Текст книги для чтения доступен также в электронно-библиотечной системе ZNANIUM по адресу: www.znanium.com.

Для быстрого доступа воспользуйтесь QR-кодом с обложки книги.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

50 ВГУЭС

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса (ВГУЭС)

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2017

УДК 512+514
ББК 22.14+22.151
А45

Алгебра и геометрия : учебное пособие / сост. Г.И. Шуман
А45 О.А. Волгина, Н.Ю. Голодная ; Владивостокский государственный университет экономики и сервиса. – Владивосток : Изд-во ВГУЭС, 2017. – 156 с.

ISBN 978-5-9736-0417-2

В учебном пособии по каждой теме приводится необходимая теоретическая часть, в которой рассматриваются основные понятия и формулы, необходимые для решения задач, рассмотрены решения типовых задач. Содержится большое количество задач для самостоятельной работы студентов, контрольные работы и индивидуальные домашние задания.

Для студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки.

УДК 512+514
ББК 22.14+22.151

ISBN 978-5-9736-0417-2

ВВЕДЕНИЕ

Знания, приобретаемые студентами в результате изучения дисциплины «Алгебра и геометрия», играют важную роль в процессе обучения в университете. Они необходимы для успешного усвоения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами всех направлений.

В пособии предлагаемого объема невозможно полностью осветить весь изучаемый теоретический материал, поэтому в каждом разделе приведены лишь необходимые теоретические сведения и формулы, отражающие количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов, которые сопровождаются подробными решениями типовых задач, без чего невозможно успешное изучение математики.

Достоинство пособия состоит в том, что при наличии такого количества задач оно может быть использовано как задачник, как раздаточный материал для выполнения контрольных работ по соответствующему разделу дисциплины «Алгебра и геометрия», а также содержит 30 различных вариантов индивидуальных домашних заданий по всем разделам.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Определители

1.1.1. Определители второго порядка

Определение. Определителем второго порядка, соответствующим квадратной таблице элементов $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$. Таким образом,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}\,. \qquad (1.1)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя. Определитель второго порядка имеет две строки и два столбца. Индексы, стоящие внизу соответствующего элемента, означают номер строки и номер столбца определителя, на пересечении которых стоит указанный элемент. Например, a_{21} стоит во второй строке и первом столбце определителя и читается «а два один» Элементы a_{11}, a_{22} называют элементами главной диагонали определителя, а элементы a_{12}, a_{21} – соответственно элементами побочной диагонали.

Пример 1. Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-3) = 7 + 6 = 13$$

Пример 2. Вычислим определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) - (-6) \cdot 0 = -21 + 0 = -21$$

Пример 3. Вычислим определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 12 - 12 = 0\,.$$

1.1.2. Определители третьего порядка

Определение. Определителем третьего порядка, соответствующим квадратной таблице элементов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

называется число, определяемое равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

Пример 4. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

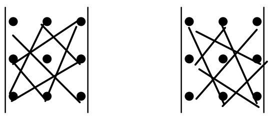
Решение. По определению получим:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 15) - 3 \cdot (4 - 3) + \\ + 2 \cdot (20 + 1) = 1 \cdot (-16) - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 21 = -16 - 3 + 42 = 23$$

Если в формуле (1.2) раскрыть определители второго порядка и собрать слагаемые с одинаковыми знаками, то получим:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - \\ - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \tag{1.3}$$

Этот способ вычисления определителя третьего порядка называется правилом треугольника.



Первые три слагаемых для вычисления определителя есть сумма произведений элементов главной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников, как они показаны линиями на первом рисунке; оставшиеся слагаемые есть сумма произведений, взятых со знаком минус, элементов побочной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников, как они показаны линиями на втором рисунке.

Пример 5. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ по правилу треугольника.

Решение. Перемножим элементы главной диагонали определителя $2\cdot(-3)\cdot 1$, затем – элементы, лежащие на параллелях к этой диагонали, и элементы из противоположного угла определителя согласно правилу треугольника $0\cdot 2\cdot 3$, $(-1)\cdot 4\cdot 1$. Элементы, входящие в формулу (1.3) со знаком минус, вычисляем аналогично, но относительно побочной диагонали: $1\cdot(-3)\cdot 3$, $0\cdot(-1)\cdot 1$, $2\cdot 2\cdot 4$.

Таким образом $\Delta = 2\cdot(-3)\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 3 + (-1)\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot(-3)\cdot 3 - 0\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 4 =$
$= -6 + 0 - 4 + 9 + 0 - 16 = -17$

Определение. Определитель, в котором под главной диагональю (над главной диагональю) стоят нули, называется определителем треугольного вида.

Определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали.

Пример 6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$.

Решение. По условию дан определитель треугольного вида, т.к. под главной диагональю этого определителя стоят нули, значит значение данного определителя равно произведению элементов главной диагонали, то есть $\Delta = 2\cdot 5\cdot 8 = 80$.

Определение. Минором элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный из данного определителя путем вычеркивания строки и столба, на пересечении которых стоит данный элемент.

Минор элемента a_{ij}, стоящего на пересечении i-ой строки и j-го столбца определителя, обозначают M_{ij}.

Например, для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

миноры $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 28 = -26$, $M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 6 = 46$.

Определение. Алгебраическим дополнением данного элемента определителя 3-го порядка называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^k$, где k равно сумме номера строки и номера столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначают A_{ij}. Согласно определению $A_{ij} = (-1)^k \cdot M_{ij}, k = i + j$. (1.4)

Для определителя третьего порядка знак, который при этом приписывается минору соответствующего определителя, определяется следующей таблицей: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

Из определения определителя третьего порядка следует, что

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Верна общая теорема разложения: определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на соответствующие этим элементам алгебраические дополнения.

Таким образом, имеют место шесть разложений:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}, \\ \Delta &= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}, \\ \Delta &= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}, \\ \Delta &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}, \\ \Delta &= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}, \\ \Delta &= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Отметим, что сумма произведений элементов какого-либо ряда (строки или столбца) на алгебраические дополнения элементов параллельного ряда равна нулю.

Пример 7. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$,

разлагая его по элементам третьего столбца.

Решение. Согласно теореме разложения и формулы (1.4) имеем:

$$\Delta = 2A_{13} + 4A_{23} + 6A_{33} = 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 6 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^4 \cdot ((-1) \cdot 3 - 7 \cdot 2) + 4(-1)^5 (5 \cdot 3 - 7 \cdot 3) +$$

$$+ 6(-1)^6 (5 \cdot 2 - (-1) \cdot 3) = 2 \cdot (-3 - 14) - 4(15 - 21) + 6(10 + 3) =$$

$$= -34 + 24 + 78 = 68.$$

1.1.3. Свойства определителей

Следующие свойства справедливы для определителей любого порядка, позволяют упростить вычисления определителей.

Свойство 1. (Транспонирование строк и столбцов). Определитель не меняет своего значения, если его строки заменить столбцами с теми же номерами, а столбцы строками, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Введенное действие называется транспонированием строк и столбцов.

Свойство 2. Если переставить две строки (столбца) определителя, то знак значения определителя изменится на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Если определитель имеет две одинаковых строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. Если две строки (столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k\cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & k\cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & k\cdot a_{31} \end{vmatrix} = 0 .$$

Свойство 7. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у которых все ряды, кроме данного, прежние, а в данном ряду в первом определителе стоят первые слагаемые, а во втором определителе – вторые:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить элементы параллельной строки (столбца), умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\cdot a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Пример 8. Вычислить определитель

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$, используя свойства определителей.

Решение. Элементы первого и второго столбцов данного определителя пропорциональны $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, поэтому, согласно свойству 6, данный определитель равен нулю, то есть $\Delta = 0$.

Пример 9. Вычислить определитель

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, используя свойства определителей.

Решение. Используя свойство 8, приведем данный определитель к треугольному виду. Для этого элементы первой строки умножим на (-1) и прибавим к элементам второй строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1+(-1) & 3+(-1) & 1+(-2)\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки умножим на (-4) и прибавим к элементам третьей строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 4+(-4) & 0+(-4) & 1+(-8)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -4 & -7\end{vmatrix}.$$

Элементы второй строки умножим на 2 и прибавим к элементам третьей строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 4+(-4) & -2+(-7)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -9\end{vmatrix}.$$

Получили определитель треугольного вида (под главной диагональю определителя все элементы равны нулю), и поэтому значение определителя будет равно произведению элементов главной диагонали преобразованного определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -9\end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot(-9)=-18.$$

Пример 10. Вычислить определитель

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix}$, используя свойства определителей.

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1+2 & 1+1 & -1+2\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix}.$$

Воспользовались свойством 7, а так как в первом полученном определителе первые две строки одинаковые, то по свойству 3 этот определитель равен нулю, поэтому

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Элементы третьей строки содержат общий множитель 2, который, согласно свойства 4, можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель содержит две одинаковые строки вторую и третью, поэтому по свойству 3 этот определитель, а значит и данный, равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0.$$

1.1.4. Определители четвертого порядка. Методы их вычисления

Определение. Выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

называется определителем четвертого порядка. Этот определитель можно записать в виде:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}, \tag{1.6}$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,3,4$, M_{ij} – минор элемента, стоящего на пересечении i-ой строки и j-го столбца, A_{ij} – алгебраическое дополнение этого элемента.

Формулу (1.6) можно записать с помощью значка суммирования $\sum$:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \cdot A_{ij} \ , \qquad (1.7)$$

где i=1,2,3,4.

Формула (1.7) называется разложением определителя по элементам i-ой строки. Можно записать и разложение определителя по элементам j-го столбца:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} \cdot A_{ij} , \qquad (1.8)$$

где j=1,2,3,4.

Метод понижения порядка определителя основан на обращении всех, кроме одного, элементов строки или столбца определителя в нуль с помощью свойств определителей.

Пример 11. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим элементы первой строки к элементам второй строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к элементам третьей строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки умножим на (-1) и прибавим к элементам четвертой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первого столбца

$$\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}-5 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 6\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2 & -1 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Переставим первые две строки, при этом знак определителя изменится на противоположный, одновременно вынесем общий множитель 3 элементов третьего столбца за знак определителя:

$$\Delta=-3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к элементам второй строки:

$$\Delta=-3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам второй строки

$$\Delta=-3\left(-0\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\right)=-3\cdot(-3)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=9\cdot(1\cdot 0-(-1)\cdot 1)=9(0+1)=9$$

Пример 12. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

Решение. Поменяем местами первую и вторую строки, при этом по свойству 2 знак определителя изменится на противоположный:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Сначала элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к элементам второй и четвертой строк, а затем элементы первой строки умножим на (-3) и прибавим к элементам третьей строки, получим:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Элементы второй строки прибавим к элементам четвертой строки:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Элементы третьей строки умножим на (-1) и прибавим к элементам четвертой строки:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Получим определитель треугольного вида, значение которого равно произведению элементов главной диагонали $\Delta = -1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 2 = -8$.

Пример 13. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 13 \\ 5 & 11 & 16 & 21 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по элементам третьей строки

$$\Delta = 5\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 7 & 10 & 13\\ 5 & 3 & 10\end{vmatrix} + 11\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 10 & 13\\ 4 & 3 & 10\end{vmatrix} +$$

$$+16\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 13\\ 4 & 5 & 10\end{vmatrix} + 21\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 7 & 10\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 7 & 10 & 13\\ 5 & 3 & 10\end{vmatrix} -$$

$$-11\cdot\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 10 & 13\\ 4 & 3 & 10\end{vmatrix} + 16\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 13\\ 4 & 5 & 10\end{vmatrix} - 21\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 7 & 10\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}.$$

Полученные определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника

$$\Delta = 5\cdot(3\cdot10\cdot10 + 7\cdot3\cdot5 + 4\cdot13\cdot5 - 5\cdot10\cdot5 - 7\cdot4\cdot10 - 3\cdot13\cdot3) -$$
$$-11(2\cdot10\cdot10 + 3\cdot3\cdot5 + 4\cdot13\cdot4 - 4\cdot10\cdot5 - 3\cdot13\cdot2 - 3\cdot4\cdot10) +$$
$$+16(2\cdot7\cdot10 + 3\cdot5\cdot5 + 3\cdot13\cdot4 - 4\cdot7\cdot5 - 5\cdot13\cdot2 - 3\cdot3\cdot10) -$$
$$-21(2\cdot7\cdot3 + 3\cdot5\cdot4 + 3\cdot10\cdot4 - 4\cdot7\cdot4 - 5\cdot10\cdot2 - 3\cdot3\cdot3) =$$
$$= 5(300 + 105 + 260 - 250 - 280 - 117) - 11(200 + 45 + 208 - 200 - 78 -$$
$$-120) + 16(140 + 75 + 156 - 140 - 130 - 90) - 21(42 + 60 + 120 - 112 -$$
$$-100 - 27) = 5\cdot18 - 11\cdot55 + 16\cdot11 - 21\cdot(-17) = 90 - 605 +$$
$$+176 + 357 = 18.$$

1.4.5. Задания для самостоятельного решения

1.Вычислить определители:

$a)\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -3 & 4\end{vmatrix};$ $б)\begin{vmatrix}5 & -7\\ 3 & 1\end{vmatrix};$ $в)\begin{vmatrix}4 & -8\\ -5 & 10\end{vmatrix};$ $г)\begin{vmatrix}3 & 6\\ 5 & 10\end{vmatrix};$ $д)\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & 9\end{vmatrix}.$

2. Решить уравнения:

$a)\begin{vmatrix}2 & x+3\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 0;$ $б)\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3x & x+22\end{vmatrix} = 0;$ $в)\begin{vmatrix}x^2-4 & -1\\ x-2 & x+2\end{vmatrix} = 0;$

$г)\begin{vmatrix}4\sin x & 1\\ 1 & \cos x\end{vmatrix} = 0.$

3. Решить неравенства:

$$а)\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;\ б)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0;\ в)\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} \ge 5;\ г)\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \le 14.$$

4. Вычислить определители:

$$а)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix};\ б)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & 2 \end{vmatrix};\ в)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix};\ г)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$д)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\ е)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};\ ж)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};\ з)\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$и)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};\ к)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$$

$$л)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};\ м)\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix};\ н)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ответы: 1. а)7; б)26; в)0; г)0; д)30. **2**. а)5; б)2; в)2; г) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in z$. **3**. а) $(3;+\infty)$; б) $(-10;+\infty)$; в) $(-\infty;-3]$; г)[-1;7]. **4**. а)-24; б) -40; в)-9; г)-87; д)-5; е)1; ж)1; з)55; и)30; к)48; л)0; м)-1004; н)150.

