} \approx 261м\ .$$

1.1.4. Тело падает с высоты h = 500 *м* с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, какое время понадобится телу для прохождения последних 200 м падения. Ответ:

$$t = \frac{\sqrt{2h} - \sqrt{2(h-200)}}{\sqrt{g}} \approx 2{,}28с\ .$$

1.1.5. Первое тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 5 \, ^{м}\!/_{с}$. В тот же момент времени вертикально вниз с той же начальной скоростью из точки, соответствующей максимальной верхней точке полета h_{max} первого тела, брошено второе тело. Определить, в какой момент времени t и на какой высоте h от поверхности Земли произойдет встреча тел. Ответ: $t = \frac{v_0}{4g} \approx 1{,}27 \cdot 10^{-2} с$, $h = \frac{7v_0^2}{32g} \approx 0{,}56м$.

1.1.6. Спортсмены бегут колонной длиной l со скоростью v. Навстречу бежит тренер со скоростью $u < v$. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и начинает бежать назад со скоростью $\frac{3}{2}v$. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся? Ответ: $l_1 = l\frac{\frac{3}{2}v - u}{u + v}$.

1.1.7. Мяч брошен со скоростью $v_0 = 10\, м/с$ под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту. Найти радиус кривизны R траектории мяча через 1 с после начала движения. Ответ: $R = \dfrac{(v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2)^{3/2}}{gv_0\cos\alpha} \approx 6{,}29 м$.

1.1.8. Мяч брошен со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти v_0 и α, если максимальная высота подъема мяча $h = 3\, м$, а радиус кривизны траектории мяча в этой точке $R = 3\, м$. Ответ: $\alpha = arctg\sqrt{\dfrac{2h}{R}} \approx 54^0 44'$, $v_0 = \sqrt{gR(1+\dfrac{2h}{R})} \approx 9{,}4\, м/с$.

1.1.9. Тело брошено со скоростью $v_0 = 20\, м/с$ под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить нормальное и тангенциальное ускорения тела для момента времени $t = 2\, с$ после начала движения. Ответ: $a_n = g\cos\left(arctg\left(\dfrac{gt}{v_0\cos\alpha} - tg\alpha\right)\right) \approx 9{,}47\, м/с^2$, $a_\tau = g\sin\left(arctg\left(\dfrac{gt}{v_0\cos\alpha} - tg\alpha\right)\right) \approx 2{,}58\, м/с^2$.

1.1.10. На высоте h горизонтально с постоянной скоростью летит самолет. С земли производится выстрел из орудия, причем скорость снаряда v в момент выстрела направлена на самолет под углом α к горизонту. С какой скоростью u летел самолет, если снаряд поразил цель? Ответ: $u = \dfrac{v\cos\alpha}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{2gh}{v^2\sin^2\alpha}}\right)$.

1.1.11. Из одной точки в один и тот же момент времени под углом α к горизонту бросают два камня со скоростями v_1 и v_2. Какое расстояние будет между камнями в тот момент, когда первый из них достигнет наивысшей точки подъема? Ответ: $s = |v_1 - v_2|\dfrac{v_1}{g}\sin\alpha$.

1.1.12. На перроне стоит человек. Мимо него движется поезд. Первый вагон проехал за время 1 с, второй – за время 1,5 с. Длина вагона $l = 12\, м$. Найти ускорение a поезда и его скорость v_0 в начале наблюдения. Ответ:

$$a = \frac{2l(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 3{,}2\, м/с^2,\quad v_0 = \frac{l(t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 13{,}6\, м/с.$$

1.1.13. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{k}$. Определить: 1) скорость $\vec{v}$; 2) ускорение $\vec{a}$; 3) модуль скорости в момент времени $t = 3c$. Ответ: $\vec{v} = 8t\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{a} = 8\vec{i}$, $v = \sqrt{64t^2 + 9} \approx 24{,}2 \, м/c$.

1.1.14. Движение материальной точки в плоскости xy описывается законом $x = ct$, $y = ct(1+bt)$, где c и b – положительные постоянные. Определить модули скорости и ускорения материальной точки в зависимости от времени. Ответ: $v = c\sqrt{1+(1+2bt)^2}$, $a = 2bc$.

1.1.15. Тело начинает движение из точки А и движется сначала равноускоренно в течение времени t_0, а затем с тем же по модулю ускорением – равнозамедленно. Через какое время от начала движения тело вернется в точку А? Ответ: $t = (2+\sqrt{2})t_0$.

1.1.16. Точка движется по окружности радиусом $R = 30 \, см$ с постоянным угловым ускорением ε. Определить тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что за время $t = 4c$ она совершила три оборота и в конце третьего оборота ее нормальное ускорение $a_n = 2{,}7 \, м/c^2$. Ответ: $a_\tau = R\left(\frac{2}{t}\sqrt{\frac{a_n}{R}} - \frac{12\pi}{t^2}\right) \approx -0{,}257 \, м/c^2$.

1.1.17. Колесо радиусом $R = 0{,}1 м$ вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega = 2At + 5Bt^4$ ($A = 2 \, рад/c^2$ и $B = 1 \, рад/c^5$). Определить полное ускорение точек обода колеса через $t = 1c$ после начала вращения и число оборотов, сделанных колесом за это время. Ответ $a = R\sqrt{(2A+20Bt^3)^2 + (2At+5Bt^4)^4} \approx 8{,}45 \, м/c^2$, $N = \frac{A+B}{2\pi} \approx 0{,}48$.

1.1.18. Диск радиусом $R = 10 \, см$ вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени задается уравнением $v = At + Bt^2$ ($A = 0{,}3 \, м/c^2$, $B = 0{,}1 \, м/c^3$). Определить угол α, который образует вектор полного ускорения с радиусом диска через 2 с от начала движения. Ответ: $\alpha = arctg\frac{(A+2Bt)R}{(At+Bt^2)^2} \approx 4^0$.

1.1.19. Частота вращения колеса при равнозамедленном движении за $t = 1 мин$ уменьшилась от 300 до 180 $мин^{-1}$. Определить угловое ускорение колеса и число полных оборотов, сделанных колесом за это время. Ответ: $\varepsilon=\dfrac{2\pi(\nu_0-\nu)}{t}\approx 0{,}21\,c^{-2}$, $N=\dfrac{t(\nu_0+\nu)}{2}=240$.

1.1.20. Поезд въезжает на закругленный участок пути с начальной скоростью $v_0=54\,{}^{\textit{км}}\!/_{\textit{ч}}$ и проходит равноускоренно расстояние $s=600\,\textit{м}$ за время $t=30\,c$. Радиус закругления $R=1\,\textit{км}$. Найти скорость v и полное ускорение a поезда в конце этого участка пути. Ответ: $v=\dfrac{2s}{t}-v_0=25\,{}^{\textit{м}}\!/_{c}=90\,{}^{\textit{км}}\!/_{\textit{ч}}$, $a=R\sqrt{\left(\dfrac{2s}{Rt}-\dfrac{v_0}{R}\right)^4+\dfrac{4(s-v_0t)^2}{R^2t^4}}\approx 0{,}71\,{}^{\textit{м}}\!/_{c^2}$.

1.1.21. Точка движется по окружности радиуса $R=20\,\textit{см}$ с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau=5\,{}^{\textit{см}}\!/_{c^2}$. Через какое время после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет втрое больше тангенциального? Ответ: $t=\sqrt{\dfrac{3R}{a_\tau}}\approx 3{,}46\,c$.

1.1.22. С колеса автомобиля, движущегося с постоянной скоростью v, слетают комки грязи. На какую высоту h над дорогой будет отбрасываться грязь, оторвавшаяся от колеса в тот момент, когда радиус, проведенный в точку отрыва, образует с вертикалью угол α? Ответ: $h=R(1-\cos\alpha)+\dfrac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$.

1.1.23. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом $R=3\,\textit{м}$ задается уравнением $s=At^2+Bt$ ($A=0{,}4\,{}^{\textit{м}}\!/_{c^2}$, $B=0{,}1\,{}^{\textit{м}}\!/_{c}$). Определите для момента времени $t=2\,c$ после начала движения нормальное, тангенциальное и полное ускорение. Ответ:

$$a_n=\frac{(2At+B)^2}{R}\approx 0{,}96\,{}^{\textit{м}}\!/_{c^2},\quad a_\tau=2A=0{,}8\,{}^{\textit{м}}\!/_{c^2},$$

$$a=\sqrt{4A^2+\frac{(2At+B)^4}{R^2}}\approx 1{,}25\,{}^{\textit{м}}\!/_{c^2}.$$

1.1.24. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon=4\,{}^{\textit{рад}}\!/_{c}$. Определить радиус колеса, если через $t=1\ c$ после начала движения полное ускорение колеса $a = 8\,{}^{м}\!/_{с^2}$. Ответ: $R = \dfrac{a}{\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}} \approx 0{,}485\,м$.

1.1.25. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $R = 4\,м$, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1\,{}^{м}\!/_{с^2}$, $B = 6\,{}^{м}\!/_{с^3}$, $C = 3\,{}^{м}\!/_{с^4}$). Определить полное ускорение точки для момента времени $t = 1\,с$. Ответ:

$$a = \sqrt{(A + Bt + Ct^2)^2 + \frac{R(B + 2Ct)^2}{4(A + Bt + Ct^2)}} \approx 10{,}7\,{}^{м}\!/_{с^2}.$$

1.1.26. Точка движется по окружности радиусом $R = 15\,см$ с постоянным тангенциальным ускорением. К концу четвертого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 15\,{}^{см}\!/_{с}$. Определить нормальное ускорение точки через $t = 16\,с$ после начала движения. Ответ: $a_n = \dfrac{v^4 t^2}{256\pi^2 R^3} \approx 1{,}52 \cdot 10^{-2}\,{}^{м}\!/_{с^2}$.

1.1.27. Ось вращающегося диска движется поступательно в горизонтальном направлении с постоянной скоростью v. Ось горизонтальна, направление ее движения перпендикулярно к ней самой. Найти мгновенную скорость верхней точки диска v_1, если мгновенная скорость нижней точки диска равна v_2. Ответ: $v_1 = 2v - v_2$.

1.1.28. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ ($A = 0{,}1\,{}^{рад}\!/_{с^2}$). Определить полное ускорение точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если линейная скорость точки в этот момент равна $0{,}4\,{}^{м}\!/_{с}$. Ответ: $a = \sqrt{(2Avt)^2 + \left(\dfrac{v}{t}\right)^2} \approx 0{,}256\,{}^{м}\!/_{с^2}$.

1.1.29. Скорость центра колеса, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности, изменяется со временем по закону $v = 1 + 2t$. Радиус колеса $R = 1\,м$. Найти скорости и ускорения точек, лежащих на концах горизонтального диаметра колеса в момент времени

$t = 0{,}5c$. Ответ: $v_1 = v_2 = \sqrt{2}(1+2t) \approx 2{,}83\, м/с$,

$$a_1 = \sqrt{4 + \left(2 + \frac{(1+2t)^2}{R}\right)^2} \approx 6{,}32\, м/с^2,\ a_2 = \sqrt{4 + \left(2 - \frac{(1+2t)^2}{R}\right)^2} \approx 2{,}83\, м/с^2.$$

1.1.30. Диск радиусом $R = 10\,см$ вращается так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt^3$ ($A = 2\,рад$, $B = 4\,рад/с^3$). Определить для точек на ободе колеса угол поворота φ, при котором полное ускорение составляет с радиусом колеса угол $\alpha = 45^0$. Ответ $\varphi = A + \dfrac{2}{3} \approx 2{,}67\,рад = 152^0 47'$.

1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Справочные сведения

Основной закон динамики (второй закон Ньютона) материальной точки имеет вид $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$, где $\vec{F}$ – результирующая сила, действующая на материальную точку массы m, $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс материальной точки.

В случае $m = const$ основной закон динамики принимает вид $\vec{F} = m\vec{a}$.

Центр масс системы материальных точек определяется по формуле $\vec{r}_C = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$, где $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ – масса всей системы, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор точки с массой m_i. В случае непрерывного распределения массы формула центра масс принимает вид $\vec{r}_C = \dfrac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$.

Скорость центра масс системы $\vec{v}_C = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$. Закон движения центра масс $\dfrac{d}{dt}(M\vec{v}_C) = \vec{F}_{ВН}$, где $\vec{F}_{ВН}$ – результирующая внешних сил.

Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского) $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ВН} + \vec{u}\dfrac{dm}{dt}$, где $\vec{u}\dfrac{dm}{dt} = \vec{F}_P$ – реактивная сила.

Закон Гука $\vec{F} = -k\vec{x}$.

Сила трения скольжения $F_{ТР} = \mu N$.

Примеры решения задач

При решении задач по динамике материальной точки необходимо прежде всего выяснить, какие силы действуют на тела рассматриваемой механической системы и изобразить их на рисунке. Затем нужно выбрать систему отсчета, относительно которой рассматривается движение. Координатные оси системы целесообразно располагать так, чтобы проекции сил на эти оси определялись наиболее просто. Для каждого тела системы необходимо записать второй закон Ньютона в векторной форме и спроектировать его на оси выбранной системы координат. Иногда оказывается, что полученных динамических уравнений недостаточно для решения задачи (в случае движения системы тел). Тогда необходимо дополнить систему уравнений кинематическими условиями, обусловленными связями, существующими между телами. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. Частица массы m со скоростью v_0 влетает в область действия тормозящей силы F под углом α к направлению этой силы и вылетает под углом β. Определить ширину l области действия тормозящей силы. Какой должна быть ширина области l_0, чтобы частица могла из нее вылететь?

Решение

Будем рассматривать движение частицы в проекциях на направление действия тормозящей силы и перпендикулярное к нему (рис. 1.2.1).

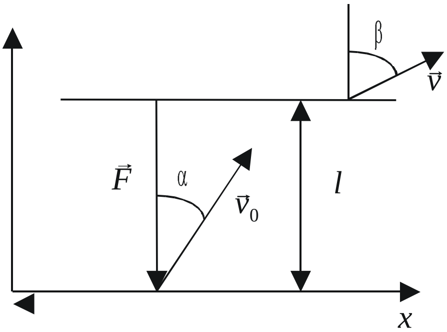

Рис. 1.2.1

В первом случае движение будет равнозамедленным, и его кинематические уравнения можно записать в виде

$$x = v_{0x}t - \frac{at^2}{2} = v_0 \cos\alpha \cdot t - \frac{at^2}{2}; \qquad (1.2.1)$$
$$v_x = v_{0x} - at = v_0 \cos\alpha - at.$$

Движение в перпендикулярном к вектору силы направлении будет равномерным с постоянной скоростью $v_y = v_0 \sin\alpha$, и его уравнение примет вид

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t .$$

По условию через некоторое время вектор скорости образует с вектором силы угол β, откуда следует

$$tg\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha - at} . \qquad (1.2.2)$$

Из (1.2.2) находим время движения частицы в области действия тормозящей силы

$$t = \frac{1}{a}(v_0 \cos\alpha - \frac{v_0 \sin\alpha}{tg\beta}) .$$

Согласно второму закону Ньютона $F = ma$, следовательно,

$$t = \frac{m}{F}(v_0 \cos\alpha - \frac{v_0 \sin\alpha}{tg\beta}) . \qquad (1.2.3)$$

Подставляя (1.2.3) в (1.2.1), после несложных преобразований находим ширину области действия тормозящей силы

$$l = \frac{mv_0^2}{2F}(\cos^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{tg^2\beta}) . \qquad (1.2.4)$$

Предельно возможная ширина области действия силы может быть получена из (1.2.4), если положить $\beta = \frac{\pi}{2}$ (в этот момент скорость частицы в направлении действия силы обращается в ноль). В результате получаем

$$l_0 = \frac{mv_0^2 \cos^2\alpha}{2F} .$$

Задача 2. Каковы должны быть модуль и направление минимальной силы F, приложенной к бруску, лежащему на горизонтальном столе, чтобы сдвинуть его с места? Масса бруска $m = 1 кг$, коэффициент трения между столом и бруском $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение

Силы, действующие на брусок, изображены на рис. 1.2.2. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления

$$N + F\sin\alpha - mg = 0\,,\;\; F\cos\alpha - F_{тр} = 0\,. \qquad (1.2.5)$$

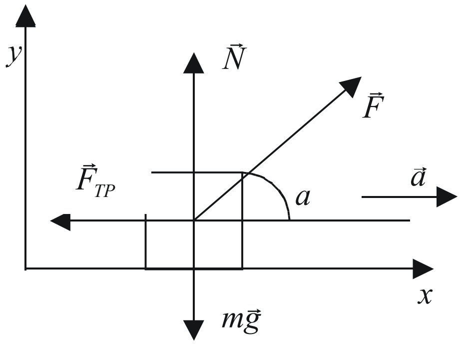

Рис. 1.2.2

Максимальная сила трения покоя, как известно, пропорциональна силе нормальной реакции

$$F_{тр} = \mu N\,. \qquad (1.2.6)$$

Решая систему уравнений (1.2.5), (1.2.6), находим

$$F = \frac{mg}{\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\mu}}\,.$$

Полученное выражение можно рассматривать как функцию $F(\alpha)$. Очевидно, F принимает наименьшее значение, когда знаменатель дроби становится максимальным. Так как производная знаменателя $\left(\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\mu}\right)' = \cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\mu}$ обращается в ноль при $tg\alpha = \mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

сила F достигает наименьшего значения при $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, когда

$$F = F_{\min} = \frac{mg}{2} = \frac{1кг \cdot 9{,}8\,{}^{м}\!/_{c^2}}{2} = 4{,}9H\,.$$

Задача 3 . Определить силу, действующую на вертикальную стенку со стороны клина, если на него положили груз массой *m*. Угол при основании клина α . Коэффициент трения между грузом и поверхностью клина μ . Трения между клином и полом нет.

Решение

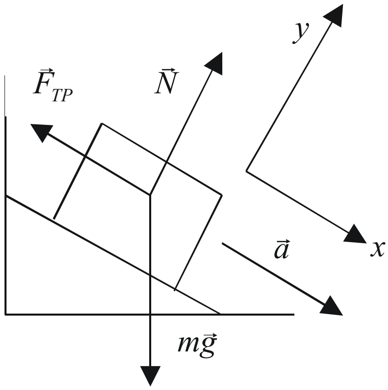

Рис. 1.2.3

Силы, действующие на груз, показаны на рис. 1.2.3. Уравнения движения груза (второй закон Ньютона) в проекциях на оси *x* и *y* имеют вид

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр}\ ,\ \ N - mg\cos\alpha = 0\,. \qquad (1.2.7)$$

Сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N\,. \qquad (1.2.8)$$

Из системы (1.2.7), (1.2.8) следует

$$N = mg\cos\alpha\,,\ \ F_{тр} = \mu mg\cos\alpha\,. \qquad (1.2.9)$$

Согласно третьему закону Ньютона на клин со стороны груза должны действовать сила трения и сила нормального давления, направленные противоположно $F_{тр}$ и N соответственно. Проектируя эти силы на горизонтальное направление, определим результирующую силу давления со стороны клина на стенку

$$F = N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha = mg\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,.$$

Полученный ответ будет являться правильным, если $\sin\alpha - \mu\cos\alpha \geq 0 \Rightarrow \mu \leq tg\alpha$. В противном случае результирующая сил давления и трения будет направлена не к стенке, а от нее, следовательно, $F = 0$ при $\mu \geq tg\alpha$.

Задача 4. Через блок перекинута нить, на концах которой висят два груза с одинаковыми массами *M*. Одновременно на каждый из грузов кладут по перегрузку: справа – массой *3m*, слева – массой *m*. Определить ускорение системы, силу натяжения нити и силу давления перегрузков на основные грузы.

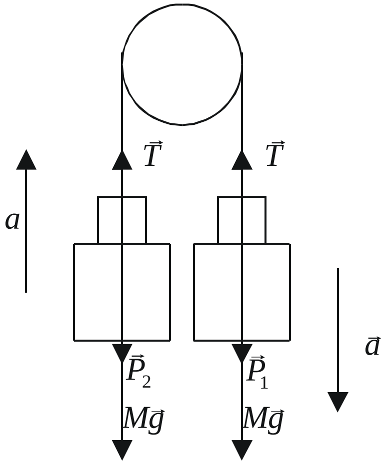

Рис. 1.2.4

Решение

На рис. 1.2.4 изображены силы, действующие на основные грузы. Проектируя уравнения движения грузов (второй закон Ньютона) на вертикальное направление, получаем

$$Ma = Mg + P_1 - T\,,\ Ma = T - P_2 - Mg\,, \tag{1.2.10}$$

где P_1 и P_2 – силы давления перегрузков на основные грузы,

T – сила натяжения нити.

Рассматривая аналогично силы, действующие на перегрузки, получаем уравнения их движения:

$$3ma = 3mg - N_1\,,\ ma = N_2 - mg\,, \tag{1.2.11}$$

где N_1 и N_2 – силы реакции, действующие на перегрузки со стороны основных грузов.

В силу третьего закона Ньютона

$$P_1 = N_1\,,\ P_2 = N_2\,. \tag{1.2.12}$$

Решая систему уравнений (1.2.10) – (1.2.12) относительно ускорения, получаем

$$a = \frac{mg}{M + 2m}.$$

Используя полученный результат, находим силу натяжения нити

$$T = \frac{(M + m)(M + 3m)}{M + 2m} g,$$

и силы давления перегрузков на основные грузы

$$P_1 = \frac{3m(M + m)}{M + 2m} g, \quad P_2 = \frac{m(M + 3m)}{M + 2m} g.$$

Задача 5. Два соприкасающихся бруска скользят по наклонной плоскости. Масса первого бруска $m_1 = 2\,кг$, второго $m_2 = 3\,кг$. Коэффициент трения между плоскостью и первым бруском $\mu_1 = 0{,}1$, между плоскостью и вторым бруском $\mu_2 = 0{,}3$. Угол при основании наклонной плоскости $\alpha = 45^0$. Определить ускорение, с которым движутся бруски, и силу, с которой бруски давят друг на друга.

Решение

Очевидно, что в силу соотношения $\mu_1 < \mu_2$ верхний брусок соскальзывал бы с большим ускорением, чем нижний, если бы они двигались отдельно друг от друга. Вследствие этого, верхний брусок будет давить на нижний, и они будут двигаться как одно целое.

Изобразим на рис. 1.2.5 силы, действующие на каждый брусок, и запишем уравнения их движения в проекциях на оси *X* и *Y*:

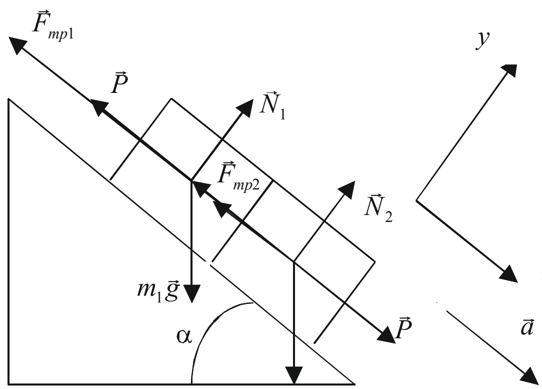

Рис. 1.2.5

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - F_{тр1} - P\,,\;\; N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0\,, \tag{1.2.13}$$

$$m_2 a = m_2 g \sin\alpha - F_{тр2} + P\,,\;\; N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0\,. \tag{1.2.14}$$

Дополним эту систему условиями пропорциональности сил трения и сил нормальной реакции

$$F_{тр1} = \mu_1 N_1\,,\;\; F_{тр2} = \mu_2 N_2\,. \tag{1.2.15}$$

Решая систему (1.2.13) – (1.2.15), находим ускорение системы

$$a = g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha\right).$$

Используя полученный результат, находим силу взаимодействия грузов при их движении вдоль плоскости

$$P = \frac{m_1 m_2 g\cos\alpha(\mu_2 - \mu_1)}{m_1 + m_2}\,.$$

Задача 6. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к тележке массой M, чтобы бруски массой $2m$ и $3m$ относительно нее не двигались? Трением пренебречь.

Решение

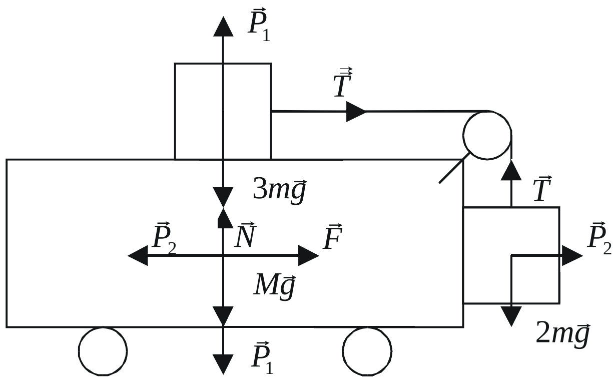

Рис.1.2.6

Силы, действующие на тележку и грузы, изображены на рис. 1.2.6. Запишем второй закон Ньютона для этих тел, проектируя его на горизонтальное и вертикальное направления:

$$Ma = F - P_2 - T\,,\;\; P_1 + Mg - N + T = 0\,, \tag{1.2.16}$$

$$2ma = P_2\,,\ 2mg = T\,, \qquad (1.2.17)$$

$$3ma = T\,,\ 3mg = P_1\,. \qquad (1.2.18)$$

Здесь P_1 и P_2 – силы давления брусков на тележку, T – сила натяжения нити, N – сила реакции, действующая на тележку со стороны поверхности.

Появление в (1.2.16) силы натяжения нити объясняется тем, что посредством нити бруски оказывают давление на ось блока, следовательно, в уравнении движения тележки необходимо учесть результирующую горизонтальной и вертикальной сил натяжения, направив ее противоположно тому, как это показано на рисунке.