1.2. Матрицы

1.2.1 Основные понятия

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины и n столбцов одинаковой длины, которая записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

или, сокращенно, $A=(a_{ij})$, где $i=\overline{1,m}$, (т.е. $i=1,2,...,m$) – номер строки, $j=\overline{1,n}$ (т.е. $j=1,2,...,n$) – номер столбца, числа a_{ij} называются элементами матрицы. Матрицу А называют матрицей размера $m\times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Например, $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 6 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A_{2\times 4}$.

Определение. Две матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ равны между собой, если их размеры совпадают, а их соответствующие элементы равны, т.е. $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$, где $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Например. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, A_{2\times 3}, B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B_{2\times 3}$. Так как размеры матриц совпадают (2×3) и соответствующие элементы равны, поэтому матрицы A и B равны, т.е. $A=B$

Определение. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной. Квадратную матрицу размера $n\times n$ называют матрицей n-го порядка.

Например. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, A_{2\times 2}$, т.е. дана матрица второго порядка.

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называются диагональной.

Матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ – диагональная.

Определение. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется единичной. Обозначается буквой E.

$$E_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } E_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, расположенные над главной диагональю (или под главной диагональю), равны нулю.

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -7\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$ или $$A_{3\times3}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 8 & 5 & 0\end{pmatrix}$$ – треугольные матрицы.

Важной характеристикой квадратной матрицы порядка n является ее определитель (или детерминант), который обозначается $\det A$ или $|A|$. $\det E=1.$.

Определение. Квадратная матрица, у которой определитель отличен от нуля, т.е. $|A|\neq 0$, называется невырожденной. В противном случае матрица называется вырожденной.

Например, $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$, $|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0.$

Матрица A – вырожденная.

$B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 7\end{pmatrix}, |B|=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 7\end{vmatrix}=21+4=25\neq 0.$

Матрица B – невырожденная.

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается буквой O.

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

В матричном исчисление матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение. Матрица, содержащая одну строку, называется матрицей-строкой

$$A=(a_1a_2\dots a_n).$$

Матрица, содержащая один столбец, называется матрицей-столбцом

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \dots\\ a_m\end{pmatrix}.$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(3)_{1\times1}$ есть 3.

Определение. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей транспонированной к данной. Обозначается A^T.

Если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $\left(A^T\right)^T=A$.

1.2.2. Действия над матрицами

Определение. Суммой двух матриц $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ и $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ одинаковых размеров называется матрица того же размера $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$:

$$C=A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right), i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{1.10}$$

Пример 14. Найти сумму матриц A и B, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & 8\\ 2 & 3 & 6 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\ -1 & 9 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Решение. $A+B=\begin{pmatrix}1+0 & 4+2 & 5-3 & 8+1\\ 2-1 & 3+9 & 6+1 & 7+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 9\\ 1 & 12 & 7 & 14\end{pmatrix}.$

Для любых матриц A, B и C одинакового размера справедливы следующие свойства:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C=(A+C)+B$;
3. $A+0=A.$.

Определение. Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ на число α называется матрица $B=\left(b_{ij}\right)$ такая, что $b_{ij}=\alpha a_{ij}$:

$$B=\alpha\cdot A=\left(\alpha\cdot a_{ij}\right), i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{1.11}$$

Пример 15. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 5 & 7 & -8\end{pmatrix}$, $\alpha=2$. Найти $B=\alpha\cdot A$.

Решение. $B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 10 & 14 & -16 \end{pmatrix}.$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется противоположной матрице A.

Для любых матриц A и B одинакового размера и любых действительных чисел α и β справедливы следующие свойства:

1. $A - A = 0;$
2. $1 \cdot A = A;$
3. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B;$
4. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta B;$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$.

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Оределение. Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}, \qquad (1.12)$$

где $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, p}$.

Формулу (1.12) для нахождения элемента c_{ik} полезно помнить в виде правила:

в матрице A выделяем i-ю строку, в матрице B выделяем k-й столбец.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Тогда для того, чтобы получить элемент c_{ik} матрицы C, расположенный на пересечении i-й строки и k-го столбца, надо каждый элемент i-й строки матрицы A умножить на соответствующий элемент k-го столбца матрицы B и все полученные произведения сложить.

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют.

Пример 16. Найти произведение матриц A и B, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Для получения первой строки новой матрицы фиксируем в матрице A первую строку *(2 0)*, а в матрице B выделяем поочередно первый, второй и третий столбцы: $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Элемент c_{11} находим как сумму произведений элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B по правилу: «произведение первого элемента строки на первый элемент столбца плюс произведение второго элемента строки на второй элемент столбца».

Пользуясь этим правилом, находим: $c_{11}=(2\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}=2\cdot 1+0\cdot 5=2$,

$c_{12}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}=2\cdot 4+0\cdot(-3)=8,\ c_{13}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}=2\cdot 7+0\cdot 2=14.$

Для вычисления элементов c_{21}, c_{22}, c_{23} фиксируем вторую строку матрицы A (-1 3) и умножаем её поочередно на первый, второй и третий столбцы матрицы B:

$$c_{21}=(-1\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}=(-1)\cdot 1+3\cdot 5=-1+15=14,$$

$$c_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}=(-1)\cdot 4+3\cdot(-3)=-4-9=-13,$$

$$c_{23}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}=(-1)\cdot 7+3\cdot 2=-7+6=-1.$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 5 & 2\cdot 4+0\cdot(-3) & 2\cdot 7+0\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1+3\cdot 5 & (-1)\cdot 4+3\cdot(-3) & (-1)\cdot 7+3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 14 & -13 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 17. Даны матрицы

$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти AB и BA.

Решение. Произведение AB не определено, так как число столбцов матрицы A (3) не совпадает с числом строк матрицы B (2). Произведение BA определено, так как число столбцов матрицы B (2) совпадает с числом строк матрицы A (2).

Используя правило, рассмотренное в предыдущем примере, найдем произведение BA:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot3&1\cdot2+3\cdot1&1\cdot1+3\cdot0\\1\cdot1+2\cdot3&1\cdot2+2\cdot1&1\cdot1+2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5&1\\7&4&1\end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB=BA$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C;$

2. $A(B+C)=AB+AC;$

3. $(A+B)\cdot C=AC+BC;$

4. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B);$

5. $\det(AB)=\det A\cdot\det B,$ если указанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

6. Если A квадратная матрица n-го порядка, E-единичная матрица того же порядка, то $AE=EA=A$.

7. Для операции транспонирования верны следующие равенства:

$(A+B)^T=A^T+B^T$,

$(AB)^T=B^T\cdot A^T$.

Пример 18. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3\\5&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}.$

Проверить справедливость равенства 5.

Решение. Найдем произведение AB:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+3\cdot3&2\cdot0+3\cdot2\\5\cdot(-1)+4\cdot3&5\cdot0+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\7&8\end{pmatrix},$$

$$\det(AB)=\begin{vmatrix}7&6\\7&8\end{vmatrix}=7\cdot8-7\cdot6=56-42=14.$$

$$\det A=\begin{vmatrix}2&3\\5&4\end{vmatrix}=2\cdot4-5\cdot3=8-15=-7,$$

$$\det B=\begin{vmatrix}-1&0\\3&2\end{vmatrix}=(-1)\cdot2-3\cdot0=-2,$$

$\det A\cdot\det B=(-7)(-2)=14.$

Таким образом, $\det(AB)=\det A\cdot\det B=14.$

Пример 19. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$

Показать, что $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Решение. Найдем произведение матриц АВ:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 0+1\cdot 1\\ 0\cdot 1+0\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$B^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Найдем $B^T \cdot A^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 0+1\cdot 0\\ 0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

Получим $(AB)^T = B^T \cdot A^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

Пример 20. Даны две матрицы $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B_{3\times 1}=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 3\end{pmatrix}.$

Найти AB.

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+1\cdot 5-1\cdot 3\\ 3\cdot 0+2\cdot 5+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 13\end{pmatrix}_{2\times 1}.$$

Пример 21. Найти значение матричного многочлена $2A^2+3A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

Решение. $A^2=A\cdot A$. Найдем A^2:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 1\\ 1\cdot 1+3\cdot 1+1\cdot 4 & 1\cdot 2+3\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot 1+3\cdot 1+1\cdot 1\\ 4\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 4 & 4\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 1 & 4\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 9 & 4\\ 8 & 12 & 5\\ 9 & 12 & 6\end{pmatrix},$$

$$2\cdot A^2=2\cdot\begin{pmatrix}7&9&4\\8&12&5\\9&12&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&18&8\\16&24&10\\18&24&12\end{pmatrix},$$

$$3A=3\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&3\\3&9&3\\12&3&3\end{pmatrix},\quad 5\cdot E=5\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

$$2A^2+3A=\begin{pmatrix}14&18&8\\16&24&10\\18&24&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&6&3\\3&9&3\\12&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&24&11\\19&33&13\\30&27&10\end{pmatrix},$$

$$2A^2+3A-5E=\begin{pmatrix}17&24&11\\19&33&13\\30&27&15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&24&11\\19&28&13\\30&27&10\end{pmatrix}.$$

Пример 22. Найти произведение матриц $A\cdot B\cdot C$, если оно определено, где $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\-1&5&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\1\\7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-2&1&8\end{pmatrix}$.

Решение. Рассмотрим матрицы A и B. Размер матрицы A 2×3, размер матрицы B 3×1. Так как число столбцов матрицы A (3) равно числу строк матрицы B (3), то произведение $A\cdot B$ определено, в результате получим матрицу размера 2×1.

Число столбцов матрицы $A\cdot B$ (1) совпадает с числом строк матрицы C (1), таким образом, произведение $A\cdot B\cdot C$ определено, получаемая матрица будет размера 2×4.

Найдем произведение $A\cdot B$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&4\\-1&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot6+3\cdot1+4\cdot7\\-1\cdot6+5\cdot1+0\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43\\-1\end{pmatrix}_{2\times1}.$$

Найдем произведение $A\cdot B\cdot C$:

$$A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}43\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43\cdot3&43\cdot(-2)&43\cdot1&43\cdot8\\(-1)\cdot3&(-1)\cdot(-2)&(-1)\cdot1&(-1)\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}129&-86&43&344\\-3&2&-1&-8\end{pmatrix}_{2\times4}.$$

1.2.3. Обратная матрица

Пусть A-квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A, называется присоединенной к матрице A.

Алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы находятся так же, как к элементам ее определителя. В присоединенной матрице алгебраические дополнения элементов строки стоят в столбце с таким же номером.

Пример 23. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу, присоединенную к матрице A.

Решение. Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A по формуле (1.4):

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 6 - 8 \cdot 4 = -6 - 32 = -38,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 6 - 5 \cdot 4) = -(48 - 20) = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = (3 \cdot 8 - 5 \cdot (-1)) = 24 + 5 = 29,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 6 - 8 \cdot 1) = 8,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & 8\end{vmatrix}=-(2\cdot 8-5\cdot 0)=-16,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=0\cdot 4-(-1)\cdot 1=1,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-(2\cdot 4-3\cdot 1)=-(8-3)=-5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-3\cdot 0=-2.$$

Составим матрицу $\tilde{A}$, присоединенную к матрице A

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-38 & 8 & 1\\ 2 & 7 & -5\\ 29 & -16 & -2\end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной матрице A, если выполняется условие

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E, \qquad (1.14)$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы $\det A\neq 0$, то есть чтобы матрица была невырожденной.

Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

для матрицы A третьего порядка.

Свойства обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;
3. $(A^{1})^{T}=(A^{T})^{-1}$.

Пример 24. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 8\end{pmatrix}$.

Решение. Проверим, является ли данная матрица невырожденной. Вычислим определитель, соответствующий матрице A:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 1 \cdot 5 = 24 - 5 = 19 \neq 0$, следовательно, матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица A^{-1}.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 8 = 8,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3.$

Составим матрицу A^{-1} по формуле (1.15)

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{19} & -\frac{5}{19} \\ -\frac{1}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{19} & -\frac{5}{19} \\ -\frac{1}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{8}{19} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{19}\right) & 3 \cdot \left(-\frac{5}{19}\right) + 5 \cdot \frac{3}{19} \\ 1 \cdot \frac{8}{19} + 8 \cdot \left(-\frac{1}{19}\right) & 1 \cdot \left(-\frac{5}{19}\right) + 8 \cdot \frac{3}{19} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{24-5}{19} & \frac{-15+15}{19} \\ \frac{8-8}{19} & \frac{-5+24}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{19} & 0 \\ 0 & \frac{19}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена верно.

Пример 25. Показать, что матрица A является обратной для B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем произведение матриц A и B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3&1\\-3&5&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+1\cdot(-3)+1\cdot1 & 1\cdot(-3)+1\cdot5+1\cdot(-2) & 1\cdot1+1\cdot(-2)+1\cdot1\\ 1\cdot3+2\cdot(-3)+3\cdot1 & 1\cdot(-3)+2\cdot5+3\cdot(-2) & 1\cdot1+2\cdot(-2)+3\cdot1\\ 1\cdot3+3\cdot(-3)+6\cdot1 & 1\cdot(-3)+3\cdot5+6\cdot(-2) & 1\cdot1+3\cdot(-2)+6\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Следовательно, матрица A является обратной для матрицы B.

Пример 26. Найти матрицу, обратную для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&4\\5&2&5\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем определитель матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-1&4\\5&2&5\\2&3&1\end{vmatrix}=3\cdot2\cdot1+5\cdot3\cdot4+(-1)\cdot5\cdot2-2\cdot2\cdot4-5\cdot(-1)\cdot1-$$

$$-3\cdot5\cdot3=6+60-10-16+5-45=0.$$

Матрица A – вырожденная, значит обратная для нее матрица не существует.