Исключая из системы (1.2.16) – (1.2.18) ускорение, силы натяжения нити и давления брусков, находим

$$F = \frac{2g(M + 5m)}{3}\,.$$

Задача 7. В вагоне поезда, идущего равномерно со скоростью $v = 20\,{}^{м}\!/_{с}$ по закруглению радиусом $R = 200\,м$, производится взвешивание груза с помощью динамометра. Масса груза $m = 5\,кг$. Определить результат взвешивания.

Решение

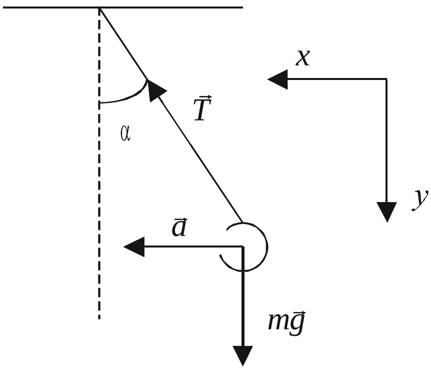

Рис. 1.2.7

Силы, действующие на груз, показаны на рис. 1.2.7. Применяя второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y, получаем систему уравнений

$$ma = T\sin\alpha\,,\ mg = T\cos\alpha\,. \qquad (1.2.19)$$

Здесь a – центростремительное ускорение, равное по определению

$$a = \frac{v^2}{R}\ .$$

Возводя оба уравнения (1.2.19) в квадрат, складывая их и применяя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$T^2 = m^2 g^2 + \frac{m^2 v^4}{R^2} \quad \Rightarrow \quad T = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}\ .$$

Согласно третьему закону Ньютона сила натяжения, действующая на груз, равна весу груза, а значит совпадает с показаниями динамометра. Подставляя числовые значения, находим ответ

$$T = 5\,кг \cdot \sqrt{(9{,}8\,{}^{м}\!/_{с^2})^2 + \frac{(20\,{}^{м}\!/_{с})^4}{(200\,м)^2}} = 50\,Н\ .$$

Задача 8. Шарик на нити, вращающийся равномерно в вертикальной плоскости, находится в лифте, движущемся с ускорением $2g$. Когда шарик находится в нижней точке своей траектории, натяжение нити равно нулю. Определить натяжение нити T в момент, когда шарик находится в верхней точке своей траектории. Масса шарика m.

Решение

Перейдем в неинерциальную систему отсчета, движущуюся вмести с лифтом. Помимо обычных сил в такой системе отсчета на любое тело действует сила инерции, равная произведению массы тела на ускорение системы отсчета и направленная противоположно этому ускорению.

Определим предварительно направление ускорения лифта. Так как в нижней точке траектории натяжение нити исчезает, а ускорение шарика направлено к центру окружности, следовательно, на шарик должна действовать дополнительная сила инерции, направленная вертикально вверх. В результате приходим к выводу, что лифт движется вниз.

С учетом сказанного выше уравнение второго закона Ньютона для нижней точки траектории шарика в проекции на вертикальное направление примет вид

$$ma = T + 2mg - mg\ .$$

Согласно условию

$$T = 0 \quad \Rightarrow \quad a = g\ . \tag{1.2.20}$$

Тогда записывая уравнение второго закона Ньютона для верхней точки траектории, получаем

$$ma = T + mg - 2mg\ ,$$

что с учетом (1.2.20) приводит к ответу

$$T = 2mg\ .$$

Индивидуальные задания

1.2.1. Два груза ($m_1 = 400\,г$ и $m_2 = 600\,г$) связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К грузу m_1 приложена горизонтально направленная сила $F = 5\,Н$. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити. Ответ: $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} = 5\,м/с^2$, $T = \dfrac{m_2 F}{m_1 + m_2}$.

1.2.2. Два груза с неравными массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) подвешены на невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити; 3) силу, действующую на ось блока. Ответ: $a = \dfrac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$, $T = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$, $F = 2T = \dfrac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$.

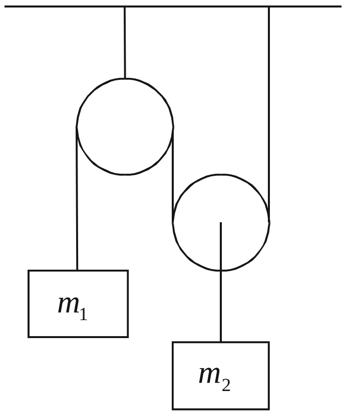

Рис. 1.2.8

1.2.3. На рис. 1.2.8 изображена система блоков, к которым подвешены грузы массами $m_1 = 300\,г$ и $m_2 = 700\,г$. Считая, что груз m_1 поднимается, а подвижный блок с грузом m_2 опускается, нить и блоки невесомы, силы трения отсутствуют, определить: 1) силу натяжения нити; 2) ускорения, с которыми движутся грузы. Ответ: $T = \dfrac{3m_1 m_2 g}{m_2 + 4m_1} \approx 3{,}25\,Н$, $a_1 = \dfrac{2(m_2 - 2m_1)g}{m_2 + 4m_1} \approx 1{,}03\,м/с^2$, $a_2 = \dfrac{(m_2 - 2m_1)g}{m_2 + 4m_1} \approx 0{,}52\,м/с^2$

1.2.4. На вершине наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^0$ укреплен неподвижный блок. Через блок перекинута невесомая нить, к концам которой привязаны грузы $m_1 = 250\,г$ и $m_2 = 200\,г$ (груз m_1 лежит на плоскости). Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити. Ответ: $a = \dfrac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)g}{m_1 + m_2} \approx 1{,}63\,{}^{м}\!/\!{}_{с^2}$,

$T = \dfrac{m_1 m_2 g(1+\sin\alpha)}{m_1 + m_2} \approx 1{,}63 Н$.

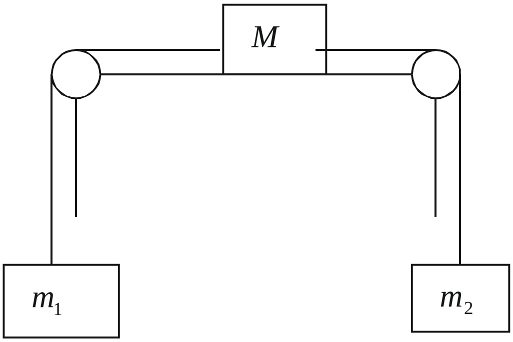

Рис. 1.2.9

1.2.5. Груз массой $M = 1\,кг$, находящийся на горизонтальном столе, соединен нитями посредством блоков с грузами $m_1 = 600\,г$ и $m_2 = 300\,г$ (рис. 1.2.9). Считая блоки и нити невесомыми и пренебрегая трением, определить: 1) ускорение тел; 2) разность сил натяжения нитей. Ответ: $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{M + m_1 + m_2} \approx 1{,}55\,{}^{м}\!/\!{}_{с^2}$, $T_1 - T_2 = \dfrac{M(m_1 - m_2)g}{M + m_1 + m_2} \approx 1{,}55 Н$.

1.2.6. Блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30^0$ и $\beta = 45^0$. Грузы равной массы ($m_1 = m_2 = 2\,кг$) соединены нитью, перекинутой через блок. Считая нить и блок невесомыми и принимая коэффициент трения грузов о плоскости одинаковым и равным $\mu = 0{,}1$, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити. Ответ:

$a = \dfrac{g}{2}(\sin\beta - \mu\cos\beta - \sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 0{,}244\,{}^{м}\!/\!{}_{с^2}$,

$T = \dfrac{mg}{2}(\sin\beta + \sin\alpha + \mu(\cos\alpha - \cos\beta)) \approx 12 Н$.

1.2.7. Тело массой m движется в плоскости xy по закону $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$, где A, B, ω – некоторые постоянные. Определить модуль силы, действующей на это тело. Ответ: $F = m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$.

1.2.8. Частица массой m движется вдоль оси x под действием силы $F = F_0\sin\omega t$, где F_0 и ω – некоторые постоянные. Найти закон движения частицы $x = x(t)$, если известно, что в начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 0$. Ответ: $x = \frac{F_0}{m\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$.

1.2.9. На тело массой $m = 6\,кг$, лежащее на наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^0$, действует горизонтально направленная сила $F = 5\,H$. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение тела; 2) силу давления тела на плоскость. Ответ: $a = \frac{F}{m}\cos\alpha + g\sin\alpha \approx 5{,}62\,{м}/{с^2}$, $P = mg\cos\alpha - F\sin\alpha \approx 48{,}4H$.

1.2.10. С вершины клина, длина которого $l = 2\,м$ и высота $h = 1\,м$, начинает скользить небольшое тело. Коэффициент трения между телом и клином $\mu = 0{,}1$. Определить: 1) ускорение тела; 2) время движения тела; 3) скорость тела у основания клина. Ответ:

$$a = \frac{g}{l}(h - \mu\sqrt{l^2-h^2}) \approx 4{,}05\,{м}/{с^2}, \qquad t = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{g(h-\mu\sqrt{l^2-h^2})}} \approx 1с,$$

$$v = \sqrt{2g(h^2 - \mu\sqrt{l^2-h^2})} \approx 4{,}03\,{м}/{с^2}.$$

1.2.11. По наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^0$, скользит тело. Определить скорость тела в конце третьей секунды после начала движения, если коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}2$. Ответ: $a = gt(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 9{,}61\,{м}/{с}$.

1.2.12. Вагон массой $m = 1$ т спускается по канатной железной дороге с уклоном $\alpha = 15^0$ к горизонту. Принимая коэффициент трения $\mu = 0{,}05$, определить силу натяжения каната при торможении вагона в конце спуска, если скорость вагона перед торможением $v_0 = 3\,{м}/{с}$, а время торможения $t = 5с$. Ответ: $T = m(\frac{v_0}{t} + g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)) \approx 2{,}66кH$.

1.2.13. На краю горизонтального стола укреплен невесомый блок, через который переброшена нить, к концам которой привязаны одинаковые грузы ($m_1 = m_2 = 0{,}5\,кг$). Полагая коэффициент трения лежащего груза о стол равным $\mu = 0{,}15$, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити. Ответ: $a = \dfrac{(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2} \approx 4{,}17\, м/с^2$, $T = \dfrac{m_1 m_2 (1+\mu)g}{m_1 + m_2} \approx 2{,}82 H$.

1.2.14. На краю горизонтального стола укреплен невесомый блок. Лежащий на столе груз $m_1 = 500\,г$ при помощи перекинутой через блок невесомой нити соединен с грузом $m_2 = 600\,г$. Стол вместе с грузами находится в лифте, движущемся вверх с ускорением $a = 4{,}9\, м/с^2$. Определить силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом m_1 и столом $\mu = 0{,}1$. Ответ: $T = \dfrac{m_1 m_2 (1+\mu)(a+g)}{m_1 + m_2} \approx 4{,}41 H$.

1.2.15. Тело массой $m = 1\,кг$ движется так, что его координаты x и y изменяются со временем согласно уравнениям: $x = a - bt + ct^2$, $y = dt^3$, где $c = 1\, м/с^2$, $d = 2\, м/с^3$. Определить ускорение тела и действующую на него силу к концу 5-й секунды после начала движения. Ответ: $a = \sqrt{4c^2 + 36 d^2 t^2} \approx 60\, м/с^2$, $F = m\sqrt{4c^2 + 36 d^2 t^2} \approx 60 H$.

1.3. Законы сохранения в механике

Справочные сведения

Закон сохранения импульса (для замкнутой системы) $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = const$.

Работа переменной силы на участке траектории 1-2 $A = \int\limits_1^2 \vec{F} d\vec{S}$.

Кинетическая энергия $T = \dfrac{mv^2}{2}$.

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести $П = mgh$; потенциальная энергия упруго деформированной пружины $П = \dfrac{kx^2}{2}$.

Теорема о кинетической энергии $A_{12} = T_2 - T_1 = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$.

Теорема о потенциальной энергии $A_{12} = -(П_2 - П_1)$.

Полная механическая энергия $E = T + П$.

Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы) $E = T + П = const$.

Мгновенная мощность $N = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v}$.

Примеры решения задач

При решении задач при помощи закона сохранения импульса необходимо убедиться в том, что рассматриваемая в условии механическая система является замкнутой или что сумма проекций сил на выбранное направление равна нулю. После этого следует изобразить импульсы тел рассматриваемой системы до и после события, о котором идет речь в условии задачи, и выбрать систему координат. Затем записывают закон сохранения импульса в проекциях на оси системы координат. В случае необходимости следует дополнить полученную систему уравнений кинематическими условиями, вытекающими из связей между телами. Если система тел не замкнута, изменение ее импульса нужно приравнивать к импульсу внешних сил.

При применении закона сохранения энергии в случае замкнутой механической системы, между телами которой действуют только консервативные силы, необходимо определить начальное и конечное состояния системы и приравнять механические энергии системы в этих состояниях. Если система не замкнута, изменение ее механической энергии приравнивается к работе внешних сил. Аналогично рассматривается задача в случае замкнутой системы при наличии неконсервативных сил.

Задача 1. Снаряд, вылетевший из орудия со скоростью v_0, разрывается на два одинаковых осколка в верхней точке траектории на расстоянии l от орудия (по горизонтали). Один из осколков полетел в обратном направлении со скоростью движения снаряда до разрыва. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на каком расстоянии (по горизонтали) от орудия упадет второй осколок, и какую скорость он будет иметь при падении.

Решение

Определим горизонтальную скорость снаряда в момент разрыва, для чего воспользуемся кинематическими уравнениями движения снаряда. Направив оси x и y по горизонтали и вертикально вниз и совместив начало координат с орудием, получаем

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t\,,\;\; y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\,,\;\; v_y = v_0 \sin\alpha - gt\,,$$

где α – угол бросания. В верхней точке траектории касательная к ней направлена горизонтально, следовательно, вертикальная проекция скорости обращается в ноль. Отсюда получаем время подъема снаряда до верхней точки траектории

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

и расстояние, пройденное снарядом по горизонтали до этой точки

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}\,.$$

По условию это расстояние равно l, что позволяет определить угол бросания:

$$\sin 2\alpha = \frac{2gl}{v_0^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2gl}{v_0^2}\,.$$

Так как горизонтальная скорость снаряда в процессе движения не меняется, получаем

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = v_0 \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{2gl}{v_0^2}\right),$$

что приводит после несложных тригонометрических преобразований к формуле

$$v_{0x} = v_0 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \dfrac{4g^2 l^2}{v_0^4}}}{2}}\,. \tag{1.3.1}$$

Теперь применим закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление, согласно которому

$$m v_{0x} = -\frac{m v_{0x}}{2} + \frac{m v_{2x}}{2}\,, \tag{1.3.2}$$

где v_{1x} и v_{2x} – проекции скоростей осколков на горизонтальное направление. Решая (1.3.2) с учетом (1.3.1), находим

$$v_{2x} = 3v_{0x} = 3v_0 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \dfrac{4g^2 l^2}{v_0^4}}}{2}}\,.$$

Таким образом, скорость второго осколка в горизонтальном направлении в 3 раза превышает горизонтальную скорость снаряда, следовательно, учитывая, что время падения осколка на землю совпадает со временем подъема снаряда до верхней точки траектории, получаем, что второй осколок упадет на землю на расстоянии $L = l + 3l = 4l$ от орудия.

Для определения скорости падения осколка на землю найдем вертикальную скорость снаряда в момент выстрела:

$$v_{0y} = \sqrt{v_0^2 - v_{0x}^2} = v_0 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4g^2 l^2}{v_0^4}}}{2}} ,$$

следовательно, по теореме Пифагора

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{0y}^2} = v_0 \sqrt{5 + 4\sqrt{1 - \frac{4g^2 l^2}{v_0^4}}} .$$

Задача 2. Тело массой m поднимается без начальной скорости с поверхности Земли под действием силы $\vec{F}$, изменяющейся с высотой подъема y по закону $\vec{F} = -2m\vec{g}(1 - Ay)$, где A – некоторая положительная постоянная, и силы тяжести $m\vec{g}$. Определить: 1) весь путь подъема; 2) работу силы $\vec{F}$ на первой трети пути подъема. Поле силы тяжести считать однородным.

Решение

Проектируя все силы на ось y, по второму закону Ньютона получаем

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = 2mg(1 - Ay) - mg = mg - 2mgAy .$$

По условию задачи

$$y(0) = 0 ,\ y'(0) = 0 . \qquad (1.3.3)$$

Таким образом, необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' + 2Agy = g \qquad (1.3.4)$$

с определенными выше начальными условиями (1.3.3).

Уравнение (1.3.4) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Применяя стандартные методы интегрирования таких уравнений, находим общее решение однородного уравнения

$$y_{OO} = C_1 \cos\sqrt{2Ag}\,t + C_2 \sin\sqrt{2Ag}\,t$$

и очевидное частное решение неоднородного уравнения

$$y_{ЧН} = \frac{1}{2A}.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения, равное сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, записывается в виде

$$y = C_1 \cos\sqrt{2Ag}\,t + C_2 \sin\sqrt{2Ag}\,t + \frac{1}{2A}.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями. Из условия $y(0) = 0$ находим $C_1 = -\frac{1}{2A}$, а из условия $y'(0) = 0$ получаем $C_2 = 0$, откуда следует уравнение движения тела

$$y = \frac{1}{2A}(1 - \cos\sqrt{2Ag}\,t).$$

Анализ полученного решения позволяет сделать вывод, что тело совершает колебания от поверхности Земли до некоторой максимальной высоты, найти которую можно из условия, что на этой высоте скорость тела обращается в ноль. Поскольку $v(t) = y'(t)$, получаем

$$\frac{\sqrt{2Ag}}{2A} \sin\sqrt{2Ag}\,t = 0,$$

откуда следует

$$\sqrt{2Ag}\,t = \pi n, n \in Z \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi n}{\sqrt{2Ag}}, n \in Z .$$

Четным значениям n соответствуют моменты приземления тела $\cos 2\pi n = 1$, а нечетным – моменты поднятия тела на максимальную высоту $\cos\pi(2n+1) = -1$. Тогда максимальная высота подъема тела

$$h = \frac{1}{2A}(1 - (-1)) = \frac{1}{A}.$$

Чтобы найти работу силы воспользуемся определением

$$dA_F = Fdy$$

и проинтегрируем от 0 до $\frac{h}{3} = \frac{1}{3A}$. В результате получаем

$$A_F = \int_0^{\frac{1}{3A}} 2mg(1 - Ay)dy = 2mg\left(y - \frac{Ay^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3A}} = \frac{5mg}{9A}.$$

Задача 3. Кузнечик массой m сидит на конце соломинки массой M и длиной l, лежащей на гладкой поверхности. С какой минимальной скоростью v должен прыгнуть кузнечик, чтобы оказаться на другом конце соломинки?

Решение

Воспользуемся законом сохранения импульса. До прыжка соломинка и кузнечик находились в покое относительно земли, следовательно, результирующий импульс этой системы равнялся нулю. В соответствии с законом сохранения импульса он не может измениться после прыжка.

Если скорость соломинки после прыжка равна u, скорость кузнечика задана относительно земли, а угол, который она образует с поверхностью земли, равен α, то закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление дает

$$mv\cos\alpha - Mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv\cos\alpha}{M}. \qquad (1.3.5)$$

Очевидно, что за время полета кузнечика общее перемещение его и соломинки должно равняться длине соломинки l, следовательно,

$$l = v\cos\alpha \cdot t + ut. \qquad (1.3.6)$$

Чтобы исключить из (1.3.7) время, воспользуемся тем, что время подъема кузнечика до верхней точки траектории равно половине времени полета. Так как в верхней точке вертикальная скорость обращается в ноль, находим

$$v\sin\alpha = gt_{под} \quad \Rightarrow \quad t_{под} = \frac{v\sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v\sin\alpha}{g}. \qquad (1.3.7)$$

Подставляя (1.3.7) в (1.3.6), получаем

$$l = (v\cos\alpha + u)\frac{2v\sin\alpha}{g},$$

что с учетом (1.3.5) дает

$$l=(v\cos\alpha+\frac{m}{M}v\cos\alpha)\frac{2v\sin\alpha}{g}=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}(1+\frac{m}{M}) .$$

Таким образом, для скорости кузнечика получаем выражение

$$v^2=\frac{Mgl}{(M+m)\sin 2\alpha} .$$

Очевидно, скорость будет минимальной, если $\sin 2\alpha=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=45^0$. Тогда окончательно

$$v=\sqrt{\frac{Mgl}{M+m}} .$$

Задача 4. Тело движется в положительном направлении оси x под действием силы $F=\alpha x$, где α – положительная постоянная. В момент времени t = 0 тело находится в начале координат и его скорость равна v_0. Найти зависимость кинетической энергии тела от координаты.

Решение

Согласно второму закону Ньютона уравнение движения тела имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha x , \tag{1.3.8}$$

где m – масса тела. Проинтегрируем это уравнение с учетом заданных начальных условий

$$x(0) = 0,\ v(0) = v_0,. \tag{1.3.9}$$

Данное уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка и его общее решение записывается в виде

$$x(t)=C_1\exp(-\sqrt{\frac{\alpha}{m}}t)+C_2\exp(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}t) .$$

Из начальных условий (1.3.9) следует система уравнений для определения произвольных постоянных:

$$C_1+C_2=0 ,\ (C_2-C_1)\sqrt{\frac{\alpha}{m}}=v_0 .$$

Решая эту систему, получаем

$$C_1=-\frac{1}{2}v_0\sqrt{\frac{m}{\alpha}} ,\ C_2=\frac{1}{2}v_0\sqrt{\frac{m}{\alpha}} ,$$

откуда следует

$$x = \frac{1}{2} v_0 \sqrt{\frac{m}{\alpha}} (\exp(\sqrt{\frac{\alpha}{m}} t) - \exp(-\sqrt{\frac{\alpha}{\mathrm{m}}} \mathrm{t})) = v_0 \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \cdot sh \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t \ .$$

Тогда зависимость скорости тела от времени принимает вид

$$v(t) = x'(t) = v_0 sh \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t \ ,$$

а зависимость кинетической энергии от времени

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m v_0^2 sh^2 \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t}{2} \ .$$

С учетом того, что $v_0 sh \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t = x \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$, окончательно получаем

$$T = \frac{\alpha x^2}{2} \ .$$

Задача 5. Под действием некоторой силы тело массой m движется со скоростью $\vec{v} = \vec{i} + 2t\vec{j}$. Найти зависимость мощности этой силы от времени.

Решение

По определению мощность силы вычисляется по формуле $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Для определения силы, действующей на тело, воспользуемся вторым законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ и определением ускорения $\vec{a} = \vec{v}'$. Вычисляя производную, находим $\vec{a} = 2\vec{j}$, следовательно,

$$\vec{F} = 2m\vec{j} \quad \Rightarrow \quad N = 4mt \ .$$

Задача 6. Однородный брусок, скользящий по горизонтальной поверхности, попадает на шероховатую полосу шириной l с коэффициентом трения μ . При какой скорости брусок преодолеет эту полосу? Длина бруска $b > l$.

Решение

Воспользуемся теоремой о кинетической энергии, согласно которой изменение кинетической энергии равно работе силы, действующей на тело. В данном случае работу по торможению тела совершает сила трения, а минимальную начальную скорость тела определим из условия, что после прохождения полосы брусок останавливается.

В процессе прохождения полосы на ней могут находиться различные по величине части бруска, поэтому сила трения будет меняться с течением времени. Для вычисления работы этой переменной силы воспользуемся следующим приемом. Разделим мысленно брусок на бесконечно малые пластины, большая грань которых перпендикулярна направлению движения бруска.

Очевидно, каждая такая пластина совершит одинаковое перемещение по полосе, равное длине полосы, и работа силы трения над такой элементарной пластиной равна

$$dA = -\mu\rho g S l dx ,$$

где ρ – плотность вещества бруска, S – площадь его поперечного сечения. Интегрируя по всей длине бруска, находим результирующую работу силы трения

$$A = -\mu\rho g S b l = -\mu m g l ,$$

где m – масса бруска.

Изменение кинетической энергии равно

$$\Delta T = -\frac{mv^2}{2} .$$

Применяя теорему о кинетической энергии, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = \mu m g l ,$$

откуда следует

$$v = \sqrt{2\mu g l} .$$

Задача 7. Нить маятника налетает на гвоздь, вбитый на расстоянии b под точкой подвеса. Найти максимальное натяжение нити. Длина нити l, начальный угол отклонения α_0, масса маятника m.

Решение

Воспользуемся законом сохранения энергии. В начальном положении маятник поднят над нижней точкой на высоту

$$h = l - l\cos\alpha_0 = l\cdot(1-\cos\alpha_0) .$$

При прохождении нижнего положения кинетическая энергия маятника $E_K = \dfrac{mv_0^2}{2}$, следовательно, по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh = mgl(1 - \cos\alpha_0),$$

откуда находим скорость маятника в нижней точке

$$v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)}. \qquad (1.3.10)$$

После того, как нить маятника налетает на гвоздь, он начинает двигаться по окружности радиуса $l - b$. Применим второй закон Ньютона для того момента, когда отрезок нити, расположенный ниже гвоздя, составляет угол α с вертикалью.

Проектируя все силы на направление нити, получаем

$$ma = T - mg\cos\alpha, \qquad (1.3.11)$$

где a – нормальное ускорение груза.

Для этого момента по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mg(l-b)(1 - \cos\alpha). \qquad (1.3.12)$$

Подставляя (1.3.10) в (1.3.12), получаем

$$v^2 = 2g(b - l\cos\alpha_0 + (l-b)\cos\alpha). \qquad (1.3.13)$$

Так как нормальное ускорение

$$a = \frac{v^2}{l-b}, \qquad (1.3.14)$$

то из (1.3.11), (1.3.13) и (1.3.14) следует

$$T = mg(3\cos\alpha + \frac{2(b - l\cos\alpha_0)}{l-b}).$$

Очевидно, полученное выражение принимает максимальное значение при $\alpha = 0$, что приводит к такому ответу:

$$T_{\max} = \frac{mg}{l-b}(2l(1-\cos\alpha_0) + l - b).$$

Задача 8. На наклонной плоскости лежит брусок, соединенный пружиной с неподвижной опорой. Из положения, когда пружина не деформирована, брусок без начальной скорости отпускают, и он начинает скользить вниз. Определить максимальное растяжение пружины. Масса бруска m = 0,5 *кг*, жесткость пружины $k = 120\, {}^{H}\!/_{м}$, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45^0$, коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0{,}5$.

Решение

Воспользуемся законом сохранения энергии. В начальный момент вся энергия системы состоит из потенциальной энергии бруска. В момент, когда брусок останавливается, максимально растянув пружину, энергия системы будет состоять из потенциальной энергии деформированной пружины. С учетом работы, совершенной силой трения, получаем

$$mgh = \frac{kx^2}{2} - F_{тр} x \ . \qquad (1.3.15)$$

Поскольку сила трения $F_{тр} = \mu mg \cos\alpha$, а высота опускания груза $h = x\sin\alpha$, подставляя эти выражения в (1.3.15), получаем

$$mgx\sin\alpha = \frac{kx^2}{2} - \mu mgx\cos\alpha \ ,$$

откуда окончательно

$$x = \frac{2mg}{k}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \ .$$

Подставляя значения, получаем

$$x = \frac{2\cdot 0{,}5кг\cdot 9{,}8\, м/с^2}{120\, Н/м}(\sin 45^0 + 0{,}5\cos 45^0) = 8{,}7см \ .$$

Задача 9. Тележка массой M = 5 *кг* стоит на гладкой горизонтальной поверхности. На тележке укреплен математический маятник массой m = 1 *кг* и длиной l = 1 *м*. В начальный момент времени система неподвижна, а нить маятника составляет с вертикалью угол $\alpha = 45^0$. Найти скорость тележки в момент, когда маятник будет проходить через положение равновесия. Какова в этот момент угловая скорость маятника?

Решение

Когда маятник начнет свое движение, тележка по закону сохранения импульса должна поехать навстречу ему. Применим закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление для момента прохождения маятником нижней точки траектории. Если скорость маятника относительно Земли v_1, а скорость тележки v_2, то по закону сохранения импульса

$$mv_1 = Mv_2 \ . \qquad (1.3.16)$$

Запишем теперь закон сохранения энергии. В начальный момент вся энергия системы состоит из потенциальной энергии маятника, а в момент прохождения им нижней точки траектории она складывается из кинетических энергий маятника и тележки, следовательно

$$mgl(1-\cos\alpha)=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}\,. \qquad (1.3.17)$$

Исключая из полученных уравнений скорость маятника, получаем

$$v_1=\frac{Mv_2}{m}\quad\Rightarrow\quad mgl(1-\cos\alpha)=\frac{Mv_2^2}{2}(1+\frac{M}{m})\,,$$

откуда находим

$$v_2=\sqrt{\frac{2m^2gl(1-\cos\alpha)}{M(m+M)}}\,. \qquad (1.3.18)$$

Для определения угловой скорости обратим внимание на то, что вращение происходит относительно подвижной оси, следовательно, необходимо определить скорость маятника относительно тележки. Так как $v_1=\dfrac{Mv_2}{m}$, то

$$v_1=\sqrt{\frac{2Mgl(1-\cos\alpha)}{m+M}}\,,$$

откуда для относительной скорости получаем

$$v_{отн}=v_1+v_2=\sqrt{\frac{2gl(m+M)(1-\cos\alpha)}{M}}\,.$$

Следовательно, угловая скорость маятника

$$\omega=\frac{v_{отн}}{l}=\sqrt{\frac{2g(m+M)(1-\cos\alpha)}{Ml}}\,. \qquad (1.3.19)$$

Подставляя в (1.3.18), (1.3.19) числовые значения, находим

$$v_2=\sqrt{\frac{2\cdot(1кг)^2\cdot 9{,}8\,{}^{м}\!/_{с^2}\cdot 1м\cdot(1-\cos 45^0)}{5кг\cdot(5+1)кг}}=0{,}44\,{}^{м}\!/_{с}\,;$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\,{}^{м}\!/_{с^2}\cdot(1+5)кг\cdot(1-\cos 45^0)}{5кг\cdot 1м}}=2{,}6\,{}^{рад}\!/_{с}\,.$$

Индивидуальные задания

1.3.1. Лодка массой M = 150 *кг* и длиной l = 2,8 *м* стоит неподвижно в стоячей воде. Рыбак массой m = 70 *кг* переходит с носа на корму лодки. Пренебрегая сопротивлением воды, определить, на какое расстояние при этом сдвинется лодка. Ответ: $s = \dfrac{ml}{m+M} = 1{,}05\,м$.

1.3.2. Снаряд, вылетевший из орудия со скоростью v_0, разрывается в верхней точке траектории на расстоянии l от места выстрела на два осколка, массы которых относятся, как 2 : 1. Меньший из осколков полетел в обратном направлении со скоростью снаряда до разрыва. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на каком расстоянии от орудия упадет больший осколок. Ответ: $3l$.

1.3.3. На железнодорожной платформе установлена безоткатная пушка, из которой производится выстрел вдоль полотна под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту. Масса платформы с пушкой M = 20 *т*, масса снаряда m = 10 *кг*, коэффициент трения между колесами платформы и рельсами $\mu = 0{,}002$. Определить начальную скорость снаряда, если после выстрела платформа откатилась на расстояние s = 3 *м*. Ответ: $v = \dfrac{M}{m\cos\alpha}\sqrt{2\mu g s} \approx 970\,{}^{м}\!/_{с}$.

1.3.4. Две одинаковые тележки массой M движутся без трения друг за другом с одинаковой скоростью v_0. В какой-то момент времени находящийся на задней тележке человек массой m перепрыгивает на переднюю тележку со скоростью u относительно задней тележки. Определить скорость v_1 передней тележки. Ответ: $v_1 = v_0 + \dfrac{mu}{M+m}$.

1.3.5. Лягушка массы m сидит на конце доски массы M и длины L. Доска плавает по поверхности пруда. Лягушка прыгает под углом α к горизонту вдоль доски. Какой должна быть начальная скорость лягушки, чтобы она оказалась после прыжка на противоположном конце доски? Сопротивлением воды движению доски пренебречь. Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{Mgl}{(M+m)\sin 2\alpha}}.$$

1.3.6. Автомашина массой m = 1,8 т движется в гору, уклон которой составляет 3 м на каждые 100 м пути. Определить: 1) работу двигателя автомашины на пути 5 км, если коэффициент трения равен 0,1; 2) развиваемую двигателем мощность, если известно, что этот путь был преодолен за 5 мин. Ответ: $A = \dfrac{mgs}{l}(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}) \approx 11{,}5\,МДж$, $N = \dfrac{mgs}{lt}(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}) \approx 38{,}2\,кВт$.

1.3.7. Определить работу, совершаемую при подъеме груза массой m = 50 *кг* по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^0$ к горизонту на расстояние s = 4 *м*, если время подъема t = 2 *с*, а коэффициент трения $\mu = 0{,}06$. Ответ: $A = ms(\frac{2s}{t^2} + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)) \approx 1{,}48 кДж$.

1.3.8. Тело скользит с наклонной плоскости высотой h и углом наклона α к горизонту и движется далее по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным μ, определить расстояние s, пройденное телом на горизонтальном участке до полной остановки. Ответ: $s = h(\frac{1}{\mu} - ctg\alpha)$.

1.3.9. Автомобиль массой m = 1,8 т спускается при выключенном двигателе с постоянной скоростью $v = 54 {км}/{ч}$ по уклону дороги (угол к горизонту $\alpha = 3^0$) Определить, какой должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он смог подниматься на такой же подъем с такой же скоростью. Ответ: $N = 2mgv\sin\alpha \approx 27{,}7 кВт$.

1.3.10. Космонавт массой m приближается к космическому кораблю массой M с помощью троса, длина которого l. Какой путь s пройдет космонавт до сближения с кораблем? Ответ: $s = \frac{Ml}{M+m}$.

1.3.11. Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы координатных осей x и y. Определить мощность $N(t)$, развиваемую силой в момент времени t. Ответ: $N(t) = \frac{1}{m}(2t^3 + 3t^5)$.

1.3.12. Тело, падая с некоторой высоты, в момент соприкосновения с Землей обладает импульсом $p = 100 {кг \cdot м}/{с}$ и кинетической энергией $T = 500 Дж$. Определить: 1) с какой начальной высоты упало тело; 2) массу тела. Ответ: $h = \frac{2T^2}{p^2 g} \approx 5{,}1 м$, $m = \frac{p^2}{2T} = 10 кг$.

1.3.13. С башни высотой H = 20 *м* горизонтально со скоростью $v_0 = 10 {м}/{с}$ брошен камень массой m = 400 *г*. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени t = 1 *с* после начала движения: 1) кинетическую энергию; 2) потенциальную энергию. Ответ: $T = \frac{m}{2}(v_0^2 + g^2t^2) \approx 39{,}2 Дж$, $П = mg(H - \frac{gt^2}{2}) \approx 59{,}2 Дж$.

1.3.14. Материальная точка массой m = 20 *г* движется по окружности радиусом R = 10 *см* с постоянным тангенциальным ускорением. К концу пятого оборота после начала движения кинетическая энергия материальной точки оказалась равной 6,3 мДж. Определить тангенциальное ускорение. Ответ: $a_\tau = \dfrac{T}{2\pi mNR} \approx 0{,}1\, м/с^2$.

1.3.15. Ядро массой m = 5 *кг* бросают под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту, совершая при этом работу 500 Дж. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: 1) через какое время ядро упадет на землю; 2) какое расстояние по горизонтали оно пролетит. Ответ: $t = 2\sqrt{\dfrac{2A}{m}}\dfrac{\sin\alpha}{g} \approx 2{,}5 с$, $s = \dfrac{2A}{mg}\sin 2\alpha \approx 17{,}7 м$.

1.3.16. Тележка проходит расстояние s = 300 *м* под гору с уклоном $\alpha = 5^0$ и продолжает двигаться в гору с тем же уклоном. Принимая коэффициент трения постоянным и равным $\mu = 0{,}05$, определить расстояние, на которое поднимется тележка. Ответ: $x = \dfrac{s(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 81{,}8 м$.

1.3.17. Тело массой m = 0,4 *кг* скользит с наклонной плоскости высотой h = 10 *см* и длиной l = 1 *м*. Коэффициент трения на всем пути $\mu = 0{,}04$. Определить: 1) кинетическую энергию тела у основания наклонной плоскости; 2) путь, пройденный телом на горизонтальном участке до остановки. Ответ: $v = mg(h - \mu\sqrt{l^2 - h^2}) \approx 0{,}236 Дж$, $s = \dfrac{h}{\mu} - \sqrt{l^2 - h^2} \approx 1{,}51 м$.

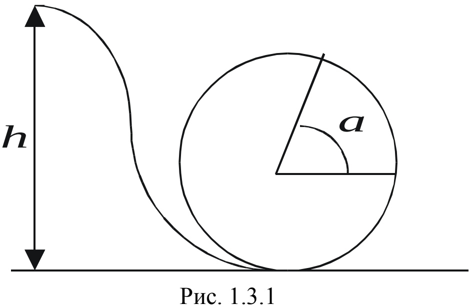

Рис. 1.3.1

1.3.18. Шайба массой m скользит без трения с высоты h по желобу, переходящему в петлю радиусом R (рис. 1.3.1). Определить: 1) силу

давления шайбы на опору в точке, определяемой углом α; 2) угол α, при котором произойдет отрыв шайбы.
Ответ:

$$F = mg\left[\frac{2(h - R(1+\sin\alpha))}{R} - \sin\alpha\right],\ \alpha = \arcsin\left[\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right)\right].$$

1.3.19. Пренебрегая трением, определить наименьшую высоту h, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом R = 6 *м* (рис. 1.3.1), и не оторваться от него в верхней точке петли. Ответ: $h = \frac{5}{2}R = 15м$.

1.3.20. Спортсмен с высоты h = 12 *м* падает на упругую сетку. Пренебрегая массой сетки, определите, во сколько раз наибольшая сила давления спортсмена на сетку больше его силы тяжести, если прогиб сетки под действием только силы тяжести спортсмена x_0 = 15 *см*. Ответ: $\frac{x_{\max}}{x_0} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{x_0}} \approx 13{,}7$.

1.3.21. С вершины идеально гладкой сферы радиусом R = 1,2 *м* соскальзывает небольшое тело. Определить высоту h (от вершины сферы), с которой тело оторвется от сферы. Ответ: $h = \frac{R}{3} = 0{,}4м$.

1.3.22. Два тела массами m_1 = 150 *г* и m_2 = 300 *г*, соединенные сжатой пружиной, разошлись при внезапном освобождении пружины в разные стороны. Пренебрегая трением и учитывая, что потенциальная энергия упругой деформации пружины составляет 1,8 Дж, определить скорости тел после распрямления пружины. Ответ:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2 \Pi}{m_1(m_1+m_2)}} = 4\,{}^{м}\!/_{с},\ v_2 = \sqrt{\frac{2m_1 \Pi}{m_2(m_1+m_2)}} = 2\,{}^{м}\!/_{с}.$$

1.3.23. Пуля массой m_1 = 15 *г*, летящая с горизонтальной скоростью $v = 0{,}5\,{}^{км}\!/_{с}$, попадает в баллистический маятник массой M = 6 *кг* и застревает в нем. Определить высоту h, на которую поднимется маятник, откачнувшись после удара. Ответ: $h = \frac{(mv)^2}{2g(m+M)^2} \approx 7{,}9см$.

1.3.24. Пуля массой m_1 = 10 *г*, летящая горизонтально попадает в баллистический маятник с длиной подвеса l = 1 *м* и массой M = 1,5 *кг* и застревает в нем. Определить скорость пули, если известно, что в результате удара маятник отклонился на угол $\varphi = 30^0$. Ответ: $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} \approx 164 \, м/с$.

1.3.25. При центральном упругом ударе движущееся тело массой m_1 ударяется в покоящееся тело массой m_2, в результате чего скорость первого тела уменьшается в 2 раза. Определить: 1) отношение масс тел; 2) кинетическую энергию второго тела непосредственно после удара, если первоначальная кинетическая энергия первого тела равна 800 Дж. Ответ: $\frac{m_1}{m_2} = 3$, $T_2' = \frac{3}{4}T_1 = 600 \, Дж$.

1.3.26. Определить во сколько раз уменьшится скорость шара, движущегося со скоростью v_1, при его соударении с покоящимся шаром, масса которого в n раз больше массы налетающего шара. Удар считать центральным, абсолютно упругим. Ответ: $\frac{v_1}{v_1'} = \frac{1+n}{1-n}$.

1.3.27. Тело массой m_1 = 3 *кг* движется со скоростью $v_1 = 2 \, м/с$ и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определить количество теплоты, выделившееся при ударе. Ответ: $Q = \frac{m_1 v_1^2}{4} = 3 \, Дж$.

1.3.28. Два шара массами m_1 = 9 *кг* и m_2 = 15 *кг* подвешены на нитях длиной l = 1,5 *м*. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклоняют на угол $\alpha = 30^0$ и отпускают. Считая удар неупругим, определить высоту, на которую поднимутся оба шара после удара. Ответ: $h = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 l(1-\cos\alpha) \approx 3{,}7 \, см$.

1.3.29. Два шара массами m_1 = 3 *кг* и m_2 = 2 *кг* подвешены на нитях длиной l = 1 *м*. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем больший шар отклонили от положения равновесия на угол $\alpha = 60^0$ и отпустили. Считая удар упругим, определить скорость второго шара после удара. Ответ: $v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} \approx 3{,}76 \, м/с$.

1.3.30. Два шара массами m_1 = 200 *г* и m_2 = 400 *г* подвешены на нитях длиной l = 67,5 *см*. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем первый шар отклоняют от положения равновесия на угол $\alpha = 60^0$ и отпускают. Считая удар упругим, определить, на какую высоту h поднимется второй шар после удара. Ответ: $h = \dfrac{4m_1^2 l(1-\cos\alpha)}{(m_1+m_2)^2} = 0{,}15 м$.

1.4. Механика твердого тела

Справочные сведения

Момент силы относительно неподвижной точки O: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы.

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки O: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O к материальной точке.

Закон изменения момента импульса $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, $\vec{M}$ – момент внешних сил относительно неподвижной точки O.

Момент инерции системы материальных точек относительно некоторой оси $J = \sum m_i r_i^2$, где r_i – расстояние от данной точки до оси вращения.

Момент инерции твердого тела относительно оси вращения $J = \int r^2 dm = \int\limits_{(V)} r^2 \rho \, dV$, ρ – плотность тела.

Теорема Штейнера $J = J_O + ma^2$, где J_O – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, J – момент инерции тела относительно произвольной оси, параллельной первой, a – расстояние между осями.

Основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно некоторой оси OZ имеет вид $\dfrac{d}{dt}(J_Z \omega) = M_Z$, где J_Z – момент инерции тела относительно оси OZ , M_Z – проекция момента внешних сил на эту ось. При $J_Z = const$ уравнение преобразуется к виду $J_Z \varepsilon = M_Z$.

Момент инерции полого тонкостенного однородного цилиндра (обруча) относительно оси симметрии $J = mR^2$; для сплошного однородного цилиндра или диска $J = \dfrac{1}{2} mR^2$.

Момент инерции однородного шара относительно произвольной оси, проходящей через его центр $J = \frac{2}{5} mR^2$.

Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину $J = \frac{1}{12} ml^2$.

Кинетическая энергия вращающегося тела $T = \frac{J\omega^2}{2}$.

Кинетическая энергия плоского движения твердого тела $T = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$.

Примеры решения задач

При решении задач на динамику твердого тела, как правило, необходимо применять основное уравнение динамики вращательного движения. Часто в подобных задачах твердое тело приводится в движение силами натяжения нитей, к которым подвешены грузы, поэтому необходимо также записывать уравнения движения (второй закон Ньютона) для грузов. Условие, связывающее два типа движения, как правило, заключается в отсутствии проскальзывания нити, что позволяет получить кинематическую связь между линейным ускорением груза и угловым ускорением твердого тела. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. Два тела, массы которых $m_1 = 0{,}25 кг$ и $m_2 = 0{,}15 кг$, связаны нитью, переброшенной через блок. Блок массой $m = 0{,}1 кг$ укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_1. Коэффициент трения тела m_1 о поверхность стола $\mu = 0{,}2$. С каким ускорением движутся тела и каковы силы натяжения нити по обе стороны от блока? Массу блока можно считать равномерно распределенной по ободу, трением в подшипниках оси блока пренебречь.

Решение

Применим для грузов второй закон Ньютона, а для блока – основное уравнение динамики вращательного движения. Силы, действующие на грузы, показаны на рис. 1.4.1.

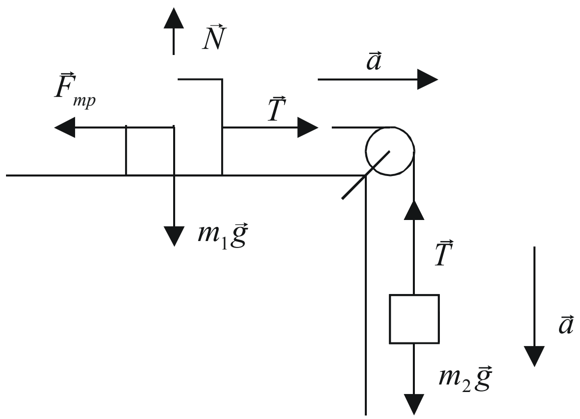

Рис. 1.4.1

Для груза m_1 второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления принимает вид

$$m_1 a = T_1 - F_{тр}\ ,\ \ N - m_1 g = 0\ , \qquad (1.4.1)$$

а по определению сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N\ .$$

Для груза m_2 уравнение вертикального движения

$$m_2 a = m_2 g - T_2\ . \qquad (1.4.2)$$

Наконец, уравнение вращательного движения блока

$$J\varepsilon = M\ , \qquad (1.4.3)$$

где $J = mR^2$ – момент инерции блока (обруча), ε – угловое ускорение блока, $M = (T_2 - T_1)R$ – результирующий момент сил натяжения, действующий на блок.

При отсутствии скольжения нити по блоку его угловое ускорение связано с линейным ускорением грузов по формуле $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$. С учетом приведенных соотношений уравнение (1.4.3) принимает вид

$$ma = T_2 - T_1. \qquad (1.4.4)$$

Исключая из (1.4.1) силы трения и реакции опоры, получаем

$$m_1 a = T_1 - \mu m_1 g\ . \qquad (1.4.5)$$

Наконец, складывая уравнения (1.4.2), (1.4.4), (1.4.5), получаем

$$a(m_1 + m_2 + m) = g(m_2 - \mu m_1),$$

откуда находим

$$a = \frac{g(m_2 - \mu m_1)}{m + m_1 + m_2}. \qquad (1.4.6)$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$a = \frac{9{,}8 \, {}^{м}\!/\!{}_{с^2} \, (0{,}15 - 0{,}2 \cdot 0{,}25)кг}{(0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}1)кг} = 1{,}96 \, {}^{м}\!/\!{}_{с^2}.$$

Подставляя (1.4.6) в (1.4.2) и (1.4.5), находим силы натяжения:

$$T_1 = \frac{m_1 g(m_2(1+\mu) + \mu m)}{m + m_1 + m_2},$$

$$T_2 = \frac{m_2 g(m + (1+\mu)m_1)}{m + m_1 + m_2}.$$

Вычисления приводят к результатам:

$$T_1 = \frac{0{,}25кг \cdot 9{,}8 \, {}^{м}\!/\!{}_{с^2} \, (0{,}15 \cdot 1{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}1)кг}{(0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}1)кг} = 0{,}98Н,$$

$$T_2 = \frac{0{,}15кг \cdot 9{,}8 \, {}^{м}\!/\!{}_{с^2} \, (0{,}1 + 1{,}2 \cdot 0{,}25)кг}{(0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}1)кг} = 1{,}18Н.$$

Задача 2. В однородном диске массой m = 1 *кг* и радиусом r = 30 *см* вырезано круглое отверстие диаметром d = 20 *см*, центр которого находится на расстоянии l = 15 *см* от оси диска. Найти момент инерции полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

Решение

Данное тело можно представить как совокупность сплошного диска, изготовленного из материала с некоторой плотностью, и другого диска из материала с такой же по величине, но противоположной по знаку плотностью, расположенного в отверстии первого диска. Тогда результирующий момент инерции этой системы можно найти, вычитая из момента инерции первого диска момент инерции второго диска.

Для первого диска

$$J_1 = \frac{1}{2} m r^2,$$

а для второго по теореме Штейнера

$$J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 + m_2 l^2 ,$$

где $r_2 = \frac{d}{2}$, а массу второго диска можно определить из условия пропорциональности массы и площади: $m_2 = m\frac{S_2}{S} = \frac{md^2}{4r^2}$.

Тогда $J_2 = \frac{md^2}{32r^2}(d^2 + 8l^2)$, следовательно,

$$J = J_1 - J_2 = \frac{1}{2} mr^2 - \frac{md^2}{32r^2}(d^2 + 8l^2) .$$

Выполняя вычисления, находим

$$J = 0{,}5 \cdot 1кг \cdot (0{,}3м)^2 - \frac{1кг \cdot (0{,}2м)^2}{32 \cdot (0{,}3м)^2}((0{,}2м)^2 + 8 \cdot (0{,}15м)^2) = .$$

$$= 4{,}19 \cdot 10^{-2} кг \cdot м^2 .$$

Задача 3. Однородный тонкий стержень массой $m_1 = 0{,}2кг$ и длиной $l = 0{,}2м$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку О (рис. 1.4.2). В верхний конец стержня попадает пластилиновый шарик массой $m_2 = 10г$, движущийся со скоростью $v = 10 м/с$, и прилипает к стержню. Определить угловую скорость стержня и линейную скорость нижнего конца стержня сразу после удара, если расстояние от верхнего конца стержня до точки О равно $a = \frac{l}{3}$.

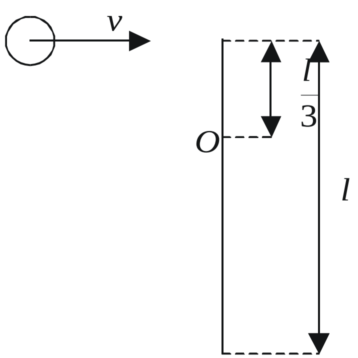

Рис. 1.4.2

Решение

Для определения угловой скорости вращения стержня воспользуемся законом сохранения момента импульса. Рассматривая шарик как материальную точку, получаем:

$$m_2 v a = \omega(J + m_2 a^2)\,, \tag{1.4.7}$$

где момент инерции стержня относительно точки О по теореме Штейнера равен

$$J = \frac{m_1 l^2}{12} + m_1\left(\frac{l}{2} - a\right)^2 = \frac{m_1 l^2}{12} + \frac{m_1 l^2}{36} = \frac{m_1 l^2}{9}\,. \tag{1.4.8}$$

Из (1.4.7) и (1.4.8) находим угловую скорость стержня сразу после удара

$$\omega = \frac{m_2 v a}{m_2 a^2 + \dfrac{m_1 l^2}{9}} = \frac{3 m_2 v}{l(m_1 + m_2)}\,.$$

Вычисления дают

$$\omega = \frac{3 \cdot 0{,}01\text{кг} \cdot 10\,{}^{м}\!/\!{}_{с}}{0{,}2\text{м} \cdot (0{,}2 + 0{,}01)\text{кг}} = 7{,}14\,{}^{рад}\!/\!{}_{с}\,.$$

Для определения линейной скорости нижнего конца стержня воспользуемся связью линейной и угловой скорости: $v = \omega R$, где радиус окружности равен $R = l - a$. Получаем

$$v = \omega(l - a) = \frac{2\omega l}{3} = \frac{2 m_2 v}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0{,}01\text{кг} \cdot 10\,{}^{м}\!/\!{}_{с}}{(0{,}2 + 0{,}01)\text{кг}} = 0{,}95\,{}^{м}\!/\!{}_{с}\,.$$

Задача 4. На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположных направлениях две нити с подвешенными к ним грузами массами m_1 и m_2 (рис. 1.4.3). Найти ускорения грузов и силы натяжения нитей. Момент инерции блока J, радиусы соответствующих участков блока R_1 и R_2.