Пример 27. Найти матрицу, обратную для данной матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&0&4\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем определитель матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&0&4\\3&1&2\end{vmatrix}=2\cdot0\cdot2+(-1)\cdot1\cdot3+1\cdot4\cdot3-3\cdot0\cdot3-(-1)\cdot1\cdot2-$$

$$-1\cdot4\cdot2=0-3+12-0+2-8=3\neq0,$$

значит матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица A^{-1}.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = -4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot 2 - 3 \cdot 4) = -(-2-12) = 14,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 3) = -(2-3) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = -(2-3) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 3 == 4 - 0 = 4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3) = -(8+3) = -11,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 == 0 + 1 = 1.$$

Используя формулу (1.15), составим матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 14 & -5 & -11 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{4}{3}\cdot 3 & -\frac{4}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{4}{3}\cdot 1 & -\frac{4}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{4}{3}\cdot 2 \\ \frac{14}{3}\cdot 2+\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot(-1)+\left(-\frac{11}{3}\right)\cdot 3 & \frac{14}{3}\cdot 1+\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 0+\left(-\frac{11}{3}\right)\cdot 1 & \frac{14}{3}\cdot 3+\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 4+\left(-\frac{11}{3}\right)\cdot 2 \\ -\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 3 & -\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1 & -\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{-8-1+12}{3} & \frac{-4+0+4}{3} & \frac{-12+4+8}{3} \\ \frac{28+5-33}{3} & \frac{14+0-11}{3} & \frac{42-20-22}{3} \\ \frac{-2-1+3}{3} & \frac{-1+0+1}{3} & \frac{-3+4+2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Значит, обратная матрица A^{-1} найдена верно.

1.2.4. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m\times n$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов $(k\le \min(m;n))$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются минорами этой матрицы.

Определение. Рангом матрицы A называется наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля.

Обозначают ранг матрицы $r_A, r(A)$ или $rangA$.

Пример 28. Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Дана матрица размера 3×4. Возможный ранг матрицы равен трем, т.к. $(k\le \min(3;4))$. Но матрица содержит два нулевых столбца, поэтому все определители третьего порядка, составленные из элементов данной матрицы равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим минор второго порядка, например

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$.

Ранг матрицы удобно вычислять, используя элементарные преобразования над матрицей. К элементарным относятся следующие преобразования:

1) перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

2) умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение. Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Ранг матрицы не изменится, если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд.
3. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется, т.е. если $A \sim B$, то $r(A) = r(B)$.

Пример 29. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к элементам третьей строки

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки умножим на 3 и прибавим к элементам третьей строки

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем третью строку полученной матрицы, т.к. все ее элементы равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 3 = 4 \neq 0 .$$

Таким образом, $r(A) = 2.$

В преобразованной матрице получилось две ненулевые строки.

Пример 30. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 5} .$$

Решение. Умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к элементам второй строки данной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим элементы первой строки на (-3) и прибавим к элементам третьей строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & -12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки полученной матрицы умножим на (-5) и прибавим к элементам третьей строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & -12 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & 12 \end{pmatrix}.$$

Из элементов полученной матрицы составим определитель третьего порядка. Для этого возьмем первые три столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix}.$$

Получили определитель треугольного вида, значение которого равно произведению элементов главной диагонали

$$\Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 18 = -18 \neq 0 .$$

Ранг последней матрицы равен 3, следовательно, ранг данной матрицы тоже равен 3.

В последней матрице содержится три ненулевые строки.

Можно сделать следующий вывод:

ранг матрицы равен количеству ненулевых строк преобразованной к треугольному виду матрицы.

1.2.5. Задания для самостоятельного решения

1. Даны матрицы $A_{2\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times3}$. Существуют ли а) AB, б) BA, в) AC, г) CA, д) ABC, е) ACB, ж) CB, з) CBA?

2. Найдите m и n, если известно, что а) $A_{3\times4} \cdot B_{4\times5} = C_{m\times n}$; б) $A_{2\times3} \cdot B_{m\times n} = C_{2\times6}$; в) $A_{2\times m} \cdot B_{n\times3} = C_{2\times3}$.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Найдите а) $A+B$; б) $B-A$; в) $2A-3B$; г) $A+B+A^T+B^T$; д) $A \cdot B$; е) $B \cdot A$; ж) A^{-1}; з) B^{-1}.

4. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Найдите а) AB; б) BA; в) AC ; г) CB ; д) $2C-BA$; е) C^{-1};
ж) CC^{-1}; з) $3C-2E$; и) CE; к) AE.

5. Найти:

а) $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$;

к) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$.

6. Найти $f(A)$, если:

а) $f(X)=3X^2-4$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

б) $f(X)=X^2-3X+1$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $f(X)=3X^2-2X+5$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

7. Найти матрицы, обратные для данных и сделать проверку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & -2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$. При каких α а) $r(A)=1$, б) $r(A)=2$,

в) $r(A)=3$.

Ответы: 1. а), в), е), ж) да; б), г), д), з) нет.

2. а) 3;5, б) 3;6, в) $m=n$ — любые натуральные числа.

3. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -21 & 10 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 12 & -16 \\ -26 & 36 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$,

ж) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, з) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

4. а) $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 11 & 1 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 11 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, е) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ж) Е, з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 9 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, и) С,

к) А.

5.а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$; ж) (31); з) $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. а)2; б)3; в)3; г)2; д)1; е)2.
9. а)-4; б) $\neq -4$; в) ни при каких.

1.3. Системы линейных уравнений

1.3.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1.16)$$

где числа $a_{ij}, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$ называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами.

Матрица, составленная из коэффициентов системы, называется основной матрицей и обозначается:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.17)$$

Расширенной матрицей системы называется матрица A^*, полученная из основной матрицы A, дополненная столбцом свободных членов:

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \qquad (1.18)$$

Решение системы (1.16) называется n значений неизвестных $x_1=c_1, x_2=c_2,\dots,x_n=c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Определение. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Определение. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются эквивалентными (равносильными), если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений (1.16) называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется нулевым или тривиальным.

1.3.2. Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных алгебраических уравнений (1.16) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы (1.18) равен рангу основной матрицы (1.17), то есть $r(A^*) = r(A)$.

Если система (1.16) совместна и

1) ранг системы равен числу неизвестных ($r(A)=n$), то система имеет единственное решение;

2) ранг системы меньше числа неизвестных ($r(A)<n$), то система имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим второй случай. Пусть $r(A)=r<n$.Возьмем первые r уравнений системы (1.16) и оставим в левых частях этих уравнений первые r неизвестных, а остальные неизвестные перенесем вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

«Свободным» неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ можно придать любые значения. Тогда соответствующие значения получают неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Таким образом можно найти частные и общее решения исходной системы уравнений.

Пример 31. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Определим ранги основной матрицы системы и расширенной матрицы системы. Для этого выпишем расширенную матрицу системы

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 3 \\ 3 & 15 & 12 & 5 \end{array}\right).$$

Вертикальной чертой отделим элементы основной матрицы от свободных членов системы. Умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к элементам второй строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 15 & 12 & 5 \end{array}\right).$$

Элементы первой строки, умноженные на (-3), прибавим к элементам третьей строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Умножим элементы второй строки на (-2) и прибавим к элементам третьей строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Основная матрица системы A эквивалентна матрице

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице одна ненулевая строка, значит ранг матрицы A равен 1, то есть $r(A)=1$. Расширенная матрица системы A^* эквивалентна матрице $A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

В полученной матрице две ненулевые строки, поэтому $r(A^*) = 2$.

Так как $r(A) \neq r(A^*)$, тогда согласно теореме Кронекера-Капелли данная система уравнений несовместна.

Пример 32. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right).$$

Поменяем местами первую и вторую строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right).$$

Умножим элементы первой строки на (-3) и прибавим к элементам второй строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right).$$

Элементы первой строки, умноженные на (-7), (-5), (-3) прибавим соответственно к элементам третьей, четвертой и пятой строк:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right).$$

Поменяем местами строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \end{array}\right).$$

Умножим элементы второй строки на $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки умножим на 7, 19, 13 и прибавим соответственно к элементам третьей, четвертой и пятой строк:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Основная матрица системы эквивалентна матрице

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в которой две ненулевые строки, поэтому *r(A)=2*.

Расширенная матрица системы эквивалентна матрице

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

в которой также две ненулевые строки, поэтому $r(A^*)=2$.

Так как $r(A)=r(A^*)$, система совместна. В данной системе уравнений две неизвестные, то есть $r=n$, поэтому система уравнений является определенной.

Найдем единственное решение данной системы. Для этого восстановим систему по последней матрице

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1, \\ \quad\quad 2x_2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем x_2 и полученное значение подставим в первое уравнение $\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}, \\ x_1 - 4\cdot\dfrac{1}{2} = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2 = -1, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Пример 33. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Определим ранг основной матрицы системы и ранг расширенной матрицы данной системы. Выпишем расширенную матрицу

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Умножим элементы первой строки на (-1) и прибавим сначала к элементам второй строки, а затем к элементам третьей строки. В результате получим матрицу, эквивалентную матрице A^*

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки умножим на $\frac{1}{4}$, а элементы третьей строки на $\frac{1}{2}$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки умножим на (-1) и прибавим к элементам третьей строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отбросим третью строку, все элементы которой равны нулю

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right). \qquad (1.20)$$

В результате элементарных преобразований получили две ненулевые строки.

Ранг основной матрицы системы равен двум *r(A)=2.*

Ранг расширенной матрицы системы тоже равен двум $r(A^*) = 2$.

Значит, данная система уравнений совместна, а так как число неизвестных, равное трем, больше, чем ранг, то система уравнений является неопределенной.

Найдем общее решение системы уравнений.

Воспользуемся матрицей (1.20) для получения системы уравнений, равносильной данной системе

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ \qquad 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

За базисные неизвестные примем x_1 и x_2, а x_3 – свободная переменная.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -2x_3 - 1, \\ \qquad 3x_2 = -x_3 + 1. \end{cases}$$

Выразим из этой системы x_1 и x_2 через x_3:

$$\begin{cases} x_1 - 1 + x_3 = -1 - 2x_3, \\ \qquad x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -3x_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}x_3. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = C$, где C – любое действительное число, получаем общее решение данной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = -3C, \\ x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}C, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Если необходимо найти какое-либо частное решение системы, то константе C придают любое значение, например: пусть C=1, тогда получим $(-3;0;1)$.

1.3.3. Матричный метод решения систем

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.21)$$

Основная матрица системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Обозначим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_3 \end{pmatrix}$. Пусть $|A| \neq 0$, то есть матрица A невырожденная. Тогда систему (1.21) можно представить в виде уравнения

$$A \cdot X = B, \tag{1.22}$$

которое называется матричным уравнением. Решим матричное уравнение. Умножим обе части уравнения (1.22) слева на A^{-1}. Получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, а так как $A^{-1} \cdot A = E$, $E \cdot X = X$, тогда

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.23}$$

Равенство (1.23) называется решением матричного уравнения (1.22).

Таким образом, чтобы решить систему уравнений (1.21) матричным методом, где $|A| \neq 0$, надо найти матрицу, обратную матрице *A*, и умножить ее на матрицу-столбец *B*, состоящую из свободных членов системы (1.21).

Пример 34. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 23. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли матрица *A* невырожденной:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5 - (5 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 1) =$$

$$= 36 + 6 + 10 - 30 - 8 - 9 = 5 \neq 0,$$

значит матрица A является невырожденной, поэтому обратная матрица A^{-1} к матрице A существует и данную систему уравнений можно решить матричным методом.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 12 - 3 = 9,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - 5 \cdot 1) = -(4-5) = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3 - 15 = -12,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = -(8-6) = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = -(9-10) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 9 - 2 = 7.$$

Составим матрицу $\tilde{A}$, присоединенную к матрице A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.15) получим матрицу A^{-1}, обратную к матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение данной системы уравнений по формуле (1.23)

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\10\\23\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9\cdot 13-2\cdot 10-4\cdot 23\\1\cdot 13+2\cdot 10-1\cdot 23\\-12\cdot 13+1\cdot 10+7\cdot 23\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\text{ то есть } x_1=1, x_2=2, x_3=3.$$

Пример 35. Матричным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1,\\2x_1+4x_2-2x_3=2,\\5x_1-x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

Решение. Запишем основную матрицу системы A:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\5&-1&3\end{pmatrix}$$

и вычислим определитель этой матрицы $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\5&-1&3\end{vmatrix}$.

В полученном определителе элементы первой строки пропорциональны соответствующим элементам второй строки, тогда по свойству 6 определителей $|A|=0$.

Матрица A является вырожденной, а значит решить матричным методом данную систему невозможно.

1.3.4. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

определитель основной матрицы которой отличен от нуля, то есть система уравнений невырожденная.

Обозначим $|A| = \Delta.$. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены элементов первого столбца столбцом из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены элементов второго столбца столбцом из свободных членов;

$x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, и так далее, $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n} \tag{1.24}$$

называются формулами Крамера.

Таким образом, невырожденная система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным методом (1.23) или по формулам Крамера (1.24).

Пример 36. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Составим и вычислим определитель Δ данной системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 2 + 3\cdot(-3)\cdot 3 - (3\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot(-3)) =$$

$$= 4 + 8 - 27 - 12 - 3 + 24 = -6 \neq 0.$$

Данная система является невырожденной, поэтому ее решение можно найти по формулам Крамера (1.24).

Вычислим Δ_1, Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 9\cdot 2\cdot 1 + 14\cdot 4\cdot 2 + 16\cdot(-3)\cdot 3 - (16\cdot 2\cdot 2 + 14\cdot 3\cdot 1 +$$

$$+ 9\cdot 4\cdot(-3)) = 18 + 112 - 144 - 64 - 42 + 108 = -12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 14\cdot 1 + 1\cdot 16\cdot 2 + 3\cdot 9\cdot(-3) - (3\cdot 14\cdot 2 + 1\cdot 9\cdot 1 + 16\cdot(-3)\cdot 2) =$$

$$= 28 + 32 - 81 - 84 - 9 + 96 = -18;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 16 + 1\cdot 4\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 14 - (3\cdot 2\cdot 9 + 1\cdot 3\cdot 16 + 2\cdot 4\cdot 14) =$$

$$= 64 + 36 + 126 - 54 - 48 - 112 = 12.$$

Значит, $x_1 = \dfrac{-12}{-6} = 2$, $x_2 = \dfrac{-18}{-6} = 3$, $x_3 = \dfrac{12}{-6} = -2$.