Решение

Запишем второй закон Ньютона для грузов в проекции на вертикальное направление

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1\,,\ m_2 a_2 = T_2 - m_2 g\,, \tag{1.4.9}$$

где T_1 и T_2 – силы натяжения нитей.

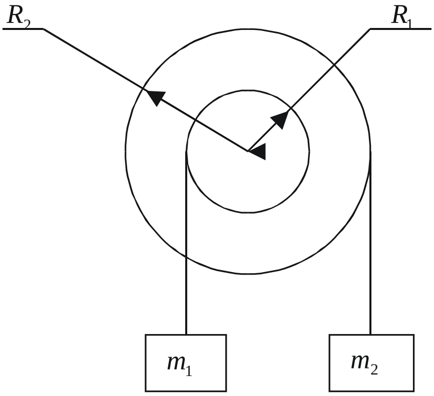

Рис. 1.4.3

Уравнение вращательного движения блока

$$J\varepsilon = T_1 R_1 - T_2 R_2 \,. \tag{1.4.10}$$

В силу отсутствия проскальзывания нитей по блоку можно записать

$$\varepsilon = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2} \,. \tag{1.4.11}$$

Из (1.4.9) – (1.4.11) следует

$$a_1 = \frac{R_1(T_1 R_1 - T_2 R_2)}{J} \,,\; a_2 = \frac{R_2(T_1 R_1 - T_2 R_2)}{J} \,. \tag{1.4.12}$$

Подставляя в уравнения движения грузов, получаем систему уравнений для определения сил натяжения нитей

$$(\frac{m_1 R_1^2}{J} + 1)T_1 - \frac{m_1 R_1 R_2}{J} T_2 = m_1 g \,,$$

$$-\frac{m_2 R_1 R_2}{J} T_1 + (\frac{m_2 R_2^2}{J} + 1) = m_2 g \,. \tag{1.4.13}$$

Решая систему (1.4.13), находим

$$T_1 = m_1 g \,\frac{J + m_2 R_2 (R_1 + R_2)}{J + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \,,\; T_2 = m_2 g \,\frac{J + m_1 R_1 (R_1 + R_2)}{J + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \,.$$

Подстановка полученных результатов в (1.4.12) дает

$$a_1 = g \,\frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2) R_1}{J + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \,,\; a_2 = g \,\frac{(m_2 R_2 - m_1 R_1) R_2}{J + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \,.$$

Задача 5. Два диска с моментами инерции J_1 и J_2 вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вокруг одной и той же оси без трения. Диски пришли в соприкосновение друг с другом. Из-за возникшего между дисками трения через некоторое время проскальзывание одного диска по другому прекращается. Какова станет тогда угловая скорость вращения дисков? Какое количество теплоты выделится?

Решение

Применим закон сохранения момента импульса. Получаем

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J\omega,$$

где $J = J_1 + J_2$ – момент инерции системы, ω – угловая скорость системы после прекращения проскальзывания. В результате находим

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}.$$

Для определения количества теплоты, выделившегося в результате взаимодействия дисков, воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому

$$Q = W_{K1} + W_{K2} - W_K,$$

где W_{K1} и W_{K2} – кинетические энергии дисков до взаимодействия, W_K – кинетическая энергия системы после взаимодействия. Поскольку

$$W_{K1} = \frac{J_1\omega_1^2}{2},\ W_{K2} = \frac{J_2\omega_2^2}{2},\ W_K = \frac{J\omega^2}{2},$$

получаем

$$Q = \frac{J_1 J_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(J_1 + J_2)}.$$

Задача 6. Тонкий обруч радиуса *R* раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и положили плашмя на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между столом и обручем равен μ? Сколько оборотов сделает обруч до полной остановки?

Решение

Так как действующая на обруч сила трения постоянна, то вращение обруча будет равнозамедленным, и мы можем применить уравнения равнозамедленного вращения

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t\ ,\ \ \Delta\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}\ .$$

Если обруч сделает до остановки N оборотов, то угол поворота составит $\Delta\varphi = 2\pi N$. В момент остановки обруча угловая скорость $\omega = 0$, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} \quad \Rightarrow \quad 2\pi N = \frac{\omega_0 t}{2}\ . \qquad (1.4.14)$$

Воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому работа силы трения равна изменению кинетической энергии обруча

$$\frac{J\omega_0^2}{2} = F_{TP} S\ . \qquad (1.4.15)$$

Здесь $J = mR^2$ – момент инерции обруча, $F_{TP} = \mu mg$ – сила трения и $S = 2\pi NR$ – путь, пройденный каждой точкой обруча до его остановки.

Решая систему уравнений (1.4.14), (1.4.15) с учетом выписанных соотношений для пути, силы трения и момента инерции, получаем

$$t = \frac{\omega_0 R}{\mu g}\ ,\ \ N = \frac{\omega_0^2 R}{4\pi\mu g}\ .$$

Индивидуальные задания

1.4.1. Полый тонкостенный цилиндр массой m = 0,5 *кг*, катящийся без скольжения, ударяется о стену и откатывается от нее. Скорость цилиндра до удара о стену $v_1 = 1{,}4\ м/с$, после удара $v_2 = 1\ м/с$. Определить выделившееся при ударе количество теплоты. Ответ: $Q = m(v_1^2 - v_2^2) = 0{,}48\,Дж$.

1.4.2. К ободу сплошного диска массой m = 10 *кг*, насаженного на ось, приложена постоянная касательная сила F = 30 *Н*. Определить кинетическую энергию диска через время t = 4 *с* после начала действия силы. Ответ: $T = \dfrac{F^2 t^2}{m} = 1{,}44\,кДж$.

1.4.3. Шар радиусом R = 30 *см* и массой m_1 = 3 *кг* вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ ($B = 2\ рад/с^2$, $C = -0{,}5\ рад/с^3$). Определить момент сил, действующий на шар для момента времени t = 3 *с*. Ответ: $M = \dfrac{2}{5} mR^2 (2B + 6Ct) = -0{,}1\,Н \cdot м$.

1.4.4. Вентилятор вращается с частотой $n = 600 \, {}^{об}\!/_{мин}$. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав N = 50 оборотов, остановился. Работа сил торможения равна 31,4 *Дж*. Определить: 1) момент сил торможения; 2) момент инерции вентилятора. Ответ: $M = \dfrac{A}{2\pi N} = 0{,}1 \, Н \cdot м$, $J = \dfrac{MN}{\pi n^2} = 1{,}59 \cdot 10^{-2} \, кг \cdot м^2$.

1.4.5. Сплошной однородный диск скатывается без скольжения с наклонной плоскости с углом при основании α. Определить линейное ускорение центра диска. Ответ: $a = \dfrac{2}{3} g \sin\alpha$.

1.4.6. К ободу однородного сплошного диска радиусом R = 0,5 *м* приложена постоянная касательная сила F = 100 *Н*. При вращении диска на него действует момент сил трения $M = 2 \, Н \cdot м$. Определить массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно $16 \, {}^{рад}\!/_{с^2}$. Ответ: $m = \dfrac{2(FR - M_{тр})}{\varepsilon R^2} = 24 \, кг$.

1.4.7. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 1{,}5 \, кг \cdot м^2$, вращаясь при торможении равнозамедленно, за время $t = 1 \, мин$ уменьшил частоту своего вращения с $n_0 = 240 \, {}^{об}\!/_{мин}$ до $n_1 = 120 \, {}^{об}\!/_{мин}$. Определить: 1) угловое ускорение ε маховика; 2) момент силы торможения; 3) работу торможения. Ответ: $\varepsilon = \dfrac{2\pi}{t}(n_0 - n_1) \approx 0{,}21 \, {}^{рад}\!/_{с^2}$, $M = \dfrac{2\pi J}{t}(n_0 - n_1) \approx 0{,}314 \, Н \cdot м$, $A = 2\pi^2 J (n_0^2 - n_1^2) \approx 355 \, Дж$.

1.4.8. Колесо радиусом R = 30 *см* и массой m = 3 *кг* скатывается без трения по наклонной плоскости длиной l = 5 *м* и углом при основании $\alpha = 25^0$. Определить момент инерции колеса, если его скорость после скатывания составила $v = 4{,}6 \, {}^{м}\!/_{с}$. Ответ: $J = mR^2\left(\dfrac{2gl\sin\alpha}{v^2} - 1)\right) \approx 0{,}258 \, кг \cdot м^2$.

1.4.9. С наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^0$ скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением, определить время движения шарика по наклонной плоскости, если известно, что его центр масс при скатывании понизился на h = 30 *см*. Ответ: $t=\dfrac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{7h}{10g}}\approx 0{,}586\,c$.

1.4.10. Полый тонкостенный цилиндр катится вдоль горизонтального участка дороги со скоростью $v=1{,}5\,{}^{м}\!/_{c}$. Определить путь, который он пройдет в гору за счет кинетической энергии, если уклон горы равен 5 м на каждые 100 м пути. Ответ: $s=\dfrac{v^2}{g\sin\alpha}\approx 4{,}59\,м$.

1.4.11. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом R = 50 *см* намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой m = 6,4 *кг*. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a=2\,{}^{м}\!/_{c^2}$. Определить момент инерции J вала и массу m_1 вала. Ответ: $J=mR^2\left(\dfrac{g}{a}-1\right)=6{,}24\,H$, $m_1=2m\left(\dfrac{g}{a}-1\right)=50\,кг$.

1.4.12. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом R = 5 *см* и массой M = 10 *кг* намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой m = 1 *кг*. Определить: 1) силу натяжения нити; 2) угловую скорость вала через t = 1 *с* после начала движения; 3) тангенциальное и нормальное ускорения точек, находящихся на поверхности вала. Ответ: $T=\dfrac{Mmg}{M+2m}\approx 8{,}17\,H$, $\omega=\dfrac{mgt}{(m+\frac{1}{2}M)R}\approx 32{,}7\,{}^{рад}\!/_{c}$, $a_n=\dfrac{m^2g^2t^2}{(m+\frac{1}{2}M)^2R}\approx 53{,}4\,{}^{м}\!/_{c^2}$, $a_\tau=\dfrac{mg}{m+\frac{1}{2}M}\approx 1{,}63\,{}^{м}\!/_{c^2}$.

1.4.13. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом R = 20 *см*, момент инерции которого $J=0{,}15\,кг\cdot м^2$, намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой m = 0,5 *кг*. До начала вращения барабана высота h груза над полом составляла 2,3 м. Определить: 1) время опускания груза до пола; 2) силу натяжения нити; 3) кинетическую энергию груза в момент удара о пол. Ответ: $t=\sqrt{\dfrac{2h(m+\frac{J}{R^2})}{mg}}\approx 2\,c$, $T=\dfrac{mgJ}{mR^2+J}\approx 4{,}32\,H$, $W_к=\dfrac{m^2gh}{m+\frac{J}{R^2}}\approx 1{,}33\,Дж$.

1.4.14. Через блок в виде однородного сплошного цилиндра массой m = 0,2 *кг* перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены тела массами m_1 = 0,35 *кг* и m_2 = 0,55 *кг*. Пренебрегая трением в оси блока, определить: 1) ускорение грузов; 2) отношение сил натяжения нити по разные стороны от блока. Ответ: $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} \approx 1{,}96\, {}^{м}\!/\!{}_{с^2}$,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2(2m_1 + \dfrac{m}{2})}{m_1(2m_2 + \dfrac{m}{2})} \approx 1{,}05 .$$

1.4.15. Тонкая однородная палочка длины l и массы m лежит симметрично на двух опорах, расстояние между которыми a . Одну из опор быстро убирают. Какова сразу после этого сила реакции оставшейся опоры? Ответ: $N = \dfrac{mgl^2}{l^2 + 3a^2}$.

1.4.16. Для демонстрации законов сохранения применяется маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом R и массой m, туго насаженный на ось радиусом r, которая подвешивается в горизонтальном положении на двух предварительно намотанных на нее нитях. Когда маятник отпускают, он совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска вокруг оси. Не учитывая трения и пренебрегая моментом инерции оси определить: 1) ускорение поступательного движения; 2) силу натяжения нити. Ответ: $a = \dfrac{g}{1 + \dfrac{R^2}{2r^2}}$, $T = \dfrac{mgR^2}{2(2r^2 + R^2)}$.

1.4.17. Однородный шар радиусом r = 20 *см* скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом R =50 *см*. Определить угловую скорость шара после отрыва от сферы. Ответ: $\omega = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{10}{17} g(R + r)} \approx 10\, {}^{рад}\!/\!{}_{с}$.

1.4.18. Маховик начинает вращаться из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}4\, {}^{рад}\!/\!{}_{с^2}$. Определить кинетическую энергию маховика через время $t_2 = 25\, с$ после начала движения, если через $t_1 = 10\, с$ после начала движения момент импульса маховика составлял $L = 60\, кг \cdot {}^{м^2}\!/\!{}_{с}$. Ответ: $T = \dfrac{L\varepsilon t_2^2}{2t_1} = 750\, Дж$.

1.4.19. Горизонтальная платформа массой m = 25 *кг* и радиусом R = 0,8 *м* вращается с угловой скоростью $n_1 = 18\,мин^{-1}$. В центре стоит человек и держит в расставленных руках гири. Считая платформу диском, определить частоту вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $J_1 = 3{,}5\,кг \cdot м^2$ до $J_2 = 1\,кг \cdot м^2$.

Ответ: $n_2 = \dfrac{2J_1 + mR^2}{2J_2 + mR^2} n_1 = 23\,мин^{-1}$.

1.4.20. Человек, стоящий на скамье Жуковского, держит в руках стержень длиной $l = 2{,}5\,м$ и массой $m = 8\,кг$, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамьи. Эта система (скамья и человек) обладает моментом инерции $J = 10\,кг \cdot м^2$ и вращается с частотой $n_1 = 12\,мин^{-1}$. Определить частоту n_2 вращения системы, если стержень повернуть в горизонтальное положение. Ответ:

$$n_2 = \frac{J}{J + \dfrac{ml^2}{12}} n_1 \approx 8{,}47\,мин^{-1}.$$

1.4.21. Платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, может вращаться по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Определить, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы. Ответ:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{10}{7} \approx 1{,}43.$$

1.4.22. Человек массой m = 20 *кг*, стоящий на краю горизонтальной платформы радиусом R = 1 *м* и массой M = 120 *кг*, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой n_1 = 10 $мин^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой, определить работу, совершаемую человеком при переходе от края платформы к ее центру. Ответ:

$$n_2 = \frac{(M + 2m)}{M} n_1 = 20\,мин^{-1}.$$

1.4.23. Однородный стержень длиной l = 0,85 *м* может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Стержень находится в положении устойчивого равновесия. Какую наименьшую скорость v надо сообщить свободному концу, чтобы стержень сделал полный оборот вокруг своей оси? Ответ:

$$v = \sqrt{6gl} \approx 7{,}07\,м/с.$$

1.4.24. Бревно высоты h = 3 *м* и массы m = 50 *кг* начинает падать из вертикального положения на землю. Определить скорость верхнего конца и момент импульса бревна в момент падения на землю. Ответ: $v=\sqrt{3gh}\approx 9{,}5\,{}^{м}\!/\!_{с}$, $L=mg\sqrt{\dfrac{gh}{3}}\approx 4{,}7\cdot 10^2\,\dfrac{кг\cdot м^2}{с}$.

1.4.25. Карандаш длиной l = 15 *см*, поставленный вертикально, начинает падать на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша? Ответ: $\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{l}}=14\,{}^{рад}\!/\!_{с}$, $v_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{3gl}=1{,}05\,{}^{м}\!/\!_{с}$, $v_2=\sqrt{3gl}=2{,}1\,{}^{м}\!/\!_{с}$.

1.4.26. Однородный стержень длиной l = 1 *м* подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. На какой угол α надо отклонить стержень, чтобы нижний конец стержня при прохождении положения равновесия имел скорость $v=5\,{}^{м}\!/\!_{с}$? $\varphi=\arccos\left(1-\dfrac{v^2}{3gl}\right)\approx 81^0 22'$.

1.4.27. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом R = 5 *см*. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой m = 0,4 *кг*. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь s = 1,8 *м* за время t = 3 *с*. Определить момент инерции маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой. Ответ: $J=\dfrac{mRt^2}{2s}(g-\dfrac{2s}{t^2})=0{,}47\,кг\cdot м^2$.

1.4.28. Шарик массой m = 100 *г*, привязанный к концу нити длиной l_1 = 1 *м*, вращается, опираясь на горизонтальную плоскость с частотой $n_1=1\,{}^{об}\!/\!_{с}$. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния l_2 = 0,5 *м*. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу совершит внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь. Ответ: $n_2=n_1\dfrac{l_1^2}{l_2^2}=4\,{}^{об}\!/\!_{с}$,

$$A=2\pi^2 m n_1^2 l_1^2\left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2-1\right)\approx 1{,}88\,Дж.$$

1.4.29. К краю стола прикреплен блок. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз движется по поверхности стола, а другой – вдоль вертикали вниз. Определить коэффициент трения между поверхностями груза и стола, если массы каждого груза и блока одинаковы и грузы движутся с ускорением $a = 3{,}6\,{}^{м}\!/_{с^2}$. Проскальзыванием нити по блоку и трением в блоке пренебречь. Блок считать однородным диском. Ответ: $\mu = 1 - \dfrac{5a}{2g} \approx 0{,}082$.

1.4.30. Однородный стержень длиной l = 1 *м* может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец абсолютно неупруго ударяет пуля массой m = 7 *г*, летящая перпендикулярно стержню и его оси. Определить массу стержня, если в результате попадания пули он отклонился от вертикали на угол $\alpha = 60^0$. Скорость пули равна $v = 360\,{}^{м}\!/_{с}$. Ответ: $M = \sqrt{\dfrac{6m^2v^2}{gl}} \approx 1{,}97\,кг$.

1.5. Всемирное тяготение

Справочные сведения

Закон всемирного тяготения $F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ - гравитационная постоянная.

Первый закон Кеплера: все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Второй закон Кеплера: радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади.

Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{b_1^3}{b_2^3}.$$

Сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, $\vec{g}$ – напряженность поля тяготения (ускорение свободного падения).

Потенциал поля тяготения $\varphi = -G\dfrac{M}{r}$, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия $П = -\dfrac{m_1m_2}{r}$.

Связь между потенциалом и напряженностью гравитационного поля $\vec{g} = -grad\varphi$.

Примеры решения задач

Как правило, при решении задач на закон всемирного тяготения требуется применение как самого закона, так и второго закона Ньютона. Если в задаче требуется вычислить работу силы всемирного тяготения необходимо помнить, что эта сила зависит от расстояния между телами и замена ее на постоянную величину оправдана лишь при движениях, масштаб которых мал по сравнению с этим расстоянием. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. Космонавт массой M = 100 *кг* находится на поверхности шаровидного астероида радиусом R = 1 *км* и держит в руках камень массой m = 10 *кг*. С какой максимальной скоростью v относительно поверхности астероида космонавт может бросить камень, не рискуя превратиться в спутник астероида? Средняя плотность астероида $\rho = 5 \cdot 10^3 кг$.

Решение

Чтобы определить скорость космонавта сразу после броска воспользуемся законом сохранения импульса

$$mv = Mu \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv}{M}, \qquad (1.5.1)$$

где u – скорость космонавта относительно астероида сразу после броска.

Очевидно, космонавт должен бросать камень по касательной к поверхности астероида и тогда его скорость после броска не должна превышать первую космическую скорость для данного астероида. Определим первую космическую скорость при помощи второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения

$$\frac{Mu^2}{R} = G\frac{M_A M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{G\frac{M_A}{R}}, \qquad (1.5.2)$$

где M_A – масса астероида.

Используя формулу связи массы и плотности, а также формулу объема шара, получаем

$$u = \sqrt{G\frac{\rho V}{R}} = \sqrt{G\frac{\rho 4\pi R^3}{3R}} = 2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}. \qquad (1.5.3)$$

Подставляя (1.5.3) в (1.5.1), находим

$$v = u\frac{M}{m} = 2R\frac{M}{m}\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}.$$

Проведем вычисления:

$$v = 2 \cdot 10^3 \, {}^{м}\!/_{с} \cdot \frac{100кг}{10кг} \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, Н \cdot {}^{м^2}\!/_{кг^2} \cdot 5 \cdot 10^3 \, {}^{кг}\!/_{м^3}}{3}} = 11{,}8 \, {}^{м}\!/_{с} \, .$$

Задача 2. Спутник движется по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли на высоте, равной радиусу Земли. С какой скоростью и в каком направлении должен перемещаться наблюдатель на Земле, чтобы спутник появлялся над ним каждые пять часов?

Решение

Определим предварительно линейную и угловую скорость движения спутника относительно центра Земли при помощи законов Ньютона и всемирного тяготения

$$\frac{mv^2}{R+h} = G\frac{mM}{(R+h)^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M}{R+h}} \, ,$$

где m – масса спутника, M – масса Земли, $h = R$ – высота спутника над поверхностью Земли, R – радиус Земли.

Угловая скорость связана с линейной соотношением

$$\omega = \frac{v}{R+h} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{G\frac{M}{(R+h)^3}} \, . \qquad (1.5.4)$$

С учетом $h = R$ и $g = G\dfrac{M}{R^2}$ из (1.5.4) получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{8R}} \, .$$

Угловая скорость вращения Земли $\omega_З = \dfrac{2\pi}{T_З}$, где $T_З = 24\,ч = 8{,}64 \cdot 10^4 \, с$ – период обращения Земли вокруг своей оси. Так как спутник и Земля вращаются в одну сторону, то угловая скорость спутника (относительно поверхности Земли)

$$\omega_{отн} = \omega - \omega_З = \sqrt{\frac{g}{8R}} - \frac{2\pi}{T_З} \, . \qquad (1.5.5)$$

Заметим, что за время $T = 5\ ч$ спутник успеет сделать немногим более одного оборота над фиксированной точкой земной поверхности, так как его угловое перемещение за это время

$$\beta = \omega_{отн} T = \left(\sqrt{\frac{g}{8R}} - \frac{2\pi}{T_З} \right) \cdot T =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{9{,}8\, м/с^2}{8 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\, м}} - \frac{2 \cdot \pi}{8{,}64 \cdot 10^4\, с} \right) \cdot 1{,}8 \cdot 10^4\, с = 6{,}58 > 2\pi\ .$$

Рассмотрим теперь движение наблюдателя в системе отсчета, жестко связанной с Землей. Если наблюдатель движется со скоростью v_H, то за время T он совершает перемещение $l = v_H T$. Траектория наблюдателя представляет собой дугу окружности радиуса R, следовательно, центральный угол, стягивающий эту дугу, равен $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{v_H T}{R}$. Для того, чтобы спутник через время T вновь оказался над наблюдателем необходимо, чтобы наблюдатель двигался в направлении движения спутника, так как в противном случае их встреча произойдет раньше.

Очевидно, что в момент встречи разность угловых перемещений спутника и наблюдателя должна составить 2π, что позволяет с учетом (1.5.5) написать уравнение

$$\left(\sqrt{\frac{g}{8R}} - \frac{2\pi}{T_З}\right)T - \frac{v_H T}{R} = 2\pi\ . \tag{1.5.6}$$

Выражая из (1.5.6) скорость наблюдателя, находим

$$v_H = \sqrt{\frac{gR}{8}} - 2\pi R\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_З}\right).$$

Подставляя числовые значения, получаем ответ

$$v_H = \sqrt{\frac{9{,}8\, м/с^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\, м}{8}} -$$

$$- 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\, м \left(\frac{1}{1{,}8 \cdot 10^4\, с} + \frac{1}{8{,}64 \cdot 10^4\, с} \right) = 100\, м/с\ .$$

Задача 3. Метеорит на очень большом расстоянии от планеты имеет скорость v_0. Падая на планету, он приобретает возле ее поверхности скорость v. Определить для данной планеты вторую космическую скорость.

Решение

Как известно, второй космической скоростью называется такая скорость, которую нужно сообщить телу на поверхности планеты, чтобы оно удалилось от планеты на бесконечно большое расстояние. Если положить скорость тела на бесконечности равной нулю, то работа силы всемирного тяготения будет равна начальной кинетической энергии тела, т.е.

$$A = \frac{mv_2^2}{2}, \tag{1.5.7}$$

где v_2 – вторая космическая скорость.

С другой стороны работу силы всемирного тяготения можно найти, приравняв ее по теореме о кинетической энергии к изменению кинетической энергии метеорита

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \tag{1.5.8}$$

Из (1.5.7), (1.5.8) следует

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

откуда находим

$$v_2 = \sqrt{v^2 - v_0^2}.$$

Индивидуальные задания

1.5.1. Период обращения искусственного спутника Земли составляет 3 ч. Считая его орбиту круговой, определить, на какой высоте от поверхности Земли находится спутник. Радиус Земли $R = 6{,}37 \cdot 10^6\,м$. Ответ: $H = \left(\frac{TR\sqrt{g}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - R \approx 4{,}18 \cdot 10^6\,м$.

1.5.2. Определите среднюю плотность Земли, считая известными гравитационную постоянную, радиус Земли и ускорение свободного падения на поверхности Земли. Ответ: $\rho = \frac{3g}{4\pi GR} \approx 5{,}51 \cdot 10^3\,кг/м^3$.

1.5.3. Две материальные точки массами m_1 и m_2 расположены друг от друга на расстоянии R. Определить угловую скорость вращения, с которой они должны вращаться вокруг общего центра масс, чтобы расстояние между ними осталось постоянным. Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}}$.

1.5.4. Свинцовый шар радиусом R = 50 *см* имеет внутри сферическую полость радиусом r = 5 *см*, центр которой находится на расстоянии d = 40 *см* от центра шара. С какой силой притягивается к шару материальная точка массой m = 10 *г*, находящаяся на расстоянии l = 80 *см* от центра шара, если линия, соединяющая центры шара и полости, составляет угол $\alpha = 60^0$ с линией, соединяющей центр шара с материальной точкой? Плотность свинца $\rho = 11{,}3\ {}^{г}\!/_{см^3}$. Ответ:

$$F = \frac{4}{3}\pi G\rho m\sqrt{\frac{R^6}{l^4} + \frac{r^6 l^2 - 2R^3 l^3 (l - d\cos\alpha)\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha}}{(d_2 + l^2 - 2dl\cos\alpha)^2}} \approx 5{,}7\cdot 10^{-6}\,H.$$

1.5.5. Стационарным искусственным спутником Земли называется спутник, находящийся постоянно над одной и той же точкой экватора.

Определите расстояние такого спутника до центра Земли. Ответ: $r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}22\cdot 10^7\,м$.

1.5.6. На экваторе некоторой планеты (плотность вещества планеты $\rho = 3\ {}^{г}\!/_{см^3}$) тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Определить период обращения планеты вокруг собственной оси. Ответ: $T = \sqrt{\frac{6\pi}{\rho G}} \approx 9{,}7\cdot 10^3\,c$.

1.5.7. Определить отношение гравитационной потенциальной энергии искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, к его кинетической энергии. Ответ: $\frac{П}{T} = 2$.

1.5.8. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала соприкасаются друг с другом. Определить, как изменится потенциальная энергия взаимодействия, если из того же материала изготовить шары с вдвое большими массами и тоже привести их в соприкосновение. Ответ: $\frac{П_1}{П} = \sqrt[3]{32} \approx 3{,}17$.

1.5.9. Луна притягивает к себе тело, находящееся на большом расстоянии от нее в состоянии покоя. Полагая, что атмосфера на Луне отсутствует, определить скорость падения тела на поверхность Луны. Ответ: $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 2{,}37\cdot 10^3\ {}^{м}\!/_{c}$.

1.5.10. Спутник поднимают на высоту, равную радиусу Земли, над ее поверхностью, а затем запускают по круговой орбите на той же высоте. Определить отношение работ на подъем спутника и на его запуск. Ответ: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{3}$.

1.5.11. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и движется по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. Найти отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли при условии, что спутник периодически раз в двое суток, проходит над точкой запуска. Радиус и период обращения Земли вокруг своей оси, а также ускорение свободного падения на ее поверхности считать известными. Ответ: $\frac{R}{R_з} = \sqrt[3]{\frac{gT_з}{9\pi^2 R_з}} = 5 \quad (\omega > \omega_з), \frac{R}{R_з} = \sqrt[3]{\frac{gT_з}{\pi^2 R_з}} = 10{,}5$ $(\omega < \omega_з)$.

1.5.12. Радиус Луны R_1 равен 0,27 радиуса Земли R_2. Средняя плотность вещества Луны ρ_1 равна 0,61 средней плотности вещества Земли ρ_2. Зная ускорение свободного падения на поверхности Земли, определить по этим данным ускорение свободного падения на поверхности Луны. Ответ: $g_1 = g_2 \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{R_1}{R_2} \approx 1{,}61 \, м/с^2$.

1.5.13. На какую высоту над поверхностью Земли поднимется ракета, пущенная вертикально вверх, если начальная скорость ракеты будет равна первой космической скорости. Ответ: $g = R = 6{,}37 \cdot 10^6 \, м$.

1.5.14. Радиус малой планеты r = 100 *км*, средняя плотность вещества $\rho = 3000 \, кг/м^3$. Определить вторую космическую скорость у поверхности этой планеты. Ответ: $v = r\sqrt{\frac{8}{3}\rho G\pi} \approx 129 \, м/с$.

1.5.15. Какова будет скорость ракеты на высоте, равной радиусу Земли, если ракета пущена с Земли вертикально с начальной скоростью $v_0 = 10 \, км/с$? Сопротивление воздуха не учитывать. Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 - gR} \approx 6{,}13 \cdot 10^3 \, м/с$.

1.6. Механические колебания

Справочные сведения

Уравнение гармонических колебаний $x'' + \omega_0^2 x = 0$, где ω_0 – собственная частота колебаний системы. Решение уравнения имеет вид $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, где A – амплитуда, $\omega_0 t + \varphi$ – фаза, φ – начальная фаза колебаний.

Периоды колебаний маятников: математического – $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{l/g}$; пружинного – $T = 2\pi\sqrt{m/k}$; физического – $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$.

Уравнение затухающих колебаний $x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0$, где δ – коэффициент затухания. Решение уравнения имеет вид $x = A_0 \exp(-\delta t)\cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания $\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$ обратен числу колебаний системы, в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз. Добротность $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ пропорциональна числу колебаний, совершаемых системой за время релаксации $\tau = \frac{1}{\delta}$.

Уравнение вынужденных колебаний $x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$, где F_0 и ω – амплитуда и частота внешней вынуждающей силы. Решение этого уравнения равно сумме решений однородного уравнения (затухающих колебаний) и частного решения неоднородного уравнения, которое имеет вид $x = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\cos(\omega t - arctg\,\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})$.

Резонансная частота и амплитуда вычисляются по формулам $\omega_{РЕЗ} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, $A_{РЕЗ} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$.

При сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и частоты $x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$ получается результирующее колебание $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, амплитуда и начальная фаза которого вычисляется по формулам $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$.

Примеры решения задач

При решении задач на свободные или вынужденные колебания, как правило, не требуется решать уравнения соответствующих колебаний.

Достаточно определить значение силы, вынуждающей движение тела к положению равновесия и тогда, из сопоставления полученного уравнения и соответствующего уравнения колебаний можно определить период и частоту колебаний, а значит и найти закон движения тела. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. Математический маятник подвешен вблизи вертикальной стены и колеблется в плоскости, параллельной стене. В стену вбит гвоздь так, что середина нити маятника наталкивается на него каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия справа налево. Найти длину нити, если период колебаний такого маятника (с помехой в виде гвоздя) $T = 2{,}41\ c$.

Решение

Очевидно, что период колебаний такого маятника равен полусумме периодов колебаний маятника с длиной нити l и маятника с длиной нити $\frac{l}{2}$.

Используя известное выражение для периода колебаний математического маятника, получаем

$$T = \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad (1.6.1)$$

Выражая из (1.6.1) длину нити, находим

$$l = \frac{gT^2}{\pi^2\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)}.$$

Подстановка числовых значений дает

$$l = \frac{9{,}8\,{}^{м}\!/\!_{c^2} \cdot (2{,}41c)^2}{3{,}14^2 \cdot (1{,}5 + \sqrt{2})} = 1{,}98\,м.$$

Задача 2. Груз массой m сбрасывается с высоты h на чашку пружинных весов. Жесткость пружины k, масса чашки M. Определить амплитуду колебаний. При какой высоте произойдет отрыв груза от чашки в верхней точке? Считать, что удар груза о чашку неупругий, но груз не прилипает к чашке.

Решение

Воспользуемся законом сохранения энергии и определим скорость v_0 груза в момент удара о чашку

$$mgh=\frac{mv_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0=\sqrt{2gh}\,. \tag{1.6.2}$$

Для определения скорости v чашки вместе с грузом сразу после удара применяем закон сохранения импульса

$$mv_0=(m+M)v \quad \Rightarrow \quad v=\frac{mv_0}{m+M}\,. \tag{1.6.3}$$

Пусть удлинение пружины перед падением груза равно x_1, а в момент максимального растяжения пружины после падения груза – x_2. Тогда применяя для движения чашки с грузом закон сохранения энергии, получаем

$$\frac{kx_1^2}{2}+(m+M)g(x_2-x_1)+\frac{(m+M)v^2}{2}=\frac{kx_2^2}{2}\,. \tag{1.6.4}$$

Так как из условия равновесия пружины под весом чашки $Mg = kx_1$ следует $x_1=\frac{Mg}{k}$, то используя (1.6.2), (1.6.3), получаем квадратное уравнение относительно x_2:

$$x_2^2-\frac{2(m+M)g}{k}x_2+\frac{M^2g^2}{k^2}+\frac{2mMg^2}{k^2}-\frac{2m^2gh}{k(m+M)}=0\,. \tag{1.6.5}$$

Решая (1.6.5), находим

$$x_2=\frac{(m+M)g}{k}+\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{2m^2gh}{k(m+M)}}\,.$$

Определим равновесное удлинение x_3 пружины под действием чашки вместе с грузом

$$kx_3=(m+M)g \quad \Rightarrow \quad x_3=\frac{(m+M)g}{k}\,.$$

Поскольку амплитуда колебаний есть максимальное смещение тела от положения равновесия, получаем

$$A=x_2-x_3=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{g(m+M)}}\,. \tag{1.6.6}$$

Условие отрыва груза от чашки в верхней точке состоит в исчезновении силы реакции со стороны чашки. По второму закону Ньютона это дает $a \geq g$, где a – ускорение груза. Поскольку $a = x^n$, а уравнение колебаний имеет вид $x=A\cos(\omega t+\varphi)$, максимальное значение ускорения $a=A\omega^2$. Частота колебаний пружинного маятника определяется по формуле $\omega^2 = \dfrac{k}{m+M}$, следовательно, условие отрыва груза принимает вид

$$\frac{Ak}{m+M} \geq g \ . \qquad (1.6.7)$$

Подставляя (1.6.6) в (1.6.7) и решая относительно высоты падения, получаем

$$h > \frac{M(2m+M)(m+M)g}{2km^2} \ .$$

Задача 3. К колесу радиуса R с горизонтально расположенной осью прикрепили на ободе грузик массой m. Найти массу колеса M, предполагая ее однородно распределенной по ободу, если частота малых колебаний колеса вокруг оси равна ω.

Решение

Будем характеризовать положение колебательной системы при помощи угла отклонения радиуса колеса, проведенного через грузик, от вертикального направления. Полная механическая энергия системы складывается из кинетической энергии колеса и груза и потенциальной энергии груза.

Кинетическая энергия может быть выражена через угол отклонения по формуле

$$E_K = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 ,$$

где $J = MR^2 + mR^2$ – момент инерции системы.

Потенциальная энергия груза выражается через угол отклонения по формуле

$$E_P = mgR(1 - \cos\varphi) \ .$$

Из закона сохранения энергии следует

$$E_K + E_P = \frac{(M+m)R^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgR(1 - \cos\varphi) = const \ .$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получаем

$$(M+m)R^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgR\sin\varphi = 0 \ .$$

Рассматривая случай малых колебаний $(\sin\varphi \approx \varphi)$, получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mg}{(M+m)R}\varphi = 0. \qquad (1.6.8)$$

Таким образом, для частоты малых колебаний из (1.6.8) следует

$$\omega^2 = \frac{mg}{(M+m)R}. \qquad (1.6.9)$$

Выражая из полученной формулы массу колеса, находим

$$M = m\left(\frac{g}{\omega^2 R} - 1\right).$$

Задача 4. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$. Определить уравнение траектории точки.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой синуса двойного угла

$$\sin 2\omega t = 2\sin\omega t\cos\omega t. \qquad (1.6.10)$$

Выразим из уравнения горизонтального движения $\sin\omega t$ и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin\omega t = \frac{x}{A},\ \cos\omega t = \pm\sqrt{1-\sin^2\omega t} = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}. \qquad (1.6.11)$$

Подставляя (1.6.11) в (1.6.10) и затем – в уравнение вертикального движения, получаем

$$y = \pm 2x\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}},$$

или, после возведения в квадрат,

$$y^2 = 4x^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right).$$

Индивидуальные задания

1.6.1. Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $x = A\sin\omega t$. В какой-то момент времени смещение точки x_1 = 15 *см*. При возрастании фазы колебаний в два раза смещение x_2 оказалось равным 24 *см*. Определить амплитуду колебаний *A*. Ответ: $A=\dfrac{2x_1^2}{\sqrt{4x_1^2-x_2^2}}=25\,см$.

1.6.2. Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой ν = 1 *Гц*, в момент времени t = 0 проходит положение, определяемое координатой x_0 = 5 *см*, со скоростью $v_0=15\,^{см}/_{с}$. Определить амплитуду колебаний. Ответ: $A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{4\pi^2\nu^2}}\approx 5{,}54\,см$.

1.6.3. Полная энергия *E* гармонически колеблющейся точки равна 10 мкДж, а максимальная сила, действующая на точку F_{max} = 0,5 *мН*. Напишите уравнение движения этой точки $x(t)$, если период T колебаний равен 4 *с*, а начальная фаза $\varphi=\pi/6$. Ответ: $x=0{,}04\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{6}\right),\,м$.

1.6.4. Если увеличить массу груза, подвешенного к пружине, на 600 г, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определить массу первоначально подвешенного груза. Ответ: $m=\dfrac{\Delta m}{3}=200\,г$.

1.6.5. На горизонтальной пружине жесткостью $k=900\,^{Н}/_{м}$ укреплен шар массой M = 4 *кг*, лежащий на гладком столе, по которому он может скользить без трения. Пуля массой m = 10 *г*, летящая с горизонтальной скоростью $v_0=600\,^{м}/_{с}$ и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины, попала в шар и застряла в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить: 1) амплитуду колебаний шара; 2) период колебаний шара. Ответ: $A=\dfrac{mv_0}{\sqrt{(M+m)k}}=0{,}1\,м$, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}\approx 0{,}42\,с$.

1.6.6. На чашку весов массой *M*, подвешенную на пружине жесткостью *k*, с высоты *h* падает небольшой груз массой *m*. Удар груза о дно чашки является абсолютно неупругим. Чашка в результате падения груза начинает совершать колебания. Определить амплитуду этих колебаний. Ответ: $A=\sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k^2}+\dfrac{2m^2gh}{(m+M)k}}$.

1.6.7. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определить, на каком расстоянии от центра масс должна находиться точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной. Ответ: $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}} \approx 10{,}1\,см$.

1.6.8. Однородный диск радиусом R = 20 *см* колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии l = 15 *см* от центра диска. Определить период колебаний диска относительно этой оси. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^2 + 2l^2}{2gl}} \approx 1{,}07\,c$.

1.6.9. Тонкий обруч радиусом R = 60 *см* подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определить период колебаний обруча. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} \approx 2\,c$.

1.6.10. Тонкий однородный стержень длиной l = 60 *см* может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии x = 15 *см* от его середины. Определить период колебаний стержня, если он совершает малые колебания. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l^2 + 12x^2}{12gx}} \approx 1{,}19\,c$.

1.6.11. Из тонкого однородного диска радиусом R = 20 *см* вырезана часть, имеющая форму круга радиусом r = 10 *см*, центр которого находится на середине радиуса диска (рис. 1.6.1). Определить периоды колебаний получившегося маятника относительно горизонтальных осей, проходящих через образующие диска в точках A и B.

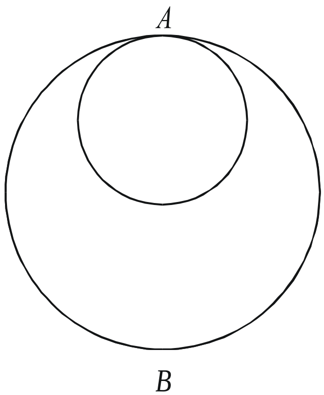

Рис. 1.6.1

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{15(4R^2 - r^2)}{8gr}} \approx 1{,}74\,c$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{30R^2 - 25r^2}{4gr}} \approx 3{,}09\,c$.

1.6.12. Математический маятник отклонили на 90^0 от вертикали и отпустили. В тот момент, когда маятник проходил положение равновесия, точка его подвеса стала двигаться вверх с ускорением a. На какой максимальный угол от вертикали отклонится маятник? Ответ: $\varphi_{\max} = \arccos\dfrac{a}{a+g}$.

1.6.13. Математический маятник, состоящий из нити длиной l = 1 *м* и свинцового шарика радиусом r = 2 *см*, совершает гармонические колебания с амплитудой A = 6 *см*. Определить: 1) скорость шарика в момент прохождения им положения равновесия; 2) максимальное значение возвращающей силы. Плотность свинца $\rho = 11{,}3\ г/см^3$. Ответ: $v_{\max} = A\sqrt{\dfrac{g}{l}} \approx 0{,}188\ м/с$, $F_{\max} = \dfrac{4\rho\pi r^3 Ag}{3l} \approx 0{,}223\,H$.

1.6.14. Математический маятник длиной l = 1 *м* подвешен к потолку кабины, которая начинает опускаться вертикально вниз с ускорением $a_1 = g/4$. Спустя время t_1 =3 *с* после начала движения кабина начинает двигаться равномерно, а затем в течение 3 *с* тормозится до остановки. Определить периоды гармонических колебаний маятника на каждом участке пути. Ответ: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{4l}{3g}} \approx 2{,}32\,c$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \approx 2{,}01\,c$, $T_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{4l}{5g}} \approx 1{,}8\,c$.

1.6.15. К наклонной стене подвешен маятник длины l. Маятник отклонили от вертикали на малый угол, в два раза превышающий угол наклона стены к вертикали, и отпустили. Найти период колебаний маятника, если удары о стену абсолютно упругие. Ответ: $T = \dfrac{4}{3}\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

1.6.16. Тело массы m, подвешенное на пружине жесткости k, лежит на подставке. Подставку мгновенно убирают. Написать уравнение колебаний тела $y(t)$, если первоначально пружина не деформирована. Ответ: $y(t) = \dfrac{mg}{k}(\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t - 1)$.

1.6.17. Складываются два гармонических колебания одного направления, уравнения которых $x_1 = 3\cos 2\pi t$ и $x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$, см. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Ответ: $A = 3\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{4})} \approx 5{,}54\,\textit{см}$, $\varphi = arctg\,\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}414\,\textit{рад}$.

1.6.18. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях согласно уравнениям $x = A\sin\omega t$ и $y = B\cos\omega t$. Определить уравнение траектории точки *y(x)* и указать направление движения точки по ней. Ответ: $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$, по часовой стрелке.

1.6.19. Точка участвует в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях согласно уравнениям $x = \cos 2\pi t$ и $y = \cos\pi t$. Определить уравнение траектории точки *y(x)*. Ответ: $2y^2 - x = 1$.

1.6.20. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях согласно уравнениям $x = A\cos\omega t$ и $y = A\cos 2\omega t$. Определить уравнение траектории точки *y(x)*. Ответ: $y^2 = 2A(\frac{x^2}{A^2}-1)$.

1.6.21. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = 2\cos\frac{t}{2}$ и $y = -\cos t$. Определить уравнение траектории точки *y(x)*. Ответ: $y = 1-\frac{x^2}{2}$.

1.6.22. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = 2\cos\omega t$ и $y = 3\sin 0{,}5\omega t$. Определить уравнение траектории точки *y(x)*. Ответ: $x = 2-\frac{4y^2}{9}$.

1.6.23. Амплитуда затухающих колебаний маятника за t = 2 *мин* уменьшилась в 2 раза. Определить коэффициент затухания δ. $\delta = \frac{1}{t}\ln\frac{A_1}{A_2} \approx 5{,}78\cdot 10^{-3}c^{-1}$.

1.6.24. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 мин уменьшилась в 3 раза. Определить, во сколько раз она уменьшится за 4 мин. Ответ: $\frac{A_1}{A_3} = 81$.

1.6.25. Начальная амплитуда затухающих колебаний маятника $A_0 = 3$ *см*. По истечении $t_1 = 10$ *с* амплитуда становится $A_1 = 1$ *см*. Определить, через какое время от начала колебаний амплитуда станет $A_2 = 0{,}3$ *см*. Ответ: $t_2 = t_1 \dfrac{\ln\frac{A_0}{A_2}}{\ln\frac{A_0}{A_1}} \approx 21 c$.

1.6.26. Тело массой $m = 0{,}6$ *кг*, подвешенное к пружине жесткостью $k = 30\,{}^{H}\!/_{м}$, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент колебаний $\lambda = 0{,}01$. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных колебаний, которые должно совершить тело за это время. Ответ: $t = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{m}{k}}\ln\frac{A_1}{A_2} \approx 97{,}6 c$, $N = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{A_1}{A_2} \approx 110$.

1.6.27. При наблюдении затухающих колебаний выяснилось, что для двух последовательных колебаний амплитуда второго меньше амплитуды первого на 60%. Период затухающих колебаний $T = 0{,}5$ *с*. Определить, какова была бы при этих условиях частота незатухающих колебаний. Ответ: $\nu_0 \frac{1}{2\pi T}\sqrt{(2\pi)^2 + \left(\ln\frac{A_1}{A_2}\right)^2} \approx 2{,}02\,Гц$.

1.6.28. Тело массой $m = 100$ *г*, совершая затухающие колебания, за $t = 1$ *мин* потеряло 40% своей энергии. Определить коэффициент сопротивления r. Ответ: $r = \frac{m}{t}\ln\frac{1}{0{,}6} \approx 8{,}51 \cdot 10^{-4}\,{}^{кг}\!/_{c}$.

1.6.29. Гиря массой $m = 0{,}5$ *кг*, подвешенная на пружине жесткостью $k = 50\,{}^{H}\!/_{м}$ совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}5\,{}^{кг}\!/_{c}$. На верхний конец пружины начинает действовать вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1\cos\omega t$. Определить для данной колебательной системы резонансную амплитуду. Ответ: $A_{рез} = \dfrac{F_0}{r\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} \approx 2 см$.

1.6.30. Гиря массой m = 400 *г*, подвешенная на пружине жесткостью $k = 40\,{}^{Н}\!/_{м}$, опущена в масло. Коэффициент сопротивления для этой системы $r = 0{,}5\,{}^{кг}\!/_{с}$. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = \cos\omega t$. Определить амплитуду вынужденных колебаний, если частота вынуждающей силы вдвое меньше собственной частоты колебаний. Ответ: $A = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{9k^2}{16} + \dfrac{kr^2}{4m}}} \approx 3{,}3\,см$.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

Справочные сведения

Уравнение Клапейрона-Менделеева для произвольной массы газа $pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT$, где $R = 8{,}31\frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная. Для газа постоянной массы $\frac{pV}{T} = const$.

Связь давления и температуры идеального газа $p = nkT$, где $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул газа, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{Дж}{К}$ – постоянная Больцмана, связанная с универсальной газовой постоянной и числом Авогадро соотношением $N_A k = R$.

Закон Бойля-Мариотта $pV = const$ при $T, m = const$.

Закон Гей-Люссака $\frac{V}{T} = const$ при $p, m = const$.

Закон Шарля $\frac{p}{T} = const$ при $V, m = const$.

Уравнения адиабатного процесса (уравнения Пуассона) $pV^{\gamma} = const$, $TV^{\gamma-1} = const$, $T^{\gamma}p^{1-\gamma} = const$.

Закон Дальтона для смеси газов $p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа $p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{КВ}\rangle^2 = \frac{2}{3}n\langle\varepsilon\rangle$.

Средняя квадратичная скорость молекулы $\langle v_{КВ}\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, средняя арифметическая скорость $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, наиболее вероятная скорость $v = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$.

Барометрическая формула $p = p_0 \exp(-\frac{Mgh}{RT})$.

При нормальных условиях $p = 1{,}013 \cdot 10^5\,Па$, $t = 0^0 C$.

Примеры решения задач

Решение задач этого раздела требует применения той или иной формы уравнения состояния идеального газа. В некоторых случаях, в зависимости от условия задачи, следует применять газовые законы и закон Дальтона. При решении большинства задач необходимо четко представлять, каково начальное состояние системы и какой процесс переводит ее в конечное состояние. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. Газ в цилиндрическом сосуде разделен на две равные части подвижным поршнем, имеющим массу m и площадь сечения S. При горизонтальном положении цилиндра давление газа в каждой половине сосуда равно p. Определить давление p_1 газа над поршнем при вертикальном положении цилиндра. Температуру газа считать постоянной.

Решение

При горизонтальном положении цилиндра объем каждой его части обозначим через V (эти объемы одинаковы). При вертикальном положении цилиндра объем верхней части станет равным $V+\Delta V$, а нижней $V-\Delta V$. Давление в нижней части цилиндра станет равным $p_1+\dfrac{mg}{S}$.

Согласно закону Бойля-Мариотта

$$p_1(V+\Delta V)=\left(p_1+\frac{mg}{S}\right)(V-\Delta V)=pV\,. \qquad (2.1.1)$$

Исключая из (2.1.1) отношение $\dfrac{\Delta V}{V}$, получаем квадратное уравнение относительно p_1:

$$p_1^2-\left(p-\frac{mg}{S}\right)p_1-\frac{mgp}{2S}=0\,. \qquad (2.1.2)$$

Решая (2.1.2), находим

$$p_1=\frac{1}{2}\left(p-\frac{mg}{S}\pm\sqrt{p^2+\frac{m^2g^2}{S^2}}\right).$$

Физический смысл имеет только знак плюс перед корнем, так как в противном случае значение p_1 становится отрицательным. Поэтому, окончательно

$$p_1=\frac{1}{2}\left(p-\frac{mg}{S}+\sqrt{p^2+\frac{m^2g^2}{S^2}}\right).$$

Задача 2. Поршневой насос при каждом качании захватывает воздух объемом V_0. При откачке этим насосом воздуха из сосуда объемом V насос совершил n качаний. Затем другой насос с тем же рабочим объемом V_0 начал нагнетать воздух из атмосферы в тот же сосуд, совершив также n качаний. Какое давление установится в сосуде? Температуру воздуха во время работы насоса считать постоянной. Начальное давление в сосуде равно атмосферному давлению p_0.