1.3.5. Решение систем методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений систем линейных уравнений является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.25)$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (треугольному или трапециевидному) виду. Для этого над строками расширенной матрицы системы A^* проводятся элементарные преобразования, приводящие эту матрицу к ступенчатому виду. Полученная матрица будет эквивалентной матрице A^*, значит, и система уравнений, полученная с помощью новой матрицы будет равносильной данной системе уравнений.

Если в процессе приведения системы (1.25) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, то есть равенства вида 0=0, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это говорит о том, что данная система уравнений несовместна.

Второй этап (обратный ход) заключается в решении ступенчатой системы. Если в последнем уравнении новой системы содержится одно неизвестное, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные x_{n-2}, $(x_{n-3},..., x_2, x_1)$. Если в последнем уравнении преобразованной системы более чем одно неизвестное, то данная система имеет множество решений (система является неопределенной). Из последнего уравнения выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1},..., x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1},..., x_n)$ и так далее. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1},..., x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы. На практике удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 37. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу A^* данной системы

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

Так как $a_{11} = 2 \neq 1$, $a_{21} = 1$, поменяем местами первую и вторую строки матрицы A^* местами:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

Сначала элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, а затем элементы первой строки умножим на (-7) и прибавим к элементам третьей строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 15 & -15 & 45 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки умножим на (-3)и прибавим к элементам третьей строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Восстановим систему по последней матрице

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ \qquad 5x_2 - 5x_3 = 15. \end{cases}$$

Получили систему, состоящую из двух уравнений и содержащую три неизвестных, то есть с помощью элементарных преобразований данную систему уравнений привели к ступенчатому виду, в которой нет уравнений вида $0 = b_i$, где $b_i \neq 0$. Поэтому система уравнений имеет бесчисленное множество решений. Выразим x_2 через x_3 из второго уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ \qquad x_2 = x_3 + 3. \end{cases}$$

Подставим полученное выражение x_2 в первое уравнение:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2x_3 + 2(3 + x_3), \\ \qquad x_2 = x_3 + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2x_3 + 6 + 2x_3, \\ \qquad x_2 = x_3 + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = x_3 + 3. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = C$, где C – любое действительное число, тогда полученное решение будет называться общим решением

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3 + C, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 2$, тогда получаем решение, которое будет называться частным решением системы: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2 \end{cases}$

Пример 38. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу A^* данной системы уравнений

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right).$$

Элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к элементам второй строки, затем элементы первой строки умножим на (-7) и прибавим к элементам третьей строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 19 \\ 0 & 15 & 13 & 49 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки умножим на (-3) и прибавим к элементам третьей строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 19 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right).$$

Элементы третьей строки умножим на $\left(-\frac{1}{4}\right)$:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований получили матрицу треугольного вида, значит, данная система уравнений имеет единственное решение.

С помощью полученной преобразованной расширенной матрицы запишем соответствующую систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 = 19, \\ \qquad\qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Зная значение $x_3 = 2$, из второго уравнения находим x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad 5x_2 = 19 + 3 \cdot 2, \\ \qquad\qquad x_3 = 2. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad\qquad x_2 = 5, \\ \qquad\qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Используя значения $x_3 = 2$ и $x_2 = 5$, из первого уравнения находим x_1:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5, \\ \qquad x_2 = 5, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases} \text{ или окончательно } \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

1.3.6. Однородные системы уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.26)$$

Однородная система всегда совместна ($r(A) = r(A^*)$), она имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, то есть $r<n$.

Если число уравнений m системы совпадают с числом неизвестных n, то есть $m = n$, основная матрица системы является квадратной, в этом случае условие $r<n$ означает, что определитель основной матрицы системы $|A| = 0$.

Пример 39. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим основную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к элементам второй строки.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу ступенчатого вида, в которой две ненулевые строки, поэтому ранг матрицы A, а значит и расширенной матрицы A^* равен 2, то есть $r(A) = r(A^*) = 2$.

Число неизвестных в системе уравнений равно 3, $r<n$, поэтому данная система имеет ненулевые решения.

Для составления системы, равносильной данной, воспользуемся преобразованной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \quad\;\; 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 через x_3, при этом x_3 будет является свободной переменной: $x_2 = \dfrac{1}{5} x_3$.

Полученную правую часть равенства подставим в первое уравнение и выразим x_1 через x_3: $x_1 = x_3 - 2 \cdot \dfrac{1}{5} x_3$, $x_1 = \dfrac{3}{5} x_3$.

Пусть $x_3 = C$, тогда общее решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$X = X(C) = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5}C \\ \dfrac{1}{5}C \\ C \end{pmatrix}. \qquad (1.27)$$

Пример 40. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки умноженным на 3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Элементы первой строки умножим на (-1) и прибавим к элементам третьей строки

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки умножим на (-2), элементы третьей строки на 11 и полученные строки сложим

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Получили три ненулевые строки, значит ранг матрицы A равен 3, число неизвестных в системе уравнений тоже равно 3, то есть $r(A) = n$, значит данная система уравнений имеет единственное решение – нулевое, то есть

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Пример 41. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & 19 \end{pmatrix}$$

и найдем ранг этой матрицы.

Элементы первой строки умножим на (-3) и прибавим к элементам второй и четвертой строк, затем элементы первой строки умножим на (-4) и прибавим к третьей строке:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки умножим на (-3) и прибавим к элементам третьей строки, затем элементы второй строки умножим на 2 и прибавим к элементам четвертой строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В преобразованной матрице ступенчатого вида получилось две ненулевые строки, поэтому ранг матрицы A равен двум, то есть $r(A) = 2$, а число неизвестных в системе уравнений равно 4 ($n = 4$). Получили, что $r < n$, поэтому данная система уравнений имеет ненулевые решения. Укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \qquad -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_4 - 4x_3, \\ \qquad x_2 = 5x_4 - 6x_3; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_4 - 4x_3 - 2(5x_4 - 6x_3), \\ x_2 = 5x_4 - 6x_3; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = 5x_4 - 6x_3. \end{cases}$$

Неизвестные x_1 и x_2 – базисные, а x_3 и x_4 – свободные. Полагая $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, получим общее решение системы, записанное в виде матрицы-столбца (1.27)

$$X = X(c_1; c_2) = \begin{pmatrix} 8c_1 - 7c_2 \\ 5c_2 - 6c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

Назовем фундаментальной системой решений систему матриц-столбцов, полученную из общего решения при условии, что свободным неизвестным дают последовательно значения

$$\begin{aligned} &c_1 = 1, c_2 = c_3 = ... = c_n = 0, \\ &c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = ... = c_n = 0, \\ &.. \\ &c_1 = c_2 = ... = c_{n-1} = 0, c_n = 1. \end{aligned}$$

Матрицы-столбцы, то есть фундаментальную систему решений обозначают $E_1, E_2, ..., E_n$. Общее решение будет представлено в виде

$$X = c_1E_1 + c_2E_2 + ... + c_nE_n. \tag{1.29}$$

В примере 41 найдем фундаментальную систему решений и выразим с ее помощью общее решение этой системы.

Из общего решения (1.28) системы найдем E_1 *и* E_2:

$$E_1 = X(1;0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = X(0;1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

С использованием фундаментальной системы (1.30) общее решение (1.28) может быть записано в виде (1.29)

$$X(c_1; c_2) = c_1E_1 + c_2E_2.$$

1.3.7. Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать совместность следующих систем:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

2. Решить системы уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 9, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

3. Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 - 7x_2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad\quad = 5, \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 16, \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

4. Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса или Жордана-Гаусса:

а) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

л) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 8; \end{cases}$

н) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 8x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 17. \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ о) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

5. Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 \qquad - x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

Ответы. 1.а) система несовместна; б) система совместна;

в) система совместна; г) система несовместна; д) система совместна; е) система совместна.

2. а) $(1;1;1)$; б) (-3;2;1); в) (3;0;1); г) (3;-2;-5); д) (8;4;2); е) (-8;-4;-13).

3. а) (16;7); б) (2;-1;1); в) (1;3;5); г) (3;1;-1); д) (-3;2;1); е) (-1;1;-2).

4. а) (с;-$\frac{7}{5}$; $\frac{9}{5}$ -$\frac{3}{2}$ с); б) Ø; в) (-1;3;2); г) (2;3;1); д) (2;1;3); е) $\left(\frac{51}{11}; \frac{19}{11}; -\frac{4}{11}\right)$; ж) (1; 0; 2); з) (5с-5;7с-7;с;0); и) $(1; x_4 - 1; 2x_4 - 2; x_4)$; к) $(2; 3 - x_4; 1; x_4)$;

л) Ø; м) Ø; н) (0; -1; 2); о) $(-\frac{c}{2}; -1 - \frac{c}{2}; 0; -1 - \frac{c}{2}; c)$.

5. а) $(c; -2c; c)$; б) (0;0;0); в) (0;0;0); г) $\left(c; -\frac{1}{4}c; 0; \frac{3}{4}c\right)$;

д) $\left(c_1; c_2; c_1 + \frac{5}{4}c_2; -\frac{1}{4}c_2\right)$; е) $\left(c_1; c_2; \frac{c_1 - 5c_2}{3}; \frac{-4(c_1 + c_2)}{3}\right)$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Векторы. Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются скалярными. Например, площадь, длина, работа, масса.

Величины, которые определяются не только своим числовым значением, но и направлением, называются векторными. Например, сила, ускорение.

Определение. Вектор – это направленный прямолинейный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если точка A – начало вектора, а точка B – его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overline{a}$.

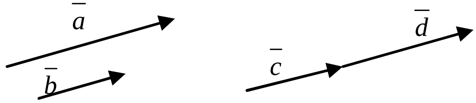
Определение. Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется противоположным вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\overline{a}$ обозначается $-\overline{a}$.

Определение. Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной или модулем и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$.

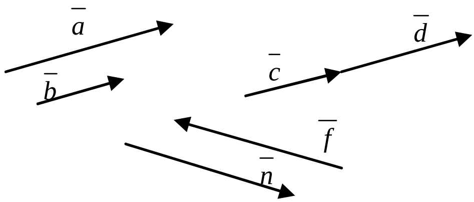
Определение. Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым вектором и обозначается $\overline{0}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается $\overline{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется ортом (орт) вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a_0}$.

Определение. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, обозначается коллинеарность $\overline{a}\|\overline{b}$.

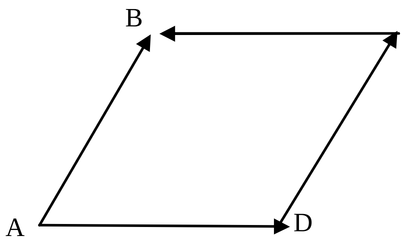


Коллинеарные векторы могут быть сонаправлены ($\overline{a} \upuparrows \overline{b}$) и противоположно направлены ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$).



$\overline{a} \| \overline{b}$, $\overline{c} \| \overline{d}$, $\overline{n} \| \overline{f}$, кроме того $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, $\overline{c} \uparrow\uparrow \overline{d}$, $\overline{n} \uparrow\downarrow \overline{f}$.

Определение. Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.



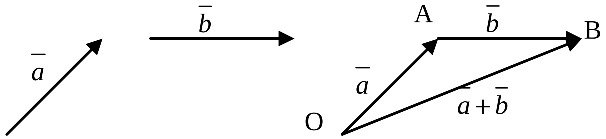
$\overline{AB} = \overline{DC}, \overline{CB} \neq \overline{AD}.$

Определение. Три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

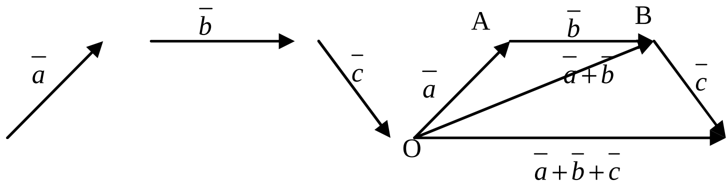
2.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют операции сложения, вычитания векторов и умножение вектора на число.

Определение. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA} = \overline{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \overline{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$.

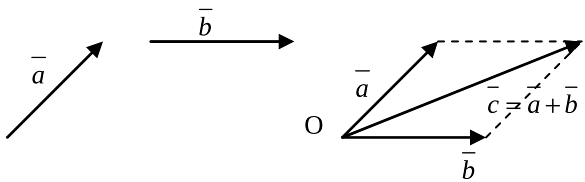


Это правило сложения векторов называют правилом треугольника.

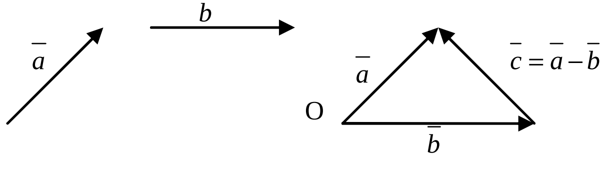


Таким образом, правило треугольника можно применять для любого конечного числа складываемых векторов.

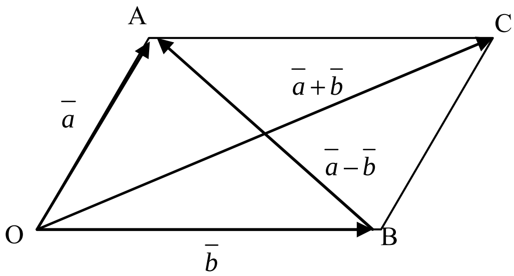
Сумму двух векторов можно построить и по правилу параллелограмма.



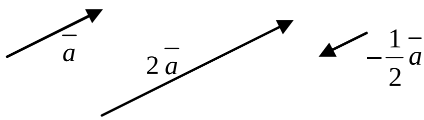
Определение. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ такой, что $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.