Решение

Согласно закону Бойля-Мариотта при откачке воздуха из сосуда после первого качания давление в сосуде станет равным

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V+V_0}.$$

Аналогично, после второго качания находим

$$p_2(V+V_0) = p_1 V \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_0\left(\frac{V}{V+V_0}\right)^2,$$

а после n качаний

$$p_n = p_0\left(\frac{V}{V+V_0}\right)^n.$$

При нагнетании воздуха в сосуд после n качаний давление в сосуде станет равным

$$p = p_n + \frac{p_0 n V_0}{V} = p_0 + \left\{\left(\frac{V}{V+V_0}\right)^n + \frac{nV_0}{V}\right\}.$$

Из полученного ответа следует, что при любом числе качаний окончательное давление в сосуде будет больше первоначального.

Задача 3. В цилиндре под поршнем находится воздух при давлении $p_1 = 2\cdot 10^5\,Па$ и температуре $t_1 = 27^0 C$. Определить массу m груза, который нужно положить на поршень после нагревания воздуха до температуры $t_2 = 50^0 C$, чтобы объем воздуха стал равен первоначальному. Площадь поршня $S = 30\ см^2$.

Решение

Так как в процессе нагревания объем воздуха в цилиндре не изменяется, то согласно закону Шарля имеем

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \qquad (2.1.3)$$

где

$$p_2 = p_1 + \frac{mg}{S}\ . \tag{2.1.4}$$

Подставляя (2.1.4) в(2.1.3), получаем

$$\frac{p_1}{p_1 + \frac{mg}{S}} = \frac{T_1}{T_2}\ . \tag{2.1.5}$$

Выражая из (2.1.5) массу груза, находим

$$m = \frac{p_1 S}{g}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right),$$

откуда после подстановки числовых значений, получаем

$$m = \frac{2\cdot 10^5\,Па\cdot 3\cdot 10^{-3}\,м^2}{9{,}8\,м/с^2}\left(\frac{323\,К}{300\,К} - 1\right) \approx 4{,}7\,кг\ .$$

Задача 4. Найти период малых колебаний поршня массой m, разделяющего гладкий цилиндрический сосуд сечения S на две части, длиной l каждая. По обе стороны от поршня находится газ при давлении p_0 и температуре T_0. Считать, что при колебаниях температура газа не меняется.

Решение

Запишем уравнение второго закона Ньютона для поршня в проекции на горизонтальное направление

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - F_2\,. \tag{2.1.6}$$

Здесь x – смещение поршня от положения равновесия, F_1 и F_2 – силы давления газа по разные стороны от поршня (учтено, что цилиндр гладкий и трение отсутствует).

Силы давления определяются по формулам

$$F_1 = p_1 S\ ,\ F_2 = p_2 S\ . \tag{2.1.7}$$

Для нахождения давлений в частях сосуда при смещенном поршне воспользуемся законом Бойля-Мариотта. Если длина меньшей части сосуда станет равной $l - x$, то

$$p_0 l S = p_2 (l - x) S\ ,$$

откуда следует

$$p_2 = \frac{p_0 l}{l - x}. \qquad (2.1.8)$$

Аналогично для большей части сосуда

$$p_1 = \frac{p_0 l}{l + x}. \qquad (2.1.9)$$

С учетом (2.1.7) – (2.1.9) уравнение (2.1.6) принимает вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{p_0 l S}{m}\left(\frac{1}{l - x} - \frac{1}{l + x}\right) = 0. \qquad (2.1.10)$$

Для приведения (2.1.10) к стандартному уравнению малых колебаний воспользуемся формулами

$$\frac{1}{l - x} = \frac{1}{l(1 - \frac{x}{l})} \approx \frac{1}{l}(1 + \frac{x}{l}) = \frac{1}{l} + \frac{x}{l^2}$$

и

$$\frac{1}{l - x} = \frac{1}{l(1 + \frac{x}{l})} \approx \frac{1}{l}(1 - \frac{x}{l}) = \frac{1}{l} - \frac{x}{l^2},$$

справедливыми при условии $x << l$. После подстановки этих формул (2.1.10) принимает вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2 p_0 S}{ml} x = 0.$$

Отсюда находим частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{2 p_0 S}{ml}}$$

и период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2 p_0 S}}.$$

Задача 5. В вертикально расположенном цилиндре находится газ массой m = 0,01 *кг*. Он отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном пружиной жесткостью $k = 20 \, Н/м$. При температуре T_1 = 290 *K* поршень расположен на расстоянии h = 0,2 *м* от дна цилиндра. До какой температуры надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты H = 0,5 *м*? Молярная масса $\mu = 29 \cdot 10^{-3}\ {кг}/{моль}$.

Решение

Обозначим длину недеформированной пружины l_0, площадь сечения поршня S, атмосферное давление p_0. Тогда условия равновесия поршня до и после нагревания запишутся в виде:

$$(p_1 - p_0)S = m_1 g + k(h - l_0) \qquad (2.1.11)$$

и

$$(p_2 - p_0)S = m_1 g + k(H - l_0), \qquad (2.1.12)$$

где m_1 – масса поршня, p_1 и p_2 – давление газа под поршнем до и после нагревания.

Вычитая (2.1.11) из (2.1.12), получаем

$$(p_2 - p_1)S = k(H - h). \qquad (2.1.13)$$

Запишем уравнения Менделеева – Клапейрона для газа под поршнем до и после нагревания:

$$p_1 hS = \frac{m}{M} RT_1 \qquad (2.1.14)$$

и

$$p_2 HS = \frac{m}{M} RT_2. \qquad (2.1.15)$$

Выражая из (2.1.14), (2.1.15) давления и подставляя их в (2.1.13), получаем

$$\frac{mR}{M}\left(\frac{T_2}{H} - \frac{T_1}{h}\right) = k(H - h). \qquad (2.1.16)$$

Решая (2.1.16) относительно T_2, находим

$$T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{kMH}{mR}(H - h).$$

Подставим числовые значения:

$$T_2 = 290К \cdot \frac{0{,}5м}{0{,}2м} + \frac{20\ {Н}/{м} \cdot 29 \cdot 10^{-3}\ {кг}/{моль} \cdot 0{,}5м}{10^{-2} кг \cdot 8{,}31\ {Дж}/{моль \cdot К}} \approx 728К.$$

Задача 6. На гладком столе лежит цилиндрический невесомый сосуд длиной l, разделенный герметичной перегородкой на две равные части, в одной из которых находится под некоторым давлением азот, а в другой – углекислый газ под давлением, вдвое большим. Температура газов одинакова. В некоторый момент перегородка теряет герметичность. На сколько и в каком направлении окажется смещенным сосуд после того, как газы перемешаются?

Решение

Определим положение центра масс сосуда с газом до нарушения герметичности перегородки исходя из определения $x_c = \dfrac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$. Получаем

$$x_{c1} = \frac{\dfrac{m_1 l}{4} + \dfrac{3m_2 l}{4}}{m_1 + m_2}, \qquad (2.1.17)$$

где m_1 и m_2 – массы газов.

Определим массы при помощи уравнения состояния идеального газа

$$\frac{pV}{2} = \frac{m_1}{M_1} RT, \; pV = \frac{m_2}{M_2} RT, \qquad (2.1.18)$$

где учтено, что давление углекислого газа в два раза больше.

Выражая из (2.1.18) массы и подставляя их в (2.1.17), после несложных преобразований получаем

$$x_{c1} = \frac{(M_1 + 6M_2)l}{4(M_1 + 2M_2)}. \qquad (2.1.19)$$

После нарушения герметичности центр масс очевидно будет находиться посередине сосуда $x_{c2} = \dfrac{l}{2}$, следовательно, координата центра масс должна измениться на

$$\Delta x = x_{c1} - x_{c2} = \frac{(2M_2 - M_1)l}{4(M_1 + 2M_2)}.$$

Так как стол гладкий, в горизонтальном направлении никакие силы на сосуд не действуют, следовательно, по закону сохранения импульса цилиндр должен переместиться на расстояние Δx в направлении от азота к углекислому газу.

Подставляя значения, находим

$$\Delta x = \frac{(2 \cdot 44 - 28)\, г/моль}{4(28 + 2 \cdot 44)\, г/моль} l = 0{,}129 l.$$

Индивидуальные задания

2.1.1. Посередине откачанного и запаянного с обеих сторон капилляра, расположенного горизонтально, находится столбик ртути длиной l = 20 *см*. Если капилляр поставить вертикально, то столбик переместится на $\Delta l = 20\,см$. До какого давления был откачан капилляр? Длина капилляра L = 1 *м*. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3\ {}^{кг}\!/\!_{м^3}$. Ответ:

$$p_0 = \frac{\rho g l (h - \Delta l)(h + \Delta l)}{2h\Delta l} = 15\,см.рт.ст.\ (\,h = \frac{L - l}{2}\,).$$

2.1.2. Один конец цилиндрической трубки длины l = 25 *см* и радиуса r = 1 *см* закрыт пробкой, а в другой вставлен поршень, который медленно вдвигают в трубку. Когда поршень подвинется на расстояние $\Delta l = 8\,см$, пробка вылетает. Считая температуру неизменной, найти силу трения F пробки о стенки трубки в момент вылета пробки. Атмосферное давление $p_0 = 0{,}1\,МПа$. Ответ: $F = \dfrac{p_0 \pi r^2 l}{(l - \Delta l)} \approx 46H$.

2.1.3. Узкая цилиндрическая трубка длины L, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного столбиком ртути длины h. Трубка расположена открытым концом вверх. Какова была длина l столбика воздуха в трубке, если при перевертывании трубки открытым концом вниз из трубки вылилась половина ртути? Плотность ртути равна ρ, атмосферное давление p_0. Ответ: $l = \dfrac{(p_0 - \frac{\rho g h}{2})(L - \frac{h}{2})}{p_0 + \rho g h}$.

2.1.4. Запаянную с одного конца трубку длины L = 76 *см* погружают в вертикальном положении открытым концом в сосуд с ртутью. На каком расстоянии l от поверхности должен находиться запаянный конец трубки, чтобы уровень ртути в ней был ниже уровня ртути в сосуде на величину h = 76 *см*? Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3\ {}^{кг}\!/\!_{м^3}$, атмосферное давление $p_0 = 0{,}1\,МПа$. Ответ: $l = h - \dfrac{p_0 L}{p_0 + \rho g h} = 38\,см$.

2.1.5. Открытую с обоих концов трубку длины L = 2 *м* погружают в вертикальном положении на половину ее длины в сосуд с ртутью. В трубку вдвигают поршень. На каком расстоянии l от поверхности ртути в сосуде должен находиться поршень, чтобы уровень ртути в трубке опустился на величину h = 1 *м*? Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ $кг/м^3$, атмосферное давление $p_0 = 0{,}1\,МПа$. Ответ: $l = h - \dfrac{Lp_0}{2(p_0 + \rho g h)} = 57\,см$.

2.1.6. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра имеется тонкий поршень, который может скользить в цилиндре без трения. С одной стороны поршня находится водород массой m_1 = 4 *г*, с другой – азот массой m_2 = 14 *г*. Какую часть объема цилиндра занимает водород? Ответ: $\eta = \dfrac{m_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_1} = 0{,}8$.

2.1.7. Сосуд разделен перегородками на три части, объемы которых равны V_1, V_2 и V_3, в которых находятся газы при давлениях p_1, p_2 и p_3 соответственно. Какое давление в сосуде установится после удаления перегородок, если температура при этом осталась неизменной? Ответ: $p = \dfrac{p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3}{V_1 + V_2 + V_3}$.

2.1.8. В баллоне объемом 0,2 $м^3$ находится газ под давлением 100 *кПа* при температуре 290 *К*. После подкачивания газа давление повысилось до 300 *кПа*, а температура увеличилась до 320 *К*. На сколько увеличилось число молекул газа в сосуде? Ответ: $\Delta N = N_A \dfrac{V}{R}\left(\dfrac{p_2}{T_2} - \dfrac{p_1}{T_1}\right) \approx 8{,}6 \cdot 10^{23}$.

2.1.9. Цилиндрический сосуд длиной l = 85 *см* разделен на две части легкоподвижным поршнем. В одной части сосуда находится водород, в другой – кислород той же массы. При каком отношении температур поршень будет делить сосуд на две равные части? Ответ: $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{M_1}{M_2} = 16$.

2.1.10. На дне сосуда, заполненного воздухом, лежит полый стальной шарик радиусом r = 2 *см* и массой m = 5 *г*. До какого давления нужно сжать воздух в сосуде, чтобы шарик поднялся вверх? Температура постоянна и равна t = 20^0*С*. Ответ: $p = \dfrac{3mRT}{4\pi r^3} \approx 1{,}23 \cdot 10^7\,Па$.

2.1.11. Воздушный шар объемом $10^3 м^3$ заполнен гелием. При нормальных условиях он может поднять груз массой 10^3 *кг*. Какой груз может поднять тот же шар при замене гелия водородом при той же температуре? Ответ: $m_2 = m_1 + \dfrac{pV}{RT}(M_1 - M_2) \approx 1{,}09 \cdot 10^3\,кг$.

2.1.12. Два одинаковых сосуда заполнены кислородом при температуре T_1 и соединены между собой трубкой с ничтожно малым объемом. Во сколько раз изменится давление кислорода в сосудах, если один из них нагреть до температуры T_2, а второй поддерживать при той же температуре T_1? Ответ: $\eta = \frac{2T_2}{T_1 + T_2}$.

2.1.13. В закрытом сосуде вместимостью 20 л находятся водород массой 6 г и гелий массой 12 г. Определить: 1) давление; 2) молярную массу газовой смеси в сосуде, если температура смеси T = 300 *K*. Ответ:

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) \approx 0{,}75\,МПа,\ M = \frac{RT(m_1 + m_2)}{pV} \approx 3 \cdot 10^{-3}\,{}^{кг}\!/_{моль}.$$

2.1.14. Определить плотность смеси газов водорода массой m_1 = 8 *г* и кислорода массой m_2 = 64 *г* при температуре T = 290 *К* и при давлении p = 0,1 *МПа*. Ответ: $\rho = \frac{(m_1 + m_2)p}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT} \approx 0{,}498\,{}^{кг}\!/_{м^3}$.

2.1.15. В баллоне вместимостью 15 л находится азот под давлением 100 кПа при температуре $t_1 = 27^0C$. После того, как из баллона выпустили азот массой 14 г, температура газа стала равной $t_2 = 17^0C$. Определить давление азота, оставшегося в баллоне. Ответ: $p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1} - \frac{\Delta mRT_2}{VM} \approx 16{,}3\,кПа$.

2.1.16. Баллон вместимостью V = 20 *л* содержит смесь водорода и азота при температуре 290 К и давлении 1МПа. Определить массу водорода в баллоне, если масса смеси равна 150 г. Ответ: $m_1 = M_1\frac{pVM_2 - mRT}{RT(M_2 - M_1)} \approx 6{,}3\,г$.

2.1.17. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях равна $\langle v_{кв}\rangle = 480\,{}^{м}\!/_{c}$. Сколько молекул содержит 1 г этого газа? Ответ: $N = \frac{mN_A\langle v_{кв}\rangle^2}{3RT} \approx 2{,}04 \cdot 10^{22}$.

2.1.18. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на $100\,{}^{м}\!/_{c}$? Ответ: $T = \frac{M}{R}\left(\frac{\langle v_{кв}\rangle - v_в}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right)^2 \approx 381K$.

2.1.19. Вертикальный цилиндр, закрытый с обоих концов, разделен поршнем. По обе стороны поршня находится по одному молю воздуха при температуре T = 300 *K*. Отношение объемов верхней части цилиндра и нижней равно $\eta = 4$. При какой температуре воздуха отношение этих объемов станет равным $\eta_1 = 3$? Ответ: $T_1 = T\dfrac{\eta_1(\eta^2 - 1)}{\eta(\eta_1^2 - 1)} = 420\,К$.

2.1.20. Пузырек воздуха поднимается со дна водоема, имеющего глубину *H*. Найти зависимость радиуса пузырька *r* от глубины его местонахождения *h* в данный момент времени, если его объем на дне водоема равен *V*. Температуру воды считать постоянной, атмосферное давление равно p_0. Плотность воды $\rho = 10^3\,{}^{кг}\!/_{м^3}$. Ответ: $r = \sqrt[3]{\dfrac{3(p_0 + \rho g H)V}{4\pi(p_0 + \rho g h)}}$.

2.1.21. Два сосуда с объемами $V_1 = 40\,л$ и $V_2 = 20\,л$ содержат газ при одинаковых температурах, но разных давлениях. После соединения сосудов в них установилось давление $p = 1\,МПа$. Каково было начальное давление p_1 в большем сосуде, если начальное давление в меньшем сосуде $p_2 = 0{,}6\,МПа$? Температуру считать постоянной. Ответ: $p_1 = \dfrac{p(V_1 + V_2) - p_2V_2}{V_1} = 1{,}2\,Мпа$.

2.1.22. Три сосуда с одинаковыми объемами сообщаются между собой кранами. Первый сосуд содержит газ массы m_1, третий – тот же газ массы m_2, во втором сосуде – вакуум. Сначала соединили второй и третий сосуды, а когда давление выровнялось, второй сосуд отсоединили от третьего и соединили с первым. Давление в первом и втором сосудах установилось равным *p*. Найти начальное давление p_1 в первом сосуде. Температуру считать постоянной. Ответ: $p_1 = \dfrac{2pm_1}{2m_1 + m_2}$.

2.1.23. Цилиндрический сосуд, расположенный горизонтально, заполнен газом при температуре $t = 27^0C$ и давлении $p = 0{,}1\ МПа$ и разделен на две равные части подвижной перегородкой. Каково будет давление p', если в одной части сосуда газ нагреть до температуры $t' = 57^0C$, а в другой – температуру газа оставить без изменения? Ответ: $p' = \dfrac{p(T + T')}{2T} = 105\,кПа$.

2.1.24. Цилиндр разделен на две части подвижным поршнем, имеющим массу *m* и площадь сечения *S*. При горизонтальном положении цилиндра давление газа в сосуде по обе стороны поршня одинаково и равно *p*. Найти давление p' газа над поршнем, когда цилиндр расположен вертикально. Процесс считать изотермическим. Ответ: $p' = \frac{1}{2}\left(p - \frac{mg}{S} + \sqrt{p^2 + \left(\frac{mg}{S}\right)^2}\right)$.

2.1.25. В запаянной цилиндрической трубке, расположенной горизонтально, находится воздух при нормальных условиях. Трубка разделена подвижным поршнем на две части, отношение объемов которых $V_1/V_2 = 1/2$. До какой температуры t_1 следует нагреть меньшую часть трубки и до какой температуры t_2 охладить большую часть трубки, чтобы поршень делил трубку на две равные части? Ответ: $T_1 = \frac{3T_0}{2} \approx 410\,К$, $T_2 = \frac{3T_0}{4} \approx 205\,К$.

2.1.26. При адиабатическом сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление изменяется от $p_1 = 0{,}1\,МПа$ до $p_2 = 3{,}5\,МПа$. Начальная температура воздуха $t_1 = 40^0C$. Найти температуру воздуха в конце сжатия. Ответ: $T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \approx 864\,К$.

2.1.27. Газ расширяется адиабатически, причем объем его увеличивается вдвое, а термодинамическая температура падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы имеют молекулы этого газа? Ответ: $i = 2\frac{\ln\frac{V_2}{V_1}}{\ln\frac{T_1}{T_2}} = 5$.

2.1.28. Полый шар объемом $V = 10\ см^3$, заполненный воздухом при температуре $T_1 = 573\ К$ соединили трубкой с чашкой, заполненной ртутью. Определить массу ртути, вошедшей в шар при остывании воздуха в нем до температуры $T_2 = 293\ К$. Изменением объема шара пренебречь. Плотность ртути $\rho = 13{,}6\cdot 10^3\ кг/м^3$. Ответ: $m = \rho V\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \approx 66{,}5\,г$.

2.1.29. В сосуде вместимостью $V = 0{,}3\ л$ при температуре $T = 290\ К$ находится некоторый газ. На сколько понизится давление газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет $N = 10^{19}$ молекул? Ответ: $\Delta p = \frac{\Delta NkT}{V} \approx 133\,Па$.

2.1.30. Определить давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность равна $0{,}01\,{}^{кг}\!/_{м^3}$, а средняя квадратическая скорость молекул газа составляет $480\,{}^{м}\!/_{c}$. Ответ: $p = \dfrac{\rho\langle v_{кв}\rangle^2}{3} = 768\,Па$.

2.2. Явления переноса

Справочные сведения

Распределение Максвелла молекул идеального газа по скоростям $f(v) = 4\pi\left(\dfrac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[-\dfrac{m_0 v^2}{2kT}\right]$.

Средняя длина свободного пробега молекул $\langle l\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, где d – эффективный диаметр молекулы.

Среднее число столкновений $\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle v\rangle$, где $\langle v\rangle$ – средняя арифметическая скорость.

Закон Фурье $J_E = -\lambda\dfrac{dT}{dx}$, где J_E – плотность теплового потока (количество теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x), λ – коэффициент теплопроводности, $\dfrac{dT}{dx}$ – градиент температуры. Коэффициент теплопроводности можно найти по формуле $\lambda = \dfrac{1}{3}c_V\rho\langle v\rangle\langle l\rangle$, где c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Закон Фика $J_m = -D\dfrac{d\rho}{dx}$, где J_m – плотность потока массы (масса вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x), D – коэффициент диффузии, который можно найти по формуле $D = \dfrac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle$.

Плотность потока импульса $J_P = -\eta\dfrac{dv}{dx}$ (полный импульс, переносимый в единицу времени в положительном направлении оси через единичную площадку, перпендикулярную оси x), η – коэффициент динамической вязкости, который вычисляется по формуле $\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle$.

Примеры решения задач

Задача 1. Расстояние между стенками дьюаровского сосуда равно 8 мм. При каком давлении теплопроводность воздуха, находящегося между стенками дьюаровского сосуда, начнет уменьшаться при откачке? Температура воздуха 17^0C, диаметр молекулы воздуха принять равным $3\cdot 10^{-7}\,\textit{мм}$.

Решение

Коэффициент теплопроводности газа определяется по формуле

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\rho\langle v_{кв}\rangle\langle l\rangle, \qquad (2.2.1)$$

где c_V - удельная теплоемкость при постоянном объеме,

ρ – плотность,

$\langle v_{кв}\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул,

$\langle l\rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул. Средняя арифметическая скорость и средняя длина свободного пробега вычисляются по формулам

$$\langle v_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},\ \langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (2.2.2)$$

где n – концентрация молекул. По определению $n = \frac{N}{V}$, где число молекул можно определить из соотношения

$$\frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mN_A}{M}. \qquad (2.2.3)$$

Из (2.2.2), (2.2.3) находим

$$n = \frac{mN_A}{MV} = \frac{\rho N_A}{M} \quad \Rightarrow \quad \langle l\rangle = \frac{M}{\sqrt{2}\pi d^2\rho N_A}. \qquad (2.2.4)$$

Подставляя (2.2.4) в (2.2.1), получаем

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\,\frac{M}{\sqrt{2}\pi d^2 N_A}.$$

На первый взгляд полученное выражение не зависит от давления. Однако, при выводе формул мы не учитывали размеров сосуда. Очевидно, что как только средняя длина свободного пробега молекул сравняется с расстоянием между стенками, она перестанет изменяться, в то время как плотность газа будет продолжать уменьшаться по мере откачки. Следовательно, уменьшение теплопроводности начнется в тот момент, когда средняя длина свободного пробега молекул станет равной расстоянию между стенками.

Выражая концентрацию из уравнения $p = nkT$ и подставляя в (2.2.2), находим

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p},$$

откуда следует расчетная формула

$$p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle l \rangle}.$$

Подстановка числовых значений дает:

$$p = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\, Дж/К \cdot 290 К}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot (3 \cdot 10^{-10} м)^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3} м} = 1{,}25 Па.$$

Задача 2. Углекислый газ и азот находятся при одинаковых температурах и давлениях. Найти для этих газов отношение: а) коэффициентов диффузии; б) вязкости; в) теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

Решение

По определению коэффициента диффузии

$$D = \frac{1}{3}\langle v_{кв} \rangle \langle l \rangle. \qquad (2.2.5)$$

Выражая концентрацию из уравнения $p = nkT$, для коэффициента диффузии с учетом (2.2.2) получаем выражение

$$D = \frac{2}{3} \cdot \frac{kT}{\pi d^2 p}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}.$$

Учитывая, что газы находятся при одинаковых условиях, получаем

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{28\, г/моль}{44\, г/моль}} = 0{,}8. \qquad (2.2.6)$$

Коэффициент динамической вязкости вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v_{кв}\rangle\langle l\rangle, \qquad (2.2.7)$$

где ρ – плотность газа. Следовательно, коэффициенты диффузии и динамической вязкости связаны друг с другом соотношением

$$\eta = \rho D. \qquad (2.2.8)$$

Плотность газа можно определить из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \qquad (2.2.9)$$

Из (2.2.6), (2.2.8), (2.2.9) следует

$$\eta = \frac{pM}{RT}D \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{M_1 D_1}{M_2 D_2} = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = .$$

$$= \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{44\,г/моль}{28\,г/моль}} = 1{,}25.$$

Коэффициент теплопроводности вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\rho\langle l\rangle\langle v_{кв}\rangle, \qquad (2.2.10)$$

где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,

i – число степеней свободы молекулы.

Таким образом, между коэффициентами динамической вязкости и теплопроводности существует простая связь

$$\lambda = c_V\eta. \qquad (2.2.11)$$

Поскольку число степеней свободы у двухатомной молекулы равно пяти, а у трехатомной – шести, из (2.2.10), (2.2.11) следует

$$\lambda = \frac{i}{2}\frac{R}{M}\eta \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{6\eta_1 M_2}{5\eta_2 M_1} =$$

$$1{,}2\sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = 1{,}2\sqrt{\frac{28\,г/моль}{44\,г/моль}} = 0{,}96.$$

Индивидуальные задания

2.2.1. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода равна 2,5 см, если температура газа равна 67^0C? Диаметр молекулы водорода принять равным 0,28 нм. Ответ: $p = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle l \rangle} \approx 0{,}539\,Па$.

2.2.2. Определите среднюю продолжительность свободного пробега молекул водорода при температуре 27^0C и давлении 0,5 кПа. Диаметр молекулы водорода принять равным 0,28 нм. Ответ: $\langle \tau \rangle = \dfrac{k\sqrt{TM}}{4\sqrt{\pi R} d^2 p} \approx 13{,}3\,нс$.

2.2.3. При температуре 300 К и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна 0,1 мкм. Чему равно среднее число столкновений, испытываемых молекулами в 1 с, если сосуд откачан до 0,1 первоначального давления? Температуру газа считать постоянной. Ответ: $\langle z_1 \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}} \dfrac{p_1}{\langle l \rangle p} \approx 4{,}45 \cdot 10^8 c^{-1}$.

2.2.4. Определить коэффициент теплопроводности азота, находящегося в некотором объеме при температуре 280 К. Эффективный диаметр молекул азота принять равным 0,38 нм. Ответ: $\lambda = \dfrac{i}{3} \dfrac{k}{\pi d^2} \sqrt{\dfrac{RT}{\pi M}} \approx 8{,}25 \dfrac{мВт}{м \cdot К}$.

2.2.5. Кислород находится при нормальных условиях. Определить коэффициент теплопроводности кислорода, если эффективный диаметр его молекул равен 0,36 нм. Ответ: $\lambda = \dfrac{i}{3} \dfrac{k}{\pi d^2} \sqrt{\dfrac{RT}{\pi M}} \approx 8{,}49 \dfrac{мВт}{м \cdot К}$.

2.2.6. Пространство между двумя параллельными пластинами площадью S = 150 $см^2$ каждая, находящимися на расстоянии $\Delta x = 5\,мм$ друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре 17^0C, другая – при температуре 27^0C. Определить количество теплоты, прошедшее за 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода принять равным 0,36 нм. Ответ: $Q = \dfrac{i}{3} \dfrac{k}{\pi d^2} \sqrt{\dfrac{RT}{\pi M}} \dfrac{(t_2 - t_1)}{\Delta x} t \approx 76{,}4\,Дж$.

2.2.7. Определить коэффициент диффузии кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода принять равным 0,36 нм. Ответ: $D = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}\frac{kT}{\pi p d^2} \approx 9{,}18 \cdot 10^{-6}\, м^2/с$.

2.2.8. Определить массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 50 $см^2$ за 20 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен $1\,кг/м^4$. Температура азота 290 К, а средняя длина свободного пробега его молекул равна 1 мкм. Ответ: $m = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\langle l\rangle \frac{dp}{dx} St \approx 15{,}6\, мг$.

2.2.9. Найти среднее число столкновений в единицу времени молекул некоторого газа, если средняя длина свободного пробега $\langle l\rangle = 5\, мкм$, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{кв}\rangle = 500\, м/с$. Ответ: $\langle z\rangle = \frac{\langle v_{кв}\rangle}{\langle l\rangle}\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \approx 9{,}2 \cdot 10^7 с^{-1}$.

2.2.10. Определить коэффициент теплопроводности азота, если коэффициент динамической вязкости для него при тех же условиях равен $10\, мкПа \cdot с$. Ответ: $\lambda = \frac{i}{2}\frac{R}{M}\eta \approx 7{,}42\frac{мВт}{м \cdot К}$.

2.2.11. Азот находится под давлением 100 кПа при температуре 290 К. Определить коэффициенты диффузии и динамической вязкости азота, если эффективный диаметр его молекул равен 0,38 нм. Ответ: $D = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}\frac{kT}{\pi p d^2} \approx 9{,}74 \cdot 10^{-6}\, м^2/с$, $\eta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}}\frac{k}{\pi d^2} \approx 1{,}13 \cdot 10^{-5}\frac{кг}{м \cdot с}$.

2.2.12. Ниже какого давления можно говорить о вакууме между стенками сосуда Дьюара, если расстояние между стенками сосуда равно 8 мм, а температура 17^0C? Эффективный диаметр молекул воздуха принять равным 0,27 нм. Ответ: $p \le \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 l} \approx 1{,}54\, Па$.

2.2.13. Давление разреженного газа в рентгеновской трубке при температуре 17^0C равно 130 мкПа. Можно ли считать вакуум в трубке высоким, если характерный размер l_0 (расстояние между катодом и анодом трубки) составляет 50 мм. Эффективный диаметр молекул воздуха принять равным 0,27 нм. Ответ: $\langle l\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 95{,}1\, м >> l_0$, вакуум высокий.

2.2.14. Найти диаметр молекулы кислорода, если при температуре $t = 0^0C$ вязкость кислорода $\eta = 18{,}8\,мкПа\cdot с$. Ответ: $d = \sqrt{\dfrac{2k}{3\pi\eta}\sqrt{\dfrac{MT}{R\pi}}} \approx 3\cdot 10^{-10}\,м$.

2.2.15. Какое предельное число молекул воздуха должно находиться внутри сферического сосуда диаметром 15 см, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом? Эффективный диаметр молекул воздуха принять равным 0,27 нм. Ответ: $N = \dfrac{D^2}{6\sqrt{2}d^2} \approx 3{,}64\cdot 10^{16}$.

2.3. Основы термодинамики

Справочные сведения

Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степень свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $\dfrac{kT}{2}$, а на каждую колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная kT.

Средняя энергия молекулы $\langle\varepsilon\rangle = \dfrac{i}{2}kT$, где $i = i_{ПОСТ} + i_{ВРАЩ} + 2i_{КОЛЕБ}$ – число степеней свободы молекулы.

Внутренняя энергия произвольной массы газа $U = \dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}RT$.

Первое начало термодинамики в интегральной $Q = \Delta U + A$ и в дифференциальной форме $dQ = dU + dA$.

Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = \dfrac{i}{2}R$, а при постоянном давлении $C_P = \dfrac{i+2}{2}R$; уравнение Майера $C_P - C_V = R$. Удельная теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{C_V}{M}$, а при постоянном давлении $c_P = \dfrac{C_P}{M}$. Показатель адиабаты идеального газа $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = \dfrac{i+2}{i}$.

Работа газа определяется по формуле $A=\int_1^2 pdV$; для изобарного процесса $A=p\Delta V$; для изотермического $A=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$; для адиабатного $A=\frac{RT}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$.

Изменение энтропии системы $\Delta S=\int_1^2\frac{dQ}{T}$, для процессов в идеальном газе $\Delta S=\frac{m}{M}(C_V\ln\frac{T_2}{T_1}+R\ln\frac{V_2}{V_1})$.

Коэффициент полезного действия для кругового процесса $\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}$, где Q_1 – количество теплоты, полученное системой, Q_2 – количество теплоты, отданное системой, A – совершенная системой работа. Для идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, состоящем из двух изотерм и двух адиабат, КПД определяется по формуле $\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$, где T_1 и T_2 – температура нагревателя и холодильника соответственно.

Примеры решения задач

При решении задач данного раздела, как правило, требуется применять первое начало термодинамики. Для этого следует определить вид процесса, происходящего с газом и применить соответствующие формулы для расчета изменения внутренней энергии и работы газа. В случае произвольного процесса первое начало термодинамики следует записывать в дифференциальной форме, а затем вычислять интегралы, исключая из подынтегральной функции некоторые параметры состояния при помощи уравнения Менделеева–Клапейрона. Аналогично решаются задачи на расчет изменения энтропии системы и определение коэффициента полезного действия. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. В двух цилиндрах, имеющих объемы V_1 = 3 *л* и V_2 = 5 *л* находится одинаковый газ при давлениях p_1 = 0,4 *МПа* и p_2 = 0,6 *МПа* и температурах t_1 = 27^0C и t_2 = 127^0C. Цилиндры соединяют трубкой с краном. Определить, какая температура T и какое давление p установятся в цилиндрах после того, как кран соединительной трубки будет открыт.

Решение

Внутренние энергии газа в первом цилиндре, газа во втором цилиндре и газа в обоих цилиндрах после смешивания соответственно равны:

$$U_1 = C_V \nu_1 T_1 \,,\; U_2 = C_V \nu_2 T_2 \,,\; U = C_V (\nu_1 + \nu_2) T \,, \tag{2.3.1}$$

где ν_1 и ν_2 – количества вещества газов в цилиндрах, C_v – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Согласно закону сохранения энергии

$$U = U_1 + U_2 \,,$$

откуда с учетом (2.3.1) следует

$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} \,. \tag{2.3.2}$$

Для определения количества вещества воспользуемся уравнением состояния идеального газа:

$$p_1 V_1 = \nu_1 R T_1 \,,\;\; p_2 V_2 = \nu_2 R T_2 \,. \tag{2.3.3}$$

Выражая из (2.3.3) количества вещества и подставляя в (2.3.2), получаем

$$T = \frac{T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1} \,. \tag{2.3.4}$$

Подставляя числовые значения, находим

$$T = \frac{300К \cdot 400К \cdot (0{,}4МПа \cdot 3л + 0{,}6МПа \cdot 5л)}{0{,}4МПа \cdot 3л \cdot 400К + 0{,}6МПа \cdot 5л \cdot 300К} = 365К \,.$$

Из уравнения состояния для смеси газов

$$p(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2) RT \,,$$

используя (2.3.3) и (2.3.4), находим

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{0{,}4МПа \cdot 3л + 0{,}6МПа \cdot 5л}{3л + 5л} = 0{,}525МПа \,.$$

Задача 2. В длинной гладкой пустой (нет внешнего давления) теплоизолированной трубе находятся два поршня массами m_1 и m_2, между которыми в объеме V_0 при давлении p_0 находится двухатомный газ. Поршни отпускают. Определить их максимальные скорости, если масса газа много меньше массы поршней.

Решение

Воспользуемся законами сохранения импульса и энергии. Поскольку согласно условию, труба теплоизолирована, газ будет совершать работу над поршнями без теплообмена с окружающей средой за счет внутренней энергии.

Предположим, что расширение газа будет бесконечным, следовательно, его внутренняя энергия будет стремиться к нулю. Тогда по закону сохранения энергии

$$U = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \tag{2.3.5}$$

где U – начальная внутренняя энергия газа.

По определению

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT, \tag{2.3.6}$$

где число степеней свободы двухатомной молекулы $i = 5$. При помощи уравнения состояния идеального газа $pV = \frac{m}{M}RT$ можно выразить внутреннюю энергию через объем и давление газа:

$$U = \frac{5}{2}p_0 V_0,$$

следовательно, (2.3.5) преобразуется к виду

$$\frac{5}{2}p_0 V_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{2.3.7}$$

Поскольку по условию масса газа пренебрежимо мала, из закона сохранения импульса следует

$$m_1 v_1 = m_2 v_2. \tag{2.3.8}$$

Решая систему уравнений (2.3.7), (2.3.8), находим максимальные скорости поршней

$$v_1 = \sqrt{\frac{5p_0V_0}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_2}{m_1}},\; v_2 = \sqrt{\frac{5p_0V_0}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_1}{m_2}}.$$

Задача 3 . Температура некоторой массы m идеального газа молярной массы M меняется по закону $T = aV^2$, где $\alpha = const$. Найти работу, совершенную газом при увеличении объема от V_1 до V_2. Поглощается или выделяется энергия в таком процессе?

Решение

Элементарная работа идеального газа определяется по формуле

$$dA = pdV \,. \tag{2.3.9}$$

Выразим давление газа при помощи уравнения состояния идеального газа $pV = \frac{m}{M}RT$ и уравнения $T = aV^2$, заданного по условию. Получаем

$$p = \frac{m}{M}\alpha RV \,,$$

следовательно, (2.3.9) приводится к виду

$$dA = \frac{m}{M}\alpha RVdV \,. \tag{2.3.10}$$

Интегрируя (2.3.10) от V_1 до V_2, получаем

$$A = \int_{V_1}^{V_2}\frac{m}{M}\alpha RVdV = \frac{1}{2}\frac{m}{M}\alpha RV^2\Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{1}{2}\frac{m}{M}\alpha R(V_2^2 - V_1^2) \,.$$

Поскольку, согласно закону расширения газа, с увеличением объема растет температура, совершенная газом работа и изменение его внутренней энергии положительны. Следовательно, по первому началу термодинамики газ должен поглощать тепло.

Задача 4. Азот, находившийся при температуре $400K$, подвергли адиабатному расширению, в результате которого его объем увеличился в n = 5 раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определить массу азота.

Решение

Работа газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{i+2}{i}$, $i = 5$ – число степеней свободы двухатомной молекулы.

Из первого закона термодинамики $Q = \Delta U + A$ следует, что при адиабатном процессе (Q = 0)

$$\Delta U = -A = -\frac{m}{M}\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (2.3.11)$$

Учитывая, что по условию $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{n}$, из (2.3.11) получаем выражение для массы азота

$$m = -\frac{M(\gamma - 1)\Delta U}{RT_1\left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1}\right]}.$$

Подставляя числовые значения, находим

$$m = -\frac{28\cdot 10^{-3}\,{}^{кг}\!/_{моль}\cdot(1{,}4-1)\cdot(-4\cdot 10^3)\,Дж}{8{,}31\,{}^{Дж}\!/_{моль\cdot К}\cdot 400К\cdot\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{1{,}4-1}\right]} = 2{,}84\cdot 10^{-2}\,кг.$$

Задача 5. Найти молярную теплоемкость идеального газа, расширяющегося по закону $pV^n = const$. При каких значениях n теплоемкость будет равна нулю? Бесконечности?

Решение

Согласно определению молярной теплоемкости

$$c = \frac{dQ}{\nu dT}. \qquad (2.3.12)$$

Воспользуемся первым началом термодинамики

$$dQ = dU + pdV, \qquad (2.3.13)$$

где внутренняя энергия одноатомного газа

$$U = \frac{3}{2}\nu RT \quad \Rightarrow \quad dU = \nu RdT. \qquad (2.3.14)$$

Для определения элементарной работы газа вычислим дифференциалы от уравнения состояния идеального газа и от заданного по условию закона его расширения:

$$pdV + Vdp = \nu RdT \qquad (2.3.15)$$

и

$$v^n dp + npv^{n-1}dV = 0. \qquad (2.3.16)$$

Решая совместно (2.3.15), (2.3.16), получаем

$$pdV = \frac{\nu RdT}{1-n}. \qquad (2.3.17)$$

Тогда из (2.3.12), (2.3.13), (2.3.14), (2.3.17) находим

$$c = \frac{\frac{3}{2}\nu RdT + \frac{\nu RdT}{1-n}}{\nu dT} = R\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1-n}\right).$$

Из условий $c = 0$ и $c = \infty$ получаем $n = \frac{5}{3}$ и $n = 1$ соответственно.

Задача 6. Коэффициент полезного действия цикла 1-2-3-4-1, представленного на рисунке, равен $\eta_1 = 40\%$. Определить КПД η_2 цикла 1-3-4-1.

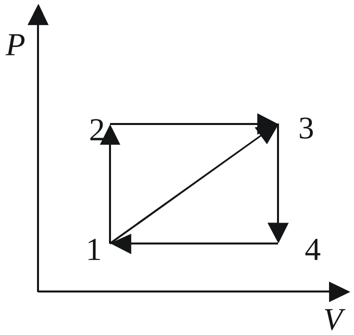

Рис. 2.3.1

Решение

По определению КПД

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}. \qquad (2.3.18)$$

Работа, совершенная газом за цикл, равна площади фигуры на диаграмме. Очевидно, что работы газа в циклах 1-2-3-4-1 и 1-3-4-1 связаны друг с другом соотношением $A_1 = 2A_2$.

Участок 1–2 соответствует изохорному нагреванию, а участок 2–3 – изобарному расширению, следовательно, на этих участках газ получает тепло. Участок 3–4 соответствует изохорному охлаждению, а участок 4–1 – изобарному сжатию, следовательно, на этих участках газ отдает тепло. Так как участки 3–4 и 4–1 для обоих циклов одинаковы, количество теплоты Q_2, отдаваемое газом холодильнику в этих циклах одинаково.

Поскольку $Q_1 = Q_2 + A$, из (2.3.18) получаем

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_2 + A_1} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = A_1\left(\frac{1}{\eta_1} - 1\right). \qquad (2.3.19)$$

Подставляя найденное значение в формулу КПД цикла 1-3-4-1, находим

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2 + A_2} = \frac{0{,}5A_1}{A_1\left(\frac{1}{\eta_1} - 1\right) + 0{,}5A_1} = \frac{\eta_1}{2 - \eta_1} = \frac{0{,}4}{2 - 0{,}4} = 0{,}25.$$

Задача 7. С одним молем одноатомного идеального газа совершают циклический процесс 1-2-3-1, изображенный на рисунке. В процессе 2-3 давление газа линейно зависит от объема, причем объем увеличивается вдвое. Состояниям 2 и 3 соответствует одинаковая температура. Найти КПД тепловой машины, работающей по такому циклу.

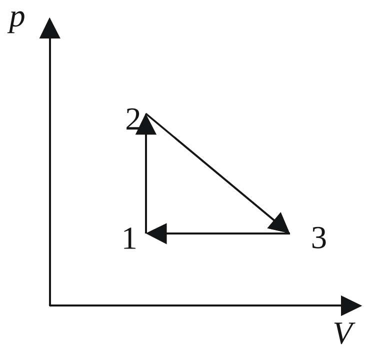

Рис. 2.3.2

Решение

Определим при помощи условия соотношения между параметрами газа в состояниях 1, 2 и 3. Согласно уравнению состояния идеального газа для состояний 2 и 3 имеем

$$p_2V_2 = RT_2, \; p_3V_3 = RT_3. \qquad (2.3.20)$$

Так как $V_3 = 2V_2$, $T_2 = T_3$, то из (2.3.20) следует

$$p_1 = p_3 = \frac{1}{2}p_2, \; V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V_3, \; T_2 = T_3 = 2T_1. \qquad (2.3.21)$$

Количество теплоты, полученное газом при изохорном нагревании 1-2 равно

$$Q_{12} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}RT_1\,. \qquad (2.3.22)$$

Определяя параметры линейного уравнения зависимости давления от объема для участка 2-3, получаем

$$p = -\frac{p_1}{V_1}V + 3p_1\,,$$

тогда элементарная работа газа на этом участке

$$dA = (3p_1 - \frac{p_1}{V_1}V)dV\,. \qquad (2.3.23)$$

Интегрируя (2.3.23) от V_1 до $2V_1$, получаем

$$A = \int_{V_1}^{2V_1}(3p_1 - \frac{p_1}{V_1}V)dV = (3p_1V - \frac{p_1}{2V_1}V^2)\Big|_{V_1}^{2V_1} = \frac{3}{2}p_1V_1\,.$$

Так как на участке 2-3 внутренняя энергия газа не меняется, то по первому закону термодинамики

$$Q_{23} = A = \frac{3}{2}p_1V_1 = \frac{3}{2}RT_1\,. \qquad (2.3.24)$$

Следовательно, на этом участке газ также получает тепло. На участке изобарного сжатия газ отдает холодильнику количество теплоты

$$Q_{31} = \frac{5}{2}R(T_3 - T_1) = \frac{5}{2}RT_1\,. \qquad (2.3.25)$$

Подставляя (2.3.22), (2.3.24), (2.3.25) в определение КПД, находим

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{23} - Q_{31}}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{\frac{3}{2}RT_1 + \frac{3}{2}RT_1 - \frac{5}{2}RT_1}{\frac{3}{2}RT_1 + \frac{3}{2}RT_1} = \frac{1}{6}\,.$$

Задача 8. На сколько возрастет энтропия 1 *кг* воды, находящейся при T_1 = 293 *К*, при превращении ее в пар?

Решение

Изменение энтропии системы определяется по формуле

$$\Delta S = \int\frac{dQ}{T}\,. \qquad (2.3.26)$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания воды, вычисляется по формуле

$$dQ = mcdT \text{ ,} \qquad (2.3.27)$$

где c – удельная теплоемкость воды. Подставляя (2.3.27) в (2.3.26) и интегрируя, находим

$$\Delta S_1 = mc\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T_2}{T_1} \text{ ,} \qquad (2.3.28)$$

где T_2 – температура кипения воды.

Кипение воды происходит при постоянной температуре, поэтому

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T_2}\int dQ = \frac{mr}{T_2} \text{ ,} \qquad (2.3.29)$$

где r – удельная теплота парообразования воды.

Из (2.3.26), (2.3.28), (2.3.29), находим изменение энтропии в рассматриваемом процессе

$$\Delta S = mc\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{mr}{T_2} \text{ .}$$

Подставим значения:

$$\Delta S = 1\text{кг}\cdot 4{,}18\cdot 10^3\ ^{\text{Дж}}\!\big/_{\text{кг}\cdot\text{К}}\cdot\ln\frac{373\text{К}}{293\text{К}} +$$

$$+\frac{1\text{кг}\cdot 2{,}25\cdot 10^6\ ^{\text{Дж}}\!\big/_{\text{кг}}}{373\text{К}} = 7{,}04\cdot 10^3\ ^{\text{Дж}}\!\big/_{\text{К}} \text{ .}$$

Индивидуальные задания

2.3.1. В закрытом сосуде находится смесь азота массой m_1 = 56 *г* и кислорода массой m_2 = 64 *г*. Определить изменение внутренней энергии этой смеси, если ее охладили на 20^0C. Ответ: $\Delta U = \frac{5}{2}R\Delta T\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) \approx 1{,}66\,\text{кДж}$.

2.3.2. Определить удельные теплоемкости c_v и c_p смеси углекислого газа массой m_1 = 3 *г* и азота массой m_2 = 4 *г*. Ответ:

$$c_v = \frac{R}{2(m_1+m_2)}\left(\frac{i_1 m_1}{M_1}+\frac{i_2 m_2}{M_2}\right) \approx 667\,\frac{Дж}{кг\cdot K},$$

$$c_p = \frac{R}{2(m_1+m_2)}\left(\frac{(i_1+2)m_1}{M_1}+\frac{(i_2+2)m_2}{M_2}\right) \approx 917\,\frac{Дж}{кг\cdot K}.$$

2.3.3. Определить показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой m_1 = 8 *г* и водород массой m_2 = 2 *г*. Ответ:

$$\gamma = \frac{(i_1+2)\dfrac{m_1}{M_1}+(i_2+2)\dfrac{m_2}{M_2}}{i_1\dfrac{m_1}{M_1}+i_2\dfrac{m_2}{M_2}} \approx 1{,}55.$$

2.3.4. Определить количество теплоты, сообщенное кислороду объемом V = 20 *л*, если а процессе его изохорного нагревания давление газа изменилось на $\Delta p = 100\,кПа$. Ответ: $Q = \frac{i}{2}V\Delta p = 5\,кДж$.

2.3.5. Азот массой m = 280 *г* расширяется в результате изобарного процесса при давлении p = 1 *МПа*. Определить: 1) работу расширения газа; 2) конечный объем газа, если на расширение затрачена теплота $Q = 5$ *кДж*, а начальная температура азота T_1 = 290 *К*. Ответ: $A = \frac{2Q}{i+2} \approx 1{,}43\,кДж$, $V_2 = \frac{1}{p}(A + \frac{m}{M}RT_1) \approx 0{,}026\,м^3$.

2.3.6. Кислород объемом 1 л находится под давлением 1 Мпа. Определить, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы: 1) увеличить его объем вдвое в результате изобарного процесса; 2) увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса. Ответ: $Q_1 = \frac{i+2}{2}p_1\Delta V = 3{,}5\,кДж$, $Q_2 = \frac{i}{2}V_1\Delta p = 2{,}5\,кДж$.

2.3.7. Некоторый газ массой m = 5 *г* расширяется изотермически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Работа расширения A = 1 *кДж*. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа. Ответ:

$$\langle v_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{3A}{m\ln\dfrac{V_2}{V_1}}} \approx 930\,м/с.$$

2.3.8. Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре T = 300 *К* и под давлением p_1 = 0,5 *МПа*. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа, затраченная на сжатие A = –432*кДж*. Определить, какой это газ. Ответ: $M = \frac{mRT}{A}\ln\frac{p_1}{p_2} = 4\cdot 10^{-3}\,кг/моль$, гелий.

2.3.9. Азот массой m = 50 *г* находится при температуре T_1 = 280 *К*. В результате изохорного охлаждения его давление уменьшилось в n = 2 раза, а затем в результате изобарного расширения температура газа в конечном состоянии стала равна первоначальной. Определить работу, совершенную газом и изменение его внутренней энергии. Ответ: $A = \dfrac{mRT_1}{2M} \approx 2{,}08\,кДж$, $\Delta U = 0$.

2.3.10.Азот массой m = 1 *кг* занимает при температуре T_1 = 300 *К* объем V_1 = 0,5 $м^3$. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определить: 1) конечный объем газа; 2) его конечную температуру; 3) изменение внутренней энергии газа. Ответ:

$$V_2 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \approx 0{,}228\ м^3, \qquad T_2 = T_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \approx 411\,К,$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT_1\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) \approx 82{,}4\,кДж.$$

2.3.11. Азот, находившийся при температуре 400 К, подвергли адиабатному расширению, в результате которого его объем увеличился в n = 5 раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определить массу азота. Ответ: $m = \dfrac{M(\gamma-1)\Delta U}{RT_1\left(1-\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\gamma-1}\right)} \approx 28\cdot 10^{-3}\,кг$.