Таким образом, если на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, отложенных из общей точки *O*, построить параллелограмм *OACB*, то вектор $\overline{OC}$, совпадающий с одной диагональю, равен сумме $\overline{a}+\overline{b}$, а второй $\overline{BA}$, совпадающий с другой диагональю, – разности $\overline{a}-\overline{b}$.



Определение. Произведением вектора $\overline{a}$ на число (скаляр) называется вектор $\lambda\cdot\overline{a}$, который имеет длину $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, коллинеарен вектору $\overline{a}$, имеет направление вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$ и противоположное направление, если $\lambda<0$. Например, если дан вектор $\overline{a}$, то векторы $2\overline{a}$ и $-\frac{1}{2}\overline{a}$ будут иметь вид



Из определения следует: два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарные тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$: $\overline{a}\|\overline{b}\Leftrightarrow\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;
2) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$;
3) $\overline{a}+0=\overline{a}$; $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$;

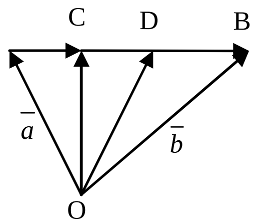
4) $\lambda_1 \cdot \left(\lambda_2 \cdot \overline{a}\right) = \left(\lambda_1 \cdot \lambda_2\right) \cdot \overline{a} = \lambda_2 \left(\lambda_1 \cdot \overline{a}\right);$

5) $\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\overline{a} = \lambda_1 \overline{a} + \lambda_2 \overline{a};$

6) $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b};$

7) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}; (-1)\overline{a} = -\overline{a}$.

Пример 1. Отрезок AB разделен точками C и D на три равные части. Точка O не принадлежит отрезку АВ. Векторы $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вектор $\overline{m} = 3\overline{OC} - 2\overline{OD}$.



Решение. Выполним построения

$$\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}; \quad \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}. \quad \overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{AB}, \overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB}, \quad \overline{AC} = \frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a}).$$

$$\overline{OC} = \overline{a} + \frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a}), \quad \overline{OC} = \overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} - \frac{1}{3}\overline{a}, \quad \overline{OC} = \frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}, \quad 3\overline{OC} = 2\overline{a} + \overline{b}.$$

$$\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD}; \quad \overline{BD} \uparrow\downarrow \overline{AB}, \quad \overline{BD} = -\frac{1}{3}\overline{AB}, \quad \overline{BD} = -\frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a}),$$

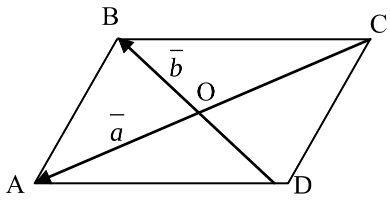
$$\overline{OD} = \overline{b} - \frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a}), \qquad \overline{OD} = \overline{b} - \frac{1}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{a}, \qquad \overline{OD} = \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{a},$$

$$2\overline{OD} = \frac{4}{3}\overline{b} + \frac{2}{3}\overline{a}.$$

$$\overline{m} = 2\overline{a} + \overline{b} - \frac{4}{3}\overline{b} - \frac{2}{3}\overline{a}, \quad \overline{m} = \frac{4}{3}\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b}, \quad \overline{m} = \frac{4\overline{a} - \overline{b}}{3}.$$

Пример 2. В параллелограмме $ABCD$ $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b},$ где О точка пересечения диагоналей. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вектор $\overline{m} = \overline{AB} + 2\overline{AD} - 3\overline{CD} - 5\overline{BC}.$

Решение. Выполним построения



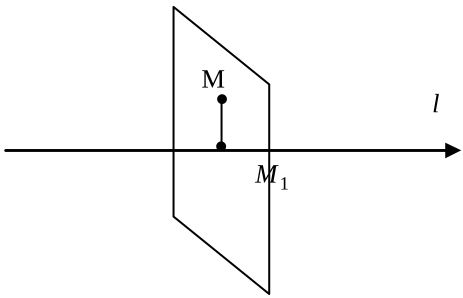
$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}.$ $\overline{AO}\uparrow\downarrow\overline{OA},$ $\overline{AO}=-\overline{a}.$ $\overline{AB}=-\overline{a}+\overline{b}$ или $\overline{AB}=\overline{b}-\overline{a}.$

$\overline{AD}=\overline{AO}+\overline{OD},$ $\overline{AO}=-\overline{a}.$ Векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OD}$ – противоположные, т.к. $\overline{OB}\|\overline{OD},$ $|\overline{OB}|=|\overline{OD}|$ (по свойству диагоналей параллелограмма), $\overline{OB}\uparrow\downarrow\overline{OD}$, тогда $\overline{OD}=-\overline{OB},$ $\overline{OD}=-\overline{b}.$ $\overline{AD}=-\overline{a}-\overline{b}.$ $\overline{BC}=\overline{AD},$ $\overline{BC}=-\overline{a}-\overline{b}.$ $\overline{m}=\overline{b}-\overline{a}+2(-\overline{a}-\overline{b})-3(\overline{a}-\overline{b})-5(-\overline{a}-\overline{b}),$ $\overline{m}=\overline{b}-\overline{a}-2\overline{a}-2\overline{b}-3\overline{a}+3\overline{b}+5\overline{a}+5\overline{b},$ $\overline{m}=7\overline{b}-\overline{a}.$

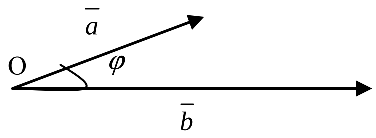
2.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось *l*, то есть направленная прямая.

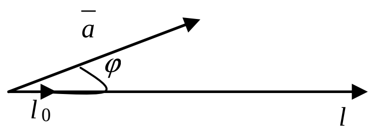
Определение. Проекцией точки *M* на ось *l* называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки *M* на ось.



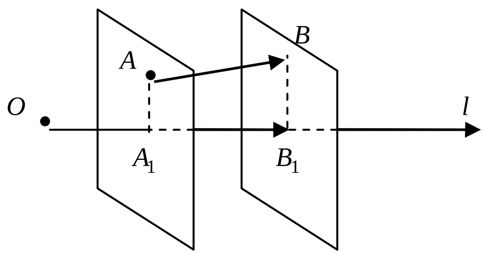
Определение. Пусть $|\overline{a}|\neq 0,$ $|\overline{b}|\neq 0$. Углом между двумя ненулевыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется наименьший угол $\varphi(0\leq\varphi\leq\pi)$, на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ необходимо привести к общему началу *O*.



Определение. Углом между вектором $\overline{a}$ и осью l называется угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{l_0}$ – единичный вектор (орт) оси l.



Пусть $\overline{AB}$ – произвольный вектор ($\overline{AB} \neq 0$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overline{AB}$. Вектор $\overline{A_1B_1}$ называется составляющей вектора $\overline{AB}$ по оси l и обозначается $\overline{A_1B_1} = cocm_l\,\overline{AB}$.



Определение. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l сонаправлены, отрицательное число $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены и 0, если $\overline{AB} \perp l$.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается $np_l AB$.

Основные свойства проекций

1. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, то есть

$$np_l\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi\,. \qquad (2.1)$$

Следствие 1. Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует с осью острый угол, отрицательна, если этот угол – тупой, и равна нулю, если этот угол – прямой.

Следствие 2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

$$np_l\,(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = np_l\,\overline{a} + np_l\,\overline{b} + np_l\,\overline{c}. \qquad (2.2)$$

3. При умножении вектора $\overline{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, то есть

$$np_l\,(\lambda\overline{a}) = \lambda \cdot np_l\,\overline{a} \qquad (2.3)$$

Заметем, что проекция вектора на ось l и его составляющая связаны соотношением

$$cocm_l\,\overline{a} = np_l\,\overline{a} \cdot \overline{l}_0 \qquad (2.4)$$

Пример 3. Вектор $\overline{a}$ образует с осью l угол $\varphi = 60^\circ$, длина вектора $\overline{a}$ равна 6. Найти $np_l\,\overline{a}$.

Решение. По условию $\left|\overline{a}\right| = 6, \varphi = 60^\circ$, тогда $\cos\varphi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Для нахождения проекции вектора $\overline{a}$ на ось l воспользуемся формулой (2.1) $np_l\,\overline{a} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$

Пример 4. Вектор $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b}, \left|\overline{a}\right| = 3, \left|\overline{b}\right| = 4, \left(\widehat{\overline{\mathrm{a}}, l}\right) = \frac{\pi}{4}, \left(\widehat{\overline{b}, l}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Найти $np_l\,\overline{d}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.2) $np_l\,\overline{d} = np_l\,\overline{a} + np_l\,\overline{b}.$

$$np_l\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a}, l}\right),\ np_l\,\overline{a} = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$np_l\bar{b} = \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\bar{b}, l}\right),\ np_l\bar{b} = 4 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}\ .$$

$$np_l\bar{d} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 5. Вектор $\bar{b} = 2\bar{a}$. Длина вектора $\bar{a}$ равна 5. Угол между вектором $\bar{a}$ и осью l равен 30° . Найти $np_l\bar{b}$.

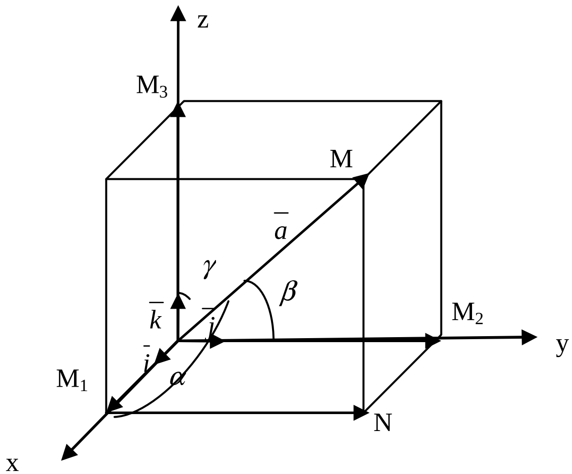
Решение. Воспользуемся формулой (2.3)

$$np_l\bar{b} = np_l\left(2\bar{a}\right) = 2 \cdot np_l\bar{a}.\ \ np_l\bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cos 30^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$np_l\bar{b} = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

2.4. Координаты вектора

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат *Oxyz*. Выделим на координатных осях *Ox, Oy* и *Oz* единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответственно.



Выберем произвольный вектор $\overline{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат:

$$\overline{a} = \overline{OM}\ .$$

Найдем проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3 .

Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$.

Тогда $пр_x \overline{a} = \left|\overline{OM}_1\right|, пр_y \overline{a} = \left|\overline{OM}_2\right|, пр_z \overline{a} = \left|\overline{OM}_3\right|.$

По определению суммы нескольких векторов находим

$$\overline{a} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1N} + \overline{NM}\ .$$

Так как $\overline{M_1N} = \overline{OM}_2, \overline{NM} = \overline{OM}_3$, то

$$\overline{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}. \qquad (2.5)$$

$$\overline{OM_1} = сост_x \overline{a},\ \overline{OM_2} = сост_y \overline{a},\ \overline{OM_3} = сост_z \overline{a}.$$

Используя формулу (2.4), получим

$$\begin{aligned} &\overline{OM_1} = пр_x \overline{a} \cdot \overline{i} = \left|\overline{OM_1}\right| \cdot \overline{i},\ \ \overline{OM_2} = пр_y \overline{a} \cdot \overline{j} = \left|\overline{OM_2}\right| \cdot \overline{j}, \\ &\overline{OM_3} = пр_z \overline{a} \cdot \overline{k} = \left|\overline{OM_3}\right| \cdot \overline{k}. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Обозначим $\left|\overline{OM_1}\right| = a_x,\ \left|\overline{OM_2}\right| = a_y,\ \left|\overline{OM_3}\right| = a_z.$

Тогда из равенств (2.5) и (2.6) получаем

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}. \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) является основной в векторном исчислении и называется разложением вектора по ортам координатных осей. Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\overline{a}$, то есть координаты вектора – это его проекции на соответствующие координатные оси.

Равенство $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ или $\overline{b}(b_x; b_y; b_z)$ означает, что

$$\overline{b} = b_x \cdot \overline{i} + b_y \cdot \overline{j} + b_z \cdot \overline{k}.$$

Модуль вектора (длина вектора) равен квадратному корню из суммы квадратов координат (проекцией) этого вектора

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.8)$$

Если вектор $\bar{a} = \overline{M_1 M_2}$, где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $пр_x \bar{a} = a_x = x_2 - x_1$, $пр_y \bar{a} = a_y = y_2 - y_1$, $пр_z \bar{a} = a_z = z_2 - z_1$.

Тогда $\bar{a} = (x_2 - x_1)\cdot \bar{i} + (y_2 - y_1)\cdot \bar{j} + (z_2 - z_1)\cdot \bar{k}$,
или

$$\bar{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \qquad (2.9)$$

так выражаются координаты вектора через координаты его начала и конца.

Из свойств проекций (координаты вектора – это его проекции на оси координат) следует:

если $\bar{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\alpha \in R$, то

1) $\bar{a} = \bar{b}$ тогда и только тогда, когда $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$, т.е. равные векторы имеют соответственно равные координаты;

2) $\bar{a} \pm \bar{b} = \left\{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\right\}$ – при сложении векторов соответствующие координаты складываются, при вычитании – вычитаются;

3) $\alpha \cdot \bar{a} = \left\{\alpha a_x; \alpha a_y; \alpha a_z\right\}$ – при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число;

4) $\bar{a} \| \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = \alpha \bar{b} \Leftrightarrow a_x = \alpha b_x,\ a_y = \alpha b_y,\ a_z = \alpha b_z$, то есть

$\dfrac{a_x}{b_x} = \alpha,\ \dfrac{a_y}{b_y} = \alpha,\ \dfrac{a_z}{b_z} = \alpha$ или

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (2.10)$$

координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Пусть вектор $\bar{a}$ образует с осями *Ox*, *Oy*, *Oz* углы α, β, γ соответственно. По свойству проекции вектора на ось (2.1), имеем

$$a_x = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\alpha,\ a_y = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\beta,\ a_z = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\gamma. \qquad (2.11)$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \qquad (2.12)$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$.