2.3.12. Двухатомный идеальный газ занимает объем V_1 = 1 *л* и находится под давлением p_1 = 0,1*МПа*. После адиабатного сжатия газ характеризуется объемом V_2 и давлением p_2. В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление p_3 = 0,2*МПа*. Определить объем V_2 и давление p_2. Ответ:

$$V_2 = \frac{p_1V_1}{p_3} = 0{,}5\,л, \quad p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 264\,кПа.$$

2.3.13. Кислород массой 10 г, находящийся при температуре 370 К подвергли адиабатному расширению, в результате которого его давление уменьшилось в $n = 4$ раза. В результате последующего изотермического процесса газ сжимается до первоначального давления. Определить: 1) температуру газа в конце процесса; 2) количество теплоты, полученное газом; 3) приращение внутренней энергии газа; 4) работу совершенную газом. Ответ: $T_2 = \dfrac{1}{n}\sqrt[\gamma]{n}T_1 \approx 249\,К$,

$Q = \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{1}{n} \approx -896\,Дж$, $\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R(T_2 - T_1) \approx -786\,Дж$,

$A = Q - \Delta U = -100\,Дж$.

2.3.14. Кислород массой m = 2 *кг* занимает V_1 = 1 $м^3$ и находится под давлением p_1 = 0,2 *МПа*. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема V_2 = 3 $м^3$, а затем при постоянном объеме до давления p_2 = 0,5 *МПа*. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную им работу и количество теплоты, переданное газу. Ответ: $\Delta U = \frac{5}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = 3{,}25\,МДж$, $A = p_1(V_2 - V_1) = 1\,МДж$,

$Q = \Delta U + A = 4{,}25\,МДж$.

2.3.15. На нагревание кислорода массой m = 160 *г* на $\Delta T = 12\,K$, была затрачена теплота Q = 1, 76 *кДж*. Как протекал процесс: при постоянном объеме или при постоянном давлении? Ответ: $\frac{QM}{mR\Delta T} \approx 3{,}5 = \frac{i+2}{2}$, при постоянном давлении.

2.3.16. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70% количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно 5 кДж. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) работу, совершенную при полном цикле. Ответ: $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 30\%$, $A = \eta Q_1 = 1{,}5\,кДж$.

2.3.17. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получает от нагревателя количество теплоты 5,5 кДж и совершает работу 1,1 кДж. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) отношение температур нагревателя и холодильника. Ответ: $\eta = \frac{A}{Q_1} = 20\%$, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = 1{,}25$.

2.3.18. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого равен 0,4. Определить работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 400 Дж. Ответ: $A_2 = (\eta - 1)A_1 = -240\,Дж$.

2.3.19. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя T_1 = 500 *K*, холодильника T_2 = 300 *K*. Работа изотермического расширения составляет 2 кДж. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии холодильнику. Ответ: $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 40\%$, $Q_2 = A_1\frac{T_2}{T_1} = 1{,}2\,кДж$.

2.3.20. Многоатомный идеальный газ совершает цикл Карно, при этом в процессе адиабатного расширения объем газа увеличивается в

$n = 4$ раза. Определить термический КПД цикла. Ответ: $\eta = 1 - \left(\dfrac{1}{m}\right)^{\gamma-1} \approx 37\%$.

2.3.21. Идеальный многоатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определить термический КПД цикла. Ответ: $\eta = \dfrac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{3V_1(p_2 - p_1) + 4p_2(V_2 - V_1)} = \dfrac{1}{9} \approx 11\%$.

2.3.22. С идеальным газом, взятом в количестве ν = 3 *моль*, проводят замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар. Отношение давлений на изобарах $\alpha = \dfrac{5}{4}$, отношение объемов на изохорах $\beta = \dfrac{6}{5}$. Разность максимальной и минимальной температур в процессе $\Delta T = 100\,K$. Найти работу, совершаемую газом за один цикл. $A = \dfrac{\nu R \Delta T}{\alpha\beta - 1}(\alpha - 1)(\beta - 1) \approx 250\,\text{Дж}$.

2.3.23. Идеальный газ совершает круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух изохор. Изотермические процессы протекают при температурах T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), изохорические – при объемах V_1 и V_2 ($\dfrac{V_2}{V_1} = e$). Найти КПД цикла, если показатель адиабаты равен γ. Ответ: $\eta = \dfrac{(\gamma - 1)(T_1 - T_2)}{\gamma T_1 - T_2}$.

2.3.24. Идеальный газ совершает круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух изобар. Изотермические процессы протекают при T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), изобарические – при p_1 и p_2 ($\dfrac{p_2}{p_1} = e$). Найти КПД цикла, если показатель адиабаты равен γ. Ответ: $\eta = \dfrac{(\gamma - 1)(T_1 - T_2)}{(2\gamma - 1)T_1 - \gamma T_2}$.

2.3.25. Смешано m_1 = 5 *кг* воды при температуре T_1 = 280 *К* с m_2 = 8 *кг* воды при температуре T_1 = 350 *К*. Найти: 1) температуру смеси; 2) изменение энтропии системы, происходящее при смешивании. Ответ: $T = \dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} \approx 323\,K$, $\Delta S = c(m_1 \ln\dfrac{T}{T_1} + m_2 \ln\dfrac{T}{T_2}) \approx 300\,\text{Дж}/\text{К}$.

2.3.26. Кусок льда массой m = 200 $г$, взятый при температуре $t_1 = -10^0C$, был нагрет до $t_2 = 0^0C$ и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры $t_3 = 10^0C$. Определить изменение энтропии льда. Ответ: $\Delta S = mc_1 \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m\lambda}{T_2} + mc_2 \ln\frac{T_3}{T_2} \approx 291 \,{}^{Дж}\!/_{К}$.

2.3.27. Лед массой m_1 = 2 $кг$ при температуре $t_1 = 0^0C$ был превращен в воду той же температуры при помощи пара, имеющего температуру $t_2 = 100^0C$. Определить массу m_2 израсходованного пара и изменение энтропии системы. Ответ: $m_2 = \frac{m_1\lambda}{r + c(T_2 - T_{1})} \approx 251 г$,

$$\Delta S = \frac{m_1\lambda}{T_1} - \frac{m_2 r}{T_2} - m_2 c \ln\frac{T_2}{T_1} \approx 610 \,{}^{Дж}\!/_{К}.$$

2.3.28. Водород массой m = 100 $г$ был изобарически нагрет так, что объем его увеличился в 3 раза, затем водород был изохорически охлажден так, что давление его уменьшилось в 3 раза. Определить изменение энтропии водорода. Ответ: $\Delta S = \frac{m}{M} R \ln 3 \approx 457 \,{}^{Дж}\!/_{К}$.

2.3.29. Во сколько раз необходимо увеличить объем пяти молей идеального газа при изотермическом расширении, чтобы его энтропия увеличилась на $\Delta S = 57{,}6 \,{}^{Дж}\!/_{К}$? Ответ: $n = \exp\left(\frac{\Delta S}{\nu R}\right) \approx 4$.

2.3.30. Азот массой 28 г адиабатно расширили в 2 раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема. Определить изменение энтропии азота в ходе процесса. Ответ: $\Delta S = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M} R \ln\frac{1}{2} \approx -20{,}2 \,{}^{Дж}\!/_{К}$.

2.4. Поверхностное натяжение. Капиллярные явления

Справочные сведения

Избыточная потенциальная энергия молекул поверхностного слоя жидкости $\Delta E = \sigma \Delta S$, где σ – поверхностное натяжение, ΔS – площадь слоя.

Сила поверхностного натяжения $F = \sigma l$.

Избыточное давление под искривленной поверхностью жидкости (формула Лапласа) $\Delta p = \sigma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$, где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух нормальных сечений поверхности. Для сферической поверхности $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$.

Высота подъема жидкости в капилляре $h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$, где r – радиус капилляра, θ – краевой угол (при полном смачивании $\theta = 0$, при полном несмачивании $\theta = \pi$).

Примеры решения задач

Задача 1. В двух капиллярных трубках разного диаметра, опущенных в воду, установилась разность уровней $\Delta h_1 = 2{,}6\,см$. При опускании этих же трубок в спирт разность уровней оказалась $\Delta h_2 = 1\,см$. Зная коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma_1 = 73\,{}^{мН}\!/_{м}$, найти коэффициент поверхностного натяжения спирта σ_2.

Решение

Высота подъема жидкости в капилляре определяется по формуле

$$h = \frac{2\sigma\cos\alpha}{rg\rho},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, r – радиус капилляра, α – краевой угол, ρ – плотность жидкости. Полагая смачивание полным ($\alpha = 0$), находим для двух капилляров в случае воды

$$h_1 = \frac{2\sigma_1}{\rho_1 r_1 g}, \quad h_2 = \frac{2\sigma_1}{\rho_1 r_2 g},$$

следовательно, разность уровней

$$\Delta h_1 = \frac{2\sigma_1(r_2 - r_1)}{r_1 r_2 \rho_1 g}. \qquad (2.4.1)$$

Аналогичные расчеты в случае спирта дают

$$\Delta h_2 = \frac{2\sigma_2(r_2 - r_1)}{r_1 r_2 \rho_2 g}. \qquad (2.4.2)$$

Из (2.4.1), (2.4.2) находим

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{\sigma_1\rho_2}{\sigma_2\rho_1}.$$

Отсюда коэффициент поверхностного натяжения ртути

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 \rho_2 \Delta h_2}{\rho_1 \Delta h_1} = \frac{73\,{}^{мН}\!/_{м} \cdot 0{,}79 \cdot 10^3\,{}^{кг}\!/_{м^3} \cdot 10^{-2}\,м}{10^3\,{}^{кг}\!/_{м^3} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-2}\,м} = 22{,}2\,{}^{мН}\!/_{м}.$$

Задача 2. Капля ртути массой m = 2 *г* введена между параллельными стеклянными пластинами. Какую силу следует приложить, чтобы расплющить каплю до толщины d = 0,1 *мм*. Считать, что ртуть не смачивает стекло.

Решение

Если жидкость не смачивает твердое тело, то давление под поверхностью жидкости оказывается больше внешнего давления на величину, определяемую по формуле Лапласа

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{2.4.3}$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости.

Сечение капли плоскостью, перпендикулярной пластинам и проходящей через центр капли представляет собой фигуру, две стороны которой прямолинейны и параллельны, а две другие – окружности радиусом $R_1 = \frac{d}{2}$. Сечение капли плоскостью, параллельной пластинам дает окружность радиусом R_2, найти который можно, вычисляя приближенно (пренебрегая криволинейностью свободной поверхности) объем капли.

Получаем

$$V = \frac{m}{\rho} = \pi R_2^2 d,$$

откуда следует

$$R_2 = \sqrt{\frac{m}{\pi\rho d}}. \tag{2.4.4}$$

Из (2.4.3), (2.4.4) находим

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{2}{d} + \sqrt{\frac{\pi\rho d}{m}}\right).$$

Следовательно, сила давления на пластины равна

$$F = S\Delta p = \pi R_2^2 \Delta p = \frac{m\sigma}{\rho d}\left(\frac{2}{d} + \sqrt{\frac{\pi\rho d}{m}}\right).$$

Подставляя значения, получаем

$$F = \frac{2 \cdot 10^{-3}\,кг \cdot 0{,}49\,Н/м}{1{,}36 \cdot 10^{4}\,кг/м^{3} \cdot 10^{-4}\,м} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{10^{-4}\,м} + \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 1{,}36 \cdot 10^{4}\,кг/м^{3} \cdot 10^{-4}\,м}{2 \cdot 10^{-3}\,кг}} \right) = 14{,}4\,Н.$$

Индивидуальные задания

2.4.1. При определении силы поверхностного натяжения капельным методом число капель глицерина, вытекающего из капилляра, составляет n = 50. Общая масса глицерина m = 1 *г*, а диаметр шейки капли в момент отрыва $d = 1\,мм$. Определить поверхностное натяжение глицерина. Ответ: $\sigma = \frac{mg}{n\pi d} \approx 62{,}5\,мН/м$.

2.4.2. Какую силу F необходимо приложить к горизонтальному алюминиевому кольцу высотой h = 10 *мм*, внутренним диаметром d_1 = 50 *мм* и внешним диаметром d_2 = 52 *мм*, чтобы оторвать его от поверхности воды? Какую часть найденной силы составляет сила поверхностного натяжения? Ответ: $F = \frac{\rho h\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)g + \pi\sigma(d_1 + d_2) \approx 63{,}5\,мН$, $\frac{F_1}{F} \approx 37\%$.

2.4.3. Кольцо внутренним диаметром d_1 = 25 *мм*и внешним диаметром d_2 = 26 *мм* подвешено на пружине и соприкасается с поверхностью жидкости. Жесткость пружины $k = 9{,}8 \cdot 10^{-1}\,Н/м$. При опускании поверхности жидкости кольцо оторвалось от нее при растяжении пружины на $\Delta l = 5{,}3\,мм$. Найти поверхностное натяжение жидкости. Ответ: $\sigma = \frac{k\Delta l}{\pi(d_1 + d_2)} \approx 0{,}032\,Н/м$.

2.4.4. Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром d = 2 *мм*. Капли отрываются через время $\Delta t = 1\,с$ одна после другой. Через какое время вытечет масса m = 10 *г* спирта? Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки. Ответ: $t = \frac{mg\Delta t}{\pi d\sigma} \approx 780\,с$.

2.4.5. Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определите работу, которую надо совершить, чтобы увеличить его диаметр от d_1 = 6 *мм* до d_2 = 60 *мм*. Поверхностное натяжение мыльного раствора принять равным $40\,{}^{H}\!/_{м}$. Ответ: $A = 2\pi\sigma(d_2^2 - d_1^2) \approx 896\,мкДж$.

2.4.6. Две капли воды радиусом r = 1 *мм* каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определите уменьшение поверхностной энергии при этом слиянии, если поверхностное натяжение воды $\alpha = 73\,{}^{мН}\!/_{м}$. Ответ: $\Delta E = \sigma 4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4}) \approx 378\,нДж$.

2.4.7. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на $\Delta p = 200\,Па$ больше атмосферного. Определите диаметр пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 40\,{}^{мН}\!/_{м}$. Ответ: $d = \dfrac{8\sigma}{\Delta p} = 1{,}6\,мм$.

2.4.8. Воздушный пузырек диаметром d = 0,02 *мм* находится на глубине h = 25 *см* под поверхностью воды. Определите давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление примите нормальным. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73\,{}^{мН}\!/_{м}$, а ее плотность $\rho = 1\,{}^{г}\!/_{см^3}$.

Ответ: $p = p_0 + \rho g h + \dfrac{4\sigma}{d} \approx 118\,кПа$.

2.4.9. Во сколько раз плотность воздуха в пузырьке, находящемся на глубине h = 5 м под водой, больше плотности воздуха при нормальном атмосферном давлении? Радиус пузырька r = 0,5 *мкм*. Ответ: в $1 + \dfrac{\rho g h}{p_0} + \dfrac{4\sigma}{p_0 d} \approx 4{,}4$ раза.

2.4.10. В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр, внутренний диаметр которого d = 3 *мм*. Разность уровней ртути в сосуде и в капилляре $\Delta h = 3{,}7\,мм$. Найти радиус кривизны мениска в капилляре. Ответ: $R = \dfrac{2\sigma}{\rho g \Delta h} \approx 2\,мм$.

2.4.11. Найти разность уровней ртути в двух сообщающихся капиллярах, внутренние диаметры которых равны d_1 = 1 *мм* и d_2 = 2 *мм*. Несмачивание считать полным. Ответ: $\Delta h = \dfrac{4\sigma}{\rho g}\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right) \approx 7{,}5\,мм$.

2.4.12. Капилляр с внутренним радиусом r = 2 *мм* опущен в жидкость. Найти поверхностное натяжение жидкости, если известно, что в капилляр поднялась масса жидкости m = 0,09 *г*. Ответ: $\sigma = \frac{mg}{2\pi r} \approx 0{,}07\, Н/м$.

2.4.13. Вертикальный капилляр длиной l с запаянным верхним концом привели в соприкосновение с поверхностью жидкости, после чего она поднялась на высоту h. Плотность жидкости ρ, диаметр внутреннего канала капилляра d, атмосферное давление p_0. Найти коэффициент поверхностного натяжения жидкости, считая смачивание полным. Ответ: $\sigma = \frac{1}{4}\left(\rho g h + \frac{p_0 l}{l-h}\right)d$.

2.4.14. Какую силу F надо приложить, чтобы оторвать друг от друга (без сдвига) две смоченные фотопластинки размером $S = 9 \times 12 см^2$? Толщина водяной прослойки между пластинками d = 0,05 *мм*. Смачивание считать полным. Ответ: $F = \frac{2\sigma S}{d} \approx 31{,}5\, Н$.

2.4.15. Между двумя горизонтальными плоскопараллельными стеклянными пластинками помещена масса m = 5 *г* ртути. Когда на верхнюю пластинку положили груз массой M = 5 *кг*, расстояние между пластинками стало равным d = 0,087 *мм*. Пренебрегая массой пластинки по сравнению с массой груза, найти поверхностное натяжение ртути. Несмачивание считать полным. Ответ: $\sigma = \frac{Mg\rho d}{\sqrt{\pi\rho m d} + \frac{2m}{d}} \approx 0{,}5\, Н/м$.

ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Для студентов очной формы обучения номера вариантов назначает преподаватель, ведущий лабораторные занятия. Для студентов заочной формы обучения выбор вариантов осуществляется по первой букве фамилии студента: «а» – 1-й вариант, «б» – 2-й вариант, «в, г» – 3-й вариант, «д, е» – 4-й вариант, «ж, з» – 5-й вариант, «и, к» – 6-й вариант, «л, м» – 7-й вариант, «н, о» – 8-й вариант, «п, р» – 9-й вариант, «с, т» – 10-й вариант, «у, ф» – 11-й вариант, «х, ц» – 12-й вариант, «ч, ш» –13-й вариант, «щ, э» – 14-й вариант, «ю, я» –15-й вариант. Приведенные ниже таблицы вариантов предназначены для студентов, выполняющих 2 контрольные работы в семестр (или студентов-заочников, изучающих физику в течение двух лет).

1. **Механика**

Номер варианта	Номера задач				
Вариант 1	1.1.1.	1.1.17.	1.2.3.	1.3.4.	1.3.20.
	1.4.6.	1.4.22.	1.5.8.	1.6.9.	1.6.25.
Вариант 2	1.1.2.	1.1.18.	1.2.4.	1.3.5.	1.3.21.
	1.4.7.	1.4.23.	1.5.9.	1.6.10.	1.6.26.
Вариант 3	1.1.3.	1.1.19.	1.2.5.	1.3.6.	1.3.22.
	1.4.8.	1.4.24.	1.5.10.	1.6.11.	1.6.27.
Вариант 4	1.1.4.	1.1.20.	1.2.6.	1.3.7.	1.3.23.
	1.4.9.	1.4.25.	1.5.11.	1.6.12.	1.6.28.
Вариант 5	1.1.5.	1.1.21.	1.2.7.	1.3.8.	1.3.24.
	1.4.10.	1.4.26.	1.5.12.	1.6.13.	1.6.29.
Вариант 6	1.1.6.	1.1.22.	1.2.8.	1.3.9.	1.3.25.
	1.4.11.	1.4.27.	1.5.13.	1.6.14.	1.6.30.
Вариант 7	1.1.7.	1.1.23.	1.2.9.	1.3.10.	1.3.26.
	1.4.12.	1.4.28.	1.5.14.	1.6.15.	1.6.16.
Вариант 8	1.1.8.	1.1.24.	1.2.10.	1.3.11.	1.3.27.
	1.4.13.	1.4.29.	1.5.15.	1.6.1.	1.6.17.

Вариант 9	1.1.9.	1.1.25.	1.2.11.	1.3.12.	1.3.28.
	1.4.14.	1.4.30.	1.5.1.	1.6.2.	1.6.18.
Вариант 10	1.1.10.	1.1.26.	1.2.12.	1.3.13.	1.3.29.
	1.4.15.	1.4.16.	1.5.2.	1.6.3.	1.6.19.
Вариант 11	1.1.11.	1.1.27.	1.2.13.	1.3.14.	1.3.30.
	1.4.1.	1.4.17.	1.5.3.	1.6.4.	1.6.20.
Вариант 12	1.1.12.	1.1.28.	1.2.14.	1.3.15.	1.3.16.
	1.4.2.	1.4.18.	1.5.4.	1.6.5.	1.6.21.
Вариант 13	1.1.13.	1.1.29.	1.2.15.	1.3.1.	1.3.17.
	1.4.3.	1.4.19.	1.5.5.	1.6.6.	1.6.22.
Вариант 14	1.1.14.	1.1.30.	1.2.1.	1.3.2.	1.3.18.
	1.4.4.	1.4.20.	1.5.6.	1.6.7.	1.6.23.
Вариант 15	1.1.15.	1.1.16.	1.2.2.	1.3.3.	1.3.19.
	1.4.5.	1.4.21.	1.5.7.	1.6.8.	1.6.24.

2. Молекулярная физика и термодинамика

Номер варианта	Номера задач					
Вариант 1	2.1.11.	2.1.27.	2.2.13.	2.3.14.	2.3.30.	2.4.1.
Вариант 2	2.1.12.	2.1.28.	2.2.14.	2.3.15.	2.3.16.	2.4.2.
Вариант 3	2.1.13.	2.1.29.	2.2.15.	2.3.1.	2.3.17.	2.4.3.
Вариант 4	2.1.14.	2.1.30.	2.2.1.	2.3.2.	2.3.18.	2.4.4.
Вариант 5	2.1.15.	2.1.16.	2.2.2.	2.3.3.	2.3.19.	2.4.5.
Вариант 6	2.1.1.	2.1.17.	2.2.3.	2.3.4.	2.3.20.	2.4.6.
Вариант 7	2.1.2	2.1.18.	2.2.4.	2.3.5.	2.3.21.	2.4.7.
Вариант 8	2.1.3.	2.1.19.	2.2.5.	2.3.6.	2.3.22.	2.4.8.
Вариант 9	2.1.4.	2.1.20.	2.2.6.	2.3.7.	2.3.23.	2.4.9.
Вариант 10	2.1.5.	2.1.21.	2.2.7.	2.3.8.	2.3.24.	2.4.10.
Вариант 11	2.1.6.	2.1.22.	2.2.8.	2.3.9.	2.3.25.	2.4.11.

Вариант 12	2.1.7.	2.1.23.	2.2.9.	2.3.10.	2.3.26.	2.4.12.
Вариант 13	2.1.8.	2.1.24.	2.2.10.	2.3.11.	2.3.27.	2.4.13.
Вариант 14	2.1.9.	2.1.25.	2.2.11.	2.3.12.	2.3.28.	2.4.14.
Вариант 15	2.1.10.	2.1.26.	2.2.12.	2.3.13.	2.3.29.	2.4.15.

Ниже приведены таблицы вариантов контрольных работ для студентов-очников, изучающих физику в течение одного семестра (или студентов-заочников, изучающих физику один год). Методы определения вариантов приведены выше.

3. Механика и молекулярная физика

Номер варианта	Номера задач			
Вариант 1	1.1.1.	1.2.3.	1.3.20.	1.4.22.
	1.6.9.	2.1.11.	2.2.13.	2.3.30.
Вариант 2	1.1.18.	1.2.4.	1.3.5.	1.4.7.
	1.6.26.	2.1.28.	2.3.15.	2.4.2.
Вариант 3	1.1.3.	1.2.5.	1.3.22.	1.4.24.
	1.6.11.	2.1.13.	2.2.15.	2.3.17.
Вариант 4	1.1.20.	1.2.6.	1.3.7.	1.4.9.
	1.6.28.	2.1.30.	2.3.2.	2.4.4.
Вариант 5	1.1.5.	1.2.7.	1.3.24.	1.4.26.
	1.6.13.	2.1.15	2.2.2.	2.3.19.
Вариант 6	1.1.22.	1.2.8.	1.3.9.	1.4.11.
	1.6.30.	2.1.17.	2.3.4.	2.4.6.
Вариант 7	1.1.7.	1.2.9.	1.3.26.	1.4.28.
	1.6.15.	2.1.2.	2.2.4.	2.3.21.
Вариант 8	1.1.24.	1.2.10.	1.3.11.	1.4.13.
	1.6.17.	2.1.19.	2.3.6.	2.4.8.
Вариант 9	1.1.9.	1.2.11.	1.3.28.	1.4.30.
	1.6.2.	2.1.4.	2.2.6.	2.3.23.

Вариант 10	1.1.26.	1.2.12.	1.3.13.	1.4.15.
	1.6.19.	2.1.21.	2.3.8.	2.4.10.
Вариант 11	1.1.11.	1.2.13.	1.3.30.	1.4.17.
	1.6.4.	2.1.6.	2.2.8.	2.3.25.
Вариант 12	1.1.28.	1.2.14.	1.3.15.	1.4.2.
	1.6.21.	2.1.23.	2.3.10.	2.4.12.
Вариант 13	1.1.13.	1.2.15.	1.3.17.	1.4.19.
	1.6.6.	2.1.8.	2.2.10.	2.3.27.
Вариант 14	1.1.30.	1.2.1.	1.3.2.	1.4.4.
	1.6.23	2.1.25.	2.3.12.	2.4.14.
Вариант 15	1.1.15.	1.2.2.	1.3.19.	1.4.21.
	1.6.8.	2.1.10.	2.2.12.	2.3.29.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шавлюгин Александр Иванович

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Практикум

В авторской редакции
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 16.11.2003. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,21.
Уч.-изд. л. 6,5 Тираж 250 экз. Заказ

Издательство Владивостокского государственного университета
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57