Подставим выражения (2.11) в равенство (2.8) получаем

$$|\overline{a}| = \sqrt{|\overline{a}|^2 \cdot \cos^2\alpha + |\overline{a}|^2 \cdot \cos^2\beta + |\overline{a}|^2 \cdot \cos^2\gamma},$$

$$|\overline{a}| = |\overline{a}| \cdot \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cdot\cos^2\gamma}.$$

Сократив на $|\overline{a}| \neq 0$, получим соотношение

$$\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cdot\cos^2\gamma} = 1$$

или

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (2.13)$$

то есть сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.

Заметим, что координатами единичного вектора $\overline{a_0}$ являются числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, то есть $\overline{a_0}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

Пример 6. Известно, что $\cos\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma < 0,\ |\overline{a}| = 3.$ Найти координаты вектора $\overline{a}$.

Решение. Найдем $\cos\gamma$, для этого воспользуемся равенством (2.13)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos\gamma = -\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Используя равенства (2.9), получаем

$$a_x = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ a_y = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},\ a_z = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Таким образом, вектор $\bar{a}$ имеет координаты $\bar{a}\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Пример 7. Может ли вектор $\bar{a}$ образовывать с осями координат углы, равные соответственно $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}$?

Решение. Воспользуемся равенством (2.13)

$$\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{3\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Так как $\frac{3}{2}\neq 1$, поэтому вектор $\bar{a}$ не может образовывать с осями координат указанные углы.

Пример 8. Даны векторы $\bar{a}(2;3;5)$ и $\bar{b}(-1;3;4)$. Найти координаты вектора $\bar{c}=4\bar{a}-3\bar{b}$.

Решение. Найдем координаты векторов $4\bar{a}$ и $3\bar{b}$:

$$4\bar{a}(4\cdot 2;\ 4\cdot 3;\ 4\cdot 5),\ 4\bar{a}(8;12;20),$$
$$3\bar{b}(3\cdot(-1);3\cdot 3;3\cdot 4),\ 3\bar{b}(-3;9;12).$$

Координаты вектора $\bar{c}$: $\bar{c}(8-(-3);12-9;20-12)$, $\bar{c}(11;3;8)$.

Пример 9. При каких значениях α и β векторы $\bar{a}=\alpha\cdot\bar{i}-4\cdot\bar{j}-\bar{k}$ и $\bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}+\beta\bar{k}$ коллинеарны?

Решение. Воспользуемся соотношением (2.10): $\frac{\alpha}{3}=\frac{-4}{1}=\frac{-1}{\beta}$.

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{-4}{1}:\ \alpha\cdot 1=3\cdot(-4),\ \alpha=-12.$$

$$\frac{-4}{1}=\frac{-1}{\beta}:\ -4\cdot\beta=1\cdot(-1),\ \beta=\frac{-1}{-4},\ \beta=\frac{1}{4}.$$

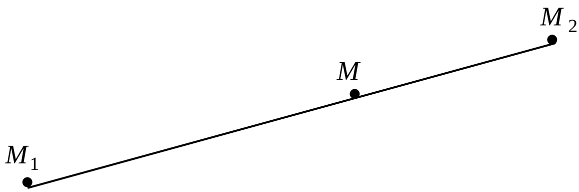
Таким образом, при $\alpha=-12$ и $\beta=\frac{1}{4}$ данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

2.5. Деление отрезка в данном отношении

Говорят, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda > 0$, если $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, или $M_1M = \lambda \cdot MM_2$.

Пусть известны координаты точек M_1 и M_2: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Найдем координаты точки $M(x; y; z)$.



Векторы $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$ коллинеарны $\left(\overline{M_1M} \parallel \overline{MM_2}\right)$, поэтому $\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2}$.

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

$$\lambda \cdot \overline{M_1M} = \{\lambda(x - x_1); \lambda(y - y_1); \lambda(z - z_1)\}.$$

Приравнивая соответствующие координаты равных векторов, получаем:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \ y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \ z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

или

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2.14}$$

Если точка М делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$, тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{2.15}$$

Пример 10. Даны вершины треугольника $A(4;1;5)$, $B(-4;13;1)$, $C(6;1;1)$. Найти координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

Решение. Пусть *AD* – медиана треугольника, тогда точка *D* – середина отрезка *BC*. Найдем координаты точки *D*, используя равенства (2.15): $x = \frac{-4+6}{2} = 1,\ y = \frac{13+1}{2} 7,\ z = \frac{1+1}{2} = 1$, то есть $D(1;7;1)$.

Медианы треугольника точкой пересечения *P* делятся в отношении 2:1, считая от вершины, значит $\frac{AP}{PD} = \frac{2}{1}$, то есть $\lambda = 2$. По формулам (2.14) найдем координаты точки *P*:

$$x = \frac{4+2\cdot 1}{1+2} = \frac{6}{3} = 2,\ y = \frac{1+2\cdot 7}{1+2} = \frac{15}{3} = 5,\ z = \frac{5+2\cdot 1}{1+2} = \frac{7}{3}.$$

Таким образом, точка пересечения медианы данного треугольника – $P\left(2;5;\frac{7}{3}\right)$.

2.5.1. Задачи для самостоятельного решения

1. Отрезок *AB* точками *M,N* и *P* разделен на четыре равные части. Точка *O* не принадлежит отрезку *AB*. $\overline{OA} = \overline{a},\ \overline{OB} = \overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вектор $\overline{m} = 2\overline{OM} - \overline{ON} + 4\overline{OP}$.

2. Даны точки *A*(3;2;0), *B*(4;0;1), *C*(-5;0;2), *D*(-8;6;-1). Проверьте, $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ или $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$. Какой из векторов длиннее и во сколько раз?

3. При каких значениях α и β векторы $\overline{a} = \alpha\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$ и $\overline{b} = 12\overline{i} + 3\overline{j} + \beta\overline{k}$ коллинеарны?

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$ и $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину *D*.

5. Вектор составляет с осями координат равные острые углы. Найдите эти углы.

6. Вектор составляет с осями *Oy* и *Oz* углы 60° и 120°. Какой угол он составляет с осью *Ox*?

7. Даны две координаты вектора $\overline{a} : a_x = -4,\ a_y = 12$. Найти его третью координату a_z при условии, что $\left|\overline{a}\right| = 13$.

8. На оси OZ найдите точку, равноудаленную от A(4;-1;2) и B(0;2;-1).

9. Покажите, что ABCD – параллелограмм, если A(0;2;-3), B(3;1;1), C(4;-5;2), D(1;-4;-2).

10. Дан вектор $\overline{a}(12;-4;3)$. Найти сумму направляющих косинусов данного вектора.

11. Даны точки $A(3;1;1)$ и $B(4;-5;2)$. Точка C делит отрезок AB в отношении 2:3, считая от точки A. Найти координаты точки C.

12. Определите координаты центра тяжести треугольника ABC, если A(5;1;12), B(11;3;8), C(2;5;0).

13. Найдите орт вектора $\overline{a} =$ (-12;-4;-3) и его направляющие косинусы. Острые или тупые углы образует вектор с осями координат?

Ответы. 1. $2\overline{a}+3\overline{b}$. **2**. $\overline{CD}$ длиннее в 3 раза; $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$.

3. -4;-9. **4**. (4;0;6). **5.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.** 45° или 135° . **7.** ± 3 .

8. $\left(0;0;\frac{8}{3}\right)$. **10.** $\frac{11}{13}$. **11**. $\left(\frac{17}{5};-\frac{7}{5};\frac{7}{5}\right)$. **12.** $\left(6;3;\frac{20}{3}\right)$.

13. $\left(-\frac{12}{13};-\frac{4}{13};-\frac{3}{13}\right)$.

2.6. Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ($\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\overline{a}\overline{b}$, $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi \ , \qquad (2.16)$$

где $\varphi = \left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)$.

Формулу (2.16) можно записать иначе. Так как $\left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi = np_{\overline{b}}\,\overline{a}$, $\left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi = np_{\overline{a}}\,\overline{b}$, то получаем:

$$\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot np_{\overline{a}}\,\overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot np_{\overline{b}}\,\overline{a}, \qquad (2.17)$$

то есть скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;

2) $\lambda \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \left(\lambda\overline{b}\right)$;

3) $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$;

4) $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}=\bar{0}$, или $\bar{b}=\bar{0}$, или $\bar{a}\perp\bar{b}$;

5) $\bar{a}^2=\left|\bar{a}\right|^2$ – скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Пусть заданы два вектора $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ и $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$.

Тогда

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\cdot\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)=\left[\text{по свойствам 2,3}\right]=$$

$$=a_xb_x\bar{i}^2++a_xb_y\bar{i}\cdot\bar{j}+a_xb_z\bar{i}\cdot\bar{k}+a_yb_x\bar{j}\cdot\bar{i}+a_yb_y\bar{j}^2+a_yb_z\bar{j}\cdot\bar{k}+$$

$$+a_zb_x\bar{k}\cdot\bar{i}+a_zb_y\bar{k}\cdot\bar{j}+a_zb_z\bar{k}^2=\left[\text{по свойствам 4,5}\right]=$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Таким образом,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (2.18)$$

Пример 11. Даны векторы $\bar{a}(2;3;5)$, $\bar{b}(-1;3;4)$, $\bar{c}(2;0;-5)$. Найти скалярное произведение $\left(2\bar{c}+3\bar{a}\right)\cdot\bar{b}$.

Решение. Воспользуемся свойствами 2, 3:

$\left(2\bar{c}+3\bar{a}\right)\cdot\bar{b}=2\left(\bar{c}\cdot\bar{b}\right)+3\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$.

Используя формулу (2.18), получаем:

$$\bar{c}\cdot\bar{b}=2\cdot(-1)+0\cdot3+(-5)\cdot4=-2+0-20=-22,$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot(-1)+3\cdot3+5\cdot4=-2+9+20=27.$$

Тогда $\left(2\bar{c}+3\bar{a}\right)\cdot\bar{b}=2\cdot(-22)+3\cdot27=-44+81=37$.

Пример 12. Найти длину вектора $\bar{c}=5\bar{a}-3\bar{b}$, если $\left|\bar{a}\right|=2$, $\left|\bar{b}\right|=5$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Используя свойство 5 скалярного произведения, получаем

$\left|\bar{c}\right|=\sqrt{\bar{c}^2}=\sqrt{\left(5\bar{a}-3\bar{b}\right)^2}=\sqrt{25\bar{a}^2-30\bar{a}\bar{b}+9\bar{b}^2}$, но $\bar{a}^2=\left|\bar{a}\right|^2=4$, $\bar{b}^2=\left|\bar{b}\right|^2=25$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi=2\cdot5\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=10\cdot\dfrac{1}{2}=5$, следовательно,

$\left|\bar{c}\right|=\sqrt{25\cdot4-30\cdot5+9\cdot25}=\sqrt{100-150+225}=\sqrt{175}=5\sqrt{7}$.

Пример 13. Даны векторы $\bar{a}=-\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$. Найти угол между векторами $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$:

$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}=-\bar{j}+\bar{k}+\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}=\bar{i}+2\bar{k}$, то есть $\bar{c}(1;0;2)$;

$\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}=-\bar{j}+\bar{k}-\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}=-\bar{i}-2\bar{j}$, то есть $\bar{d}(-1;-2;0)$.

Воспользуемся формулой (2.16) $\bar{c}\cdot\bar{d}=|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{c},\bar{d}}\right)$,

тогда

$$\cos\left(\widehat{\bar{c},\bar{d}}\right)=\frac{\bar{c}\cdot\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}.$$

$$\bar{c}\cdot\bar{d}=1\cdot(-1)+0\cdot(-2)+2\cdot 0=-1;$$

$$|\bar{c}|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5};$$

$$|\bar{d}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$\cos\left(\widehat{\bar{c},\bar{d}}\right)=\frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{1}{5};$$

тогда

$$\left(\widehat{\bar{c},\bar{d}}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{5}.$$

Пример 14. Даны векторы $\bar{a}(1;1;-1)$, $\bar{b}(3;-1;-5)$, $\bar{c}(-2;3;4)$. Найти вектор $\bar{x}$, если известно, что $\bar{x}\perp\bar{a}$, $\bar{x}\perp\bar{b}$ и $\bar{x}\cdot\bar{c}=-1$.

Решение. Пусть искомый вектор $\bar{x}(x;y;z)$. Из условия $\bar{x}\perp\bar{a}$ следует, что $\bar{x}\cdot\bar{a}=0$ или $1\cdot x+1\cdot y-1\cdot z=0,$ то есть $x+y-z=0$.

Из условия $\bar{x}\perp\bar{b}$ следует, что $\bar{x}\cdot\bar{b}=0$ или $3\cdot x-1\cdot y-5\cdot z=0$, то есть $3x-1y-5z=0$.

Из условия $\bar{x}\cdot\bar{c}=-1$ следует, что $-2\cdot x+3\cdot y+4\cdot z=-1$ или $-2+3x+4z=-1$.

Из полученных равенств составим систему линейных уравнений, решение которой и определит координаты искомого вектора $\bar{x}$.

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 3x-y-5z=0, \\ -2x+3y+4z=-1. \end{cases} \qquad (*)$$

Решим систему уравнений методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу A^* системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right).$$

Элементы первой строки матрицы умножим на (-3) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, затем элементы первой строки умножим на 2 и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки полученной матрицы умножим на $\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки умножим на (-5), третьей строки – на 2, затем к полученным элементам третьей строки прибавим соответственные полученные элементы второй строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

С помощью полученной матрицы треугольного вида составим систему уравнений, равносильную системе $(*)$.

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ \quad 2y+z=0, \\ \qquad -z=-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=z-y, \\ y=-\dfrac{1}{2}z, \\ z=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3, \\ y=-1, \\ z=2. \end{cases}$$

Таким образом, искомый вектор $\overline{x}(3;-1;2)$.

2.6.1. Задачи для самостоятельного решения

1.Упростить выражение $\left(2\overline{i}-\overline{j}\right)\cdot\overline{j}+\left(\overline{j}-2\overline{k}\right)\cdot\overline{k}+\left(\overline{i}-2\overline{k}\right)^2$.

2. Найти углы треугольника с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$.

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$=(2;1;0) и $\overline{b}$=(0;-2;1).

4. При каком значении m векторы $\overline{a}=m\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}-m\overline{k}$ перпендикулярны?

5. Найти $\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\left(5\overline{a}-6\overline{b}\right)$, если $\left|\overline{a}\right|=4$, $\left|\overline{b}\right|=6$, $\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=60^\circ$.

6. Найти $\left(3\overline{a}-\overline{b}\right)\left(\overline{a}-6\overline{b}\right)$, если $\overline{a}=(3;1;1)$, $\overline{b}=(0;2;-3)$

7. Даны точки $A(1;2;3)$, $B(2;-4;0)$, $C(1;-2;3)$. Найти $np_{\overline{AC}}\overline{AB}$

8. Найти длину вектора $\overline{c}=3\overline{a}+2\overline{b}$, если $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$, $\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=120^\circ$.

9. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}(2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\overline{x}\cdot\overline{a}=3$.

10. Даны векторы $\overline{a}=(1;1;-1)$, $\overline{b}=(3;-1;-5)$, $\overline{c}=(-2;3;4)$.

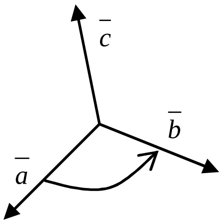
Найти вектор $\overline{x}$, если известно, что $\overline{x}\perp\overline{a}$, $\overline{x}\perp\overline{b}$ и $\overline{x}\cdot\overline{c}=-1$.

11. Найти проекцию вектора $\overline{a}+\overline{c}$ на вектор $\overline{b}+\overline{c}$, если $\overline{a}=3\overline{i}-6\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+4\overline{j}-5\overline{k}$, $\overline{c}=3\overline{i}+4\overline{j}+2\overline{k}$.

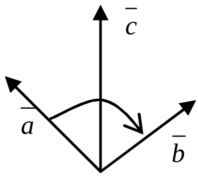
Ответы: 1. 2. **2**. $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. **3.** 90°. **4**. 3. **5**. 336. **6**. 130. **7**.6. **8**. $\sqrt{73}$. **9**. $\left(1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. **10**. (3;-1;2). **11.** $\dfrac{5}{\sqrt{89}}$.

2.7. Векторное произведение векторов и его свойства

Три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и левую, если по часовой.



правая тройка



левая тройка

Определение. Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то есть $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

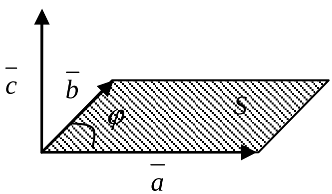
2) имеет длину $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = \left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$;

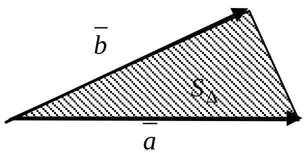
3) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается $\overline{a} \times \overline{b}$, то есть $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$

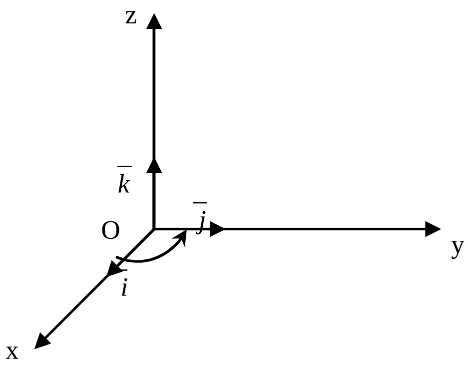
Из условия (2) следует, что длина вектора $\overline{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как на сторонах:

$$S_{пар} = |\overline{a} \times \overline{b}|, \; S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\overline{a} \times \overline{b}|. \qquad (2.19)$$





Из определения векторного произведения вытекают следующие соотношения между ортами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$: $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$.



Свойства векторного произведения

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;

2) $\lambda\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \left(\lambda \bar{a}\right) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b})$;

3) $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$;

4) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} = \bar{0}$, или $\bar{b} = \bar{0}$, или $\bar{a} \| \bar{b}$;

5) $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$.

Из определения и свойств второго произведения следует: $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$, $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$, $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$, $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$.

Можно использовать таблицу векторного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Пусть заданы два вектора $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ и $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$.

Тогда векторное произведение этих векторов может быть найдено с помощью определителя третьего порядка

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (2.20)$$

Пример 15. Упростить выражение $\left(3\bar{a}+4\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)$.

Решение. Используя свойства векторного произведения, получим

$$\left(3\bar{a}+4\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)=3\bar{a}\times\bar{a}+4\bar{b}\times\bar{a}-9\bar{a}\times\bar{b}-12\bar{b}\times\bar{b}=3\cdot\bar{0}+4\bar{b}\times\bar{a}+$$
$$+9\bar{b}\times\bar{a}-12\cdot\bar{0}=13\bar{b}\times\bar{a}\ \left(\text{так как } \bar{a}\times\bar{a}=\bar{0},\ \bar{b}\times\bar{b}=\bar{0},\ \bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}\right).$$

Пример 16. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=6\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$ и $\bar{b}=3\bar{i}-2\bar{j}+6\bar{k}$, как на сторонах.

Решение. Найдем векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с помощью формулы (2.20):

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}6 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=(18-4)\bar{i}-(36+6)\bar{j}+(-12-9)\bar{k}=14\bar{i}-42\bar{j}-21\bar{k}.$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{14^2+(-42)^2+(-21)^2}=\sqrt{196+1764+441}=\sqrt{2401}=49.$

Пример 17. Вычислить площадь параллелограмма построенного на векторах $\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)$и $\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)$, если $\left|\bar{a}\right|=\left|\bar{b}\right|=1$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=30^\circ$.

Решение. Найдем векторное произведение данных векторов:

$$\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)=3\bar{a}\times\bar{a}+9\bar{b}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}+3\bar{b}\times\bar{b}=3\cdot\bar{0}+9\bar{b}\times\bar{a}-$$
$$-\bar{b}\times\bar{a}+3\cdot\bar{0}=8\bar{b}\times\bar{a}.$$

Площадь параллелограмма по формуле (2.19) равна $S=\left|8\bar{b}\times\bar{a}\right|=8\left|\bar{b}\times\bar{a}\right|=8\left|\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$, тогда получим $S=8\cdot1\cdot1\cdot\sin 30^\circ=8\cdot\dfrac{1}{2}=4$.

Пример 18. Даны два вектора $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}$. Вектор $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$. Найти $\left|\overline{c}\right|$.

Решение. Так как вектор $\overline{c}\perp\overline{a}$ и $\overline{c}\perp\overline{b}$, тогда $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$. Координаты вектора $\overline{a}(1;-2;3)$, вектора $\overline{b}(2;-1;4)$. Найдем вектор $\overline{c}$, пользуясь формулой (2.20)

$$\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=(-2)\cdot 4\cdot\overline{i}+2\cdot 3\cdot\overline{j}+1\cdot(-1)\cdot\overline{k}-\left(2\cdot(-2)\cdot\overline{k}+3\cdot(-1)\cdot\overline{i}+1\cdot 4\cdot\overline{j}\right)=$$

$$=-8\overline{i}+6\overline{j}-\overline{k}+4\overline{k}-3\overline{i}+4\overline{j}=-11\overline{i}+10\overline{j}+3\overline{k}.$$

Таким образом вектор $\overline{c}=-11\overline{i}+10\overline{j}+3\overline{k}$.

Найдем модуль вектора $\overline{c}$

$$\left|\overline{c}\right|=\sqrt{(-11)^2+10^2+3^2}=\sqrt{121+100+9}=\sqrt{230}.$$

Пример 19. Найти $2\overline{a}\cdot\overline{b}+\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$, если известно, что $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$, $\overline{b}=3\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$.

Решение. Координаты вектора $\overline{a}(1;2;3)$, вектора $\overline{b}(3;-2;1)$. По формуле (2.18) найдем скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\cdot\overline{b}=1\cdot 3+2\cdot(-2)+3\cdot 1=3-4+3=2.$

Найдем векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$, используя формулу (2.20)

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=(2+6)\overline{i}-(1-9)\overline{j}+(-2-6)\overline{k}=8\overline{i}+8\overline{j}-8\overline{k}.$$

$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{8^2+8^2+8^2}=\sqrt{64\cdot 3}=8\sqrt{3}$. Тогда искомое выражение $2\overline{a}\overline{b}+\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=2\cdot 2+8\sqrt{3}=4(1+2\sqrt{3})$.

2.7.1. Задачи для самостоятельного решения

1. Упростить выражения:

а) $\bar{i}\times\left(2\bar{j}-3\bar{k}\right)-\bar{k}\times\left(3\bar{i}+2\bar{j}\right)$; б) $\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}-\bar{a}\right)+\bar{b}\times\left(\bar{a}-\bar{c}\right)$.

2. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

3. Найти $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$, если $\left|\bar{a}\right|=10$, $\left|\bar{b}\right|=3$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=18$.

4. Вычислить синус угла, образованного векторами $\bar{a}(2;-2;1)$ и $\bar{b}(2;3;6)$.

5. Даны точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ и $C(3;2;1)$.

Найти координаты векторных произведений: а) $\overline{AB}\times\overline{BC}$;

б) $\left(\overline{AB}-3\overline{CB}\right)\times\overline{BA}$.

6. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=(-1;3;5)$ и $\bar{b}=(2;-1;3)$.

7. Найдите площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\bar{m}-\bar{n}$ и $4\bar{m}-5\bar{n}$, где $\left|\bar{m}\right|=\left|\bar{n}\right|=1$, $\left(\widehat{\bar{m},\bar{n}}\right)=45^\circ$.

Ответы. **1**.а) $2\bar{i}+2\bar{k}$; б) $2\bar{a}\times\bar{c}$. **2**. $2\sqrt{6}$. **3**. 24. **4**. $\sin\varphi=\dfrac{5\sqrt{17}}{21}$. **5**. а) (6;-4;-6); б) (18;-12;-18). **6**. $\sqrt{390}$. **7**. $1{,}5\sqrt{2}$.

2.8. Смешанное произведение векторов и его свойства

Определение. Смешанным или векторно-скалярным произведением трех векторов (обозначается $\overline{abc}$) называется произведение вида $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$.

Пусть заданы векторы $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$ и $\bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}$.

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – это вектор, равный

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\bar{j}-\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\bar{k},$$

вектор $\overline{c} = c_x \overline{i} + c_y \overline{j} + c_z \overline{k}$, тогда скалярное произведение векторов $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$ и $\overline{c}$, согласно формуле (2.18) имеет вид

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

или

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.21)$$

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, то есть $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) \cdot \overline{a} = \left(\overline{c} \times \overline{a}\right) \cdot \overline{b}$.

2. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов – сомножителей, то есть $\overline{abc} = -\overline{acb}$, $\overline{abc} = -\overline{bac}$, $\overline{abc} = -\overline{cba}$.

3. Смешанное произведение ненулевых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны, то есть

$$\overline{abc} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.22)$$

векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны ($\overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0, \overline{c} \neq 0$).

4. Смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах. Можно записать:

$$V = \left|\overline{abc}\right|. \qquad (2.23)$$

Объем тетраэдра (треугольной пирамиды), построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ равен

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|. \qquad (2.24)$$

Пример 20. Даны векторы $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{c}=3\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}$. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.21)

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=(1-4)-(-2-3)-3(8+3)=-3+5-3\cdot 11=2-33=-31.$$

Пример 21. Проверить компланарны ли векторы $\bar{a}(2;0;1)$, $\bar{b}(1;1;0)$ и $\bar{c}(3;-2;1)$.

Решение. Найдем смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, используя формулу (2.21):

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=2(1-0)-0+$$

$$+(-2-3)=2-5=-3.$$

Так как смешанное произведение данных векторов не равно нулю $(-3\neq 0)$, тогда по условию (2.22) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – некомпланарны.

Пример 22. Вершинами пирамиды служат точки $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$. Найти объем пирамиды.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, совпадающих с ребрами пирамиды, исходящими из вершины A.

$$\overline{AB}(4-2;3-2;3-2),\quad \overline{AB}(2;1;1),$$
$$\overline{AC}(4-2;5-2;4-2),\quad \overline{AC}(2;3;2),$$
$$\overline{AD}(5-2;5-2;6-2),\quad \overline{AD}(3;3;4).$$

Находим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ по формуле (2.21)

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 1+1\cdot 2\cdot 3-(3\cdot 3\cdot 1+2\cdot 1\cdot 4+$$

$$3\cdot 2\cdot 2=24+6+6-9-8-12=36-29=7.$$

Тогда объем пирамиды по формуле (2.24) равен $V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot 7=\frac{7}{6}$.

Пример 23. При каком значении m векторы $\overline{a} = m\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + m\overline{k}$ и $\overline{c} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ компланарны?

Решение. Воспользуемся необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов (2.22)

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0, \quad \begin{vmatrix} m & 2 & -4 \\ 2 & -3 & m \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -4 \\ 2 & -3 & m \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot(-3)m + 2\cdot(-2)(-4) + 2\cdot 3\cdot m - \left(3(-3)(-4) - 2m^2 + 2\cdot 2\cdot 4\right) =$$

$$= -12m + 16 + 6m - 36 + 2m^2 - 16 = 2m^2 - 6m - 36.$$

$$2m^2 - 6m - 36 = 0,$$

$$m^2 - 3m - 18 = 0.$$

$$m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot(-18)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2},$$

$$m_1 = -3, \; m_2 = 6.$$

Итак, при $m = -3$ и $m = 6$ векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

2.8.1. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти смешанное произведение векторов $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$.

2. Показать, что векторы $\overline{a} = 7\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - 7\overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ компланарны.

3. Доказать, что точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

4. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$, $\overline{b} = -3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{j} + 5\overline{k}$, как на ребрах.

5. Дана пирамида с вершинами O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0) и C(1;2;4). Найдите её объем, площадь грани ABC и длину высоты, опущенной на эту грань.

Ответы. 1. 4. **4**. $V = 51$. **5.** $V = 14; S = 6\sqrt{3}; H = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$**.**

2.9. Прямая на плоскости

Линия на плоскости рассматривается (задается) как множество точек, обладающих некоторым, только им присущим геометрическим свойством.

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел – ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (то есть равенства, связывающего координаты точек линии).

Определение. Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x;y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются текущими координатами точек линии.

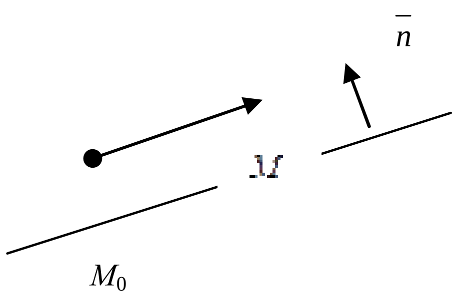
Пример 24. Лежат ли точки $A(1;2)$ и $B(0;3)$ на линии $x+2y-6=0$?

Решение. Подставив в уравнение линии вместо x и y координаты точки A, получим $1+2\cdot 2-6\neq 0$. Значит, точка A не лежит на данной линии.

Подставим в уравнение линии координаты точки В вместо x и y $0+2\cdot 3-6=0$. Следовательно, точка B лежит на данной линии.

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат *разные виды уравнений прямой.*

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – заданная точка прямой l. Вектор $\overline{n}(A;B)$, перпендикулярный прямой l, называют нормальным вектором прямой. Пусть $M(x;y)$ – произвольная (текущая) точка прямой. l. Тогда $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$, $\overline{n}\perp\overline{M_0M}$.



По свойствам скалярного произведения $\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, то есть

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\,. \qquad (2.25)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору*.

Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые в (2.25), получим $Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0$. Обозначим $-Ax_0-By_0=C$, уравнение (2.25) примет вид

$$Ax+By+C=0\,, \qquad (2.26)$$

которое называется *общим уравнением прямой* на плоскости.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, то уравнение приводится к виду $y=-\frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси *Ox*;

2) если $A\neq 0,\ B=0,\ C\neq 0$, то уравнение приводится к виду $x=-\frac{C}{A}$, прямая параллельна оси *Oy*;

3) если $C=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$, то получим $Ax+By=0$, прямая проходит через начало координат;

4) если $A=0,\ B\neq 0,\ C=0$, уравнение прямой принимает вид $By=0$ или $y=0$, прямая проходит через ось *Ox*;

5) если $A\neq 0,\ B=0,\ C=0$, уравнение прямой $-Ax=0$, или x=0, прямая проходит через ось *Oy*.

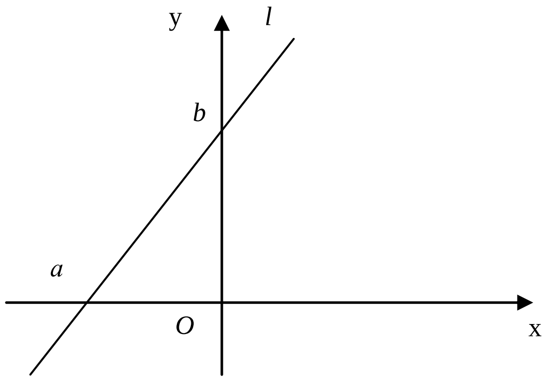
Пусть в уравнении (2.26) $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, тогда перенесем слагаемое *C* в правую часть и разделим на него обе части уравнения

$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$, или $\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1$.

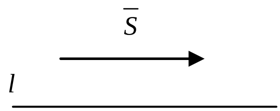
Обозначив $-\frac{C}{A}=a$, $-\frac{C}{B}=b$, получим уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (2.27)$$

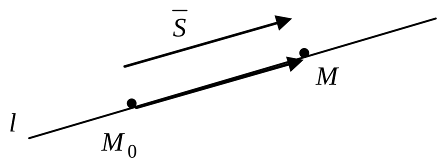
которое называется *уравнением прямой в отрезках*, где a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях координат.



Определение. Вектор $\overline{S}(m;n)$, параллельный прямой, называется направляющим вектором прямой.



Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – заданная точка на прямой *l*, $\overline{S}(m;n)$ – направляющий вектор этой прямой, $M(x;y)$ – произвольная точка прямой *l*.



Тогда $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$, $\overline{M_0M}\parallel\overline{S}$. Используя условие (2.13), получим:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \tag{2.28}$$

Полученное уравнение (2.28) называется *каноническим уравнением прямой*, или *уравнением прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору*.

В частности, если прямая l параллельна оси Ох, то ее направляющий вектор $\overline{S}(m;0)$ и уравнение (2.28) имеет вид $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{0}$, или $y=y_0$.

Если $l\|Oy$, то $\overline{S}(0;n)$ и уравнение прямой $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}$, или $x=x_0$.

Если в уравнении (2.28) величину отношения положить равной t

(t – параметр, переменная величина, $t\in R$): $\frac{x-x_0}{m}=t$, $\frac{y-y_0}{n}=t$,

то, выразив x и y из уравнений, получим

$$x=mt+x_0,\ y=nt+y_0. \qquad (2.29)$$

Уравнения (2.29) называются *параметрическими уравнениями прямой.*

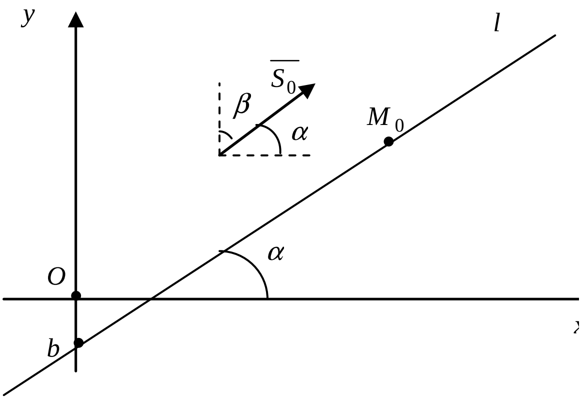
Пусть на прямой l заданы две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Тогда вектор $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$ является направляющим вектором прямой и, используя уравнение (2.28), можно записать

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2.30)$$

Уравнение (2.30) – уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – заданная точка на прямой l, α – угол наклона прямой к оси Ox, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$. В качестве направляющего вектора прямой l возьмем единичный вектор $\overline{S_0}(\cos\alpha;\cos\beta)$, но $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, тогда $\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, то есть $\overline{S_0}(\cos\alpha;\sin\alpha)$. Используя уравнение (2.28), получим $\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$ или $y-y_0=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-x_0)$. Обозначим $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha=k$ (k – угловой коэффициент прямой), получим *уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении*

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (2.31)$$



Выразив из (2.31) y: $y = kx + \left(y_0 - kx_0\right)$ и обозначив $y_0 - kx_0 = b$, получим уравнение

$$y = kx + b, \tag{2.32}$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. В уравнении (2.32) b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

2.9.1. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$.

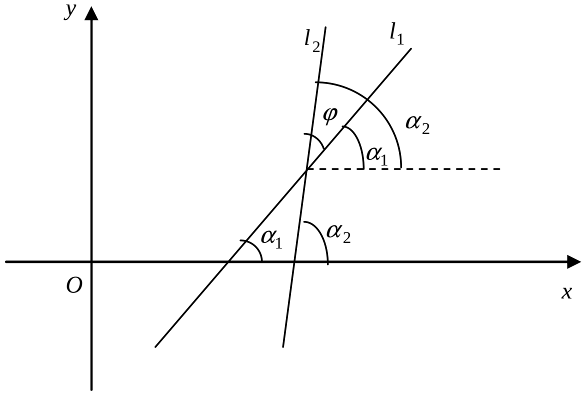
Требуется найти угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую l_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой l_2.

$\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (по теореме о внешнем угле треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Если $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$, то $tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Таким образом,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \tag{2.33}$$



Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая – второй, то правая часть формулы (2.33) берется по модулю, то есть

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|. \qquad (2.34)$$

Если $l_1 \| l_2$, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$. Из формулы (2.33) следует, что $k_2 - k_1 = 0$, то есть

$$k_2 = k_1. \qquad (2.35)$$

Если $l_1 \perp l_2$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $tg\varphi$ не существует. Тогда рассмотрим $ctg\varphi : ctg\varphi = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}$, $ctg\frac{\pi}{2} = 0$.

Отсюда $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, то есть

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ (или } k_2 = -\frac{1}{k_1}\text{)}. \qquad (2.36)$$

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, где $\overline{n_1}(A_1; B_1)$ и $\overline{n_2}(A_2; B_2)$ – нормальные векторы прямых, то

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|}$$

или

$$cos\,\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (2.37)$$

Если $l_1 \| l_2$, то $\overline{n}_1 \| \overline{n}_2$, следовательно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (2.38)$$

Если $l_1 \perp l_2$, то $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$, то есть $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \qquad (2.39)$$

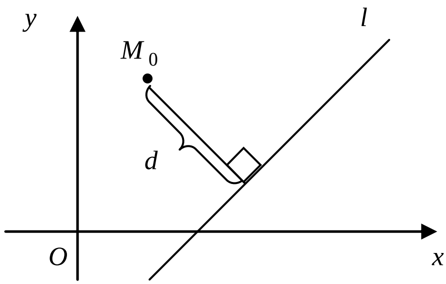
2.9.2. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$, не принадлежащая прямой l.

Обозначим через d расстояние от точки M_0 до прямой l.

Тогда

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.40)$$



Пример 25. Дано каноническое уравнение прямой $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{3}$. Написать: а) общее уравнение прямой; б)уравнение прямой в отрезках; в) уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Решение. а) Приведем данное уравнение к общему знаменателю $3(x-4) = -2(y+3)$ и преобразуем его к виду (2.26): $3x - 12 + 2y + 6 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$ – общее уравнение прямой. б) Полученное общее уравнение преобразуем к виду (2.27): $3x+2y=6$, $\frac{3x}{6}+\frac{2y}{6}=1$ или $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ – уравнение прямой в отрезках. в) Разрешим полученное общее уравнение прямой относительно *y*, получим уравнение (2.32): $2y=-3x+6$, $y=-\frac{3}{2}x+3$. Здесь $k=-\frac{3}{2}$, $b=3$.

Пример 26. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;2)$ параллельно вектору $\overline{S}(3;2)$.

Решение. Используя уравнение (2.28), получим: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}$.

Здесь вектор $\overline{S}$ является направляющим вектором.

Пример 27. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b=6$. Определить угол наклона этой прямой к оси *Ox*.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой в отрезках (2.27): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. По условию $b=6$. Так как искомая прямая проходит через точку $A(2;3)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (2.27). Подставляя числовые данные в это уравнение, получим:

$\frac{2}{a}+\frac{3}{6}=1$, $\frac{2}{a}=\frac{1}{2}$, $a=4$, значит искомое уравнение прямой имеет вид $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$. Для нахождения угла между полученной прямой и осью *Ox*, преобразуем это уравнение к виду (2.32): $6x+4y=24$, $4y=-6x+24$ или $y=-\frac{3}{2}x+6$. Угловой коэффициент $k=-\frac{3}{2}$, но $k=tg\alpha$, то есть $tg\alpha=-\frac{3}{2}$. Поэтому $\alpha=arctg\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Пример 28. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+1=0$, $2x+y+2=0$ и образуют угол 135° с осью *Ox*.

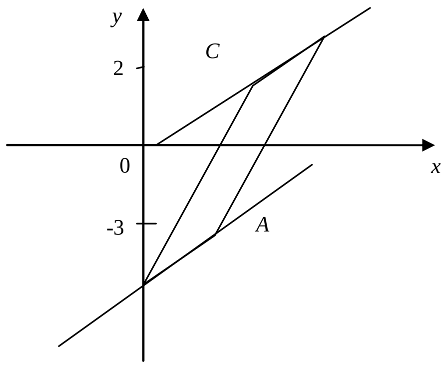
Решение. Найдем координаты точки пересечения данных прямых:

$$\begin{cases} x+2y+1=0, \\ 2x+y+2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1-2y, \\ 2(-1-2y)+y+2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1-2y, \\ -4y+y=2-2; \end{cases} \begin{cases} x=-1-2y, \\ -3y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=0. \end{cases}$$

Значит точка пересечения данных прямых $A(-1;0)$. Для составления уравнения искомой прямой воспользуемся уравнением (2.31). Здесь $(x_0; y_0)$ – координаты точки A, $k = tg135^\circ$, $k = -1$, поэтому уравнение прямой примет вид: $y - 0 = -1(x+1)$ или $y = -x - 1$.

Пример 29. Даны сторона параллелограмма $3x - 4y + 5 = 0$, две вершины $A(1;-3)$ и $C(1;2)$, а также $\left(D\widehat{C,}BC\right) = 45^\circ$. Составить уравнения остальных сторон.



Решение. Проверим, проходит ли данная прямая через указанные точки. Для этого подставим координаты точек A и C в уравнение прямой.

$A(1;-3)$: $3 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + 5 = 3 + 12 + 5 = 20$, $20 \neq 0$, значит, прямая $3x - 4y + 5 = 0$ не проходит через точку A.

$C(1;2)$: $3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 5 = 3 - 8 + 5 = 0$, $0 = 0$, поэтому данная прямая проходит через вершину C. Пусть это сторона DC.

Так как в параллелограмме противоположные стороны попарно параллельны, найдем уравнение стороны, проходящей через точку A параллельно данной прямой. Найдем угловой коэффициент этой прямой:

$$3x - 4y + 5 = 0,\ 4y = 3x + 5,$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4},\ \text{здесь}\ k_{DC} = \frac{3}{4}.$$

В силу условия (2.35) $k_{DC} = k_{AB} = \frac{3}{4}$, тогда уравнение стороны AB примет вид $y + 3 = \frac{3}{4}(x-1)$, $4y + 12 = 3(x-1)$ или $3x - 4y - 15 = 0$.

Найдем уравнение стороны *BC*, проходящей через точку *C* под углом 45° к стороне *DC*. Угловой коэффициент прямой *DC* $k_{DC}=\frac{3}{4}$. Найдем k_{BC}, используя условие (2.33):

$$tg45^\circ=\frac{k_{BC}-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}\cdot k_{BC}}, \qquad 1=\frac{k_{BC}-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}\cdot k_{BC}},$$

$$k_{BC}-\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}k_{BC}, \qquad k_{BC}-\frac{3}{4}k_{BC}=1+\frac{3}{4}, \qquad k_{BC}=7.$$

Составим уравнение стороны *BC*, пользуясь уравнением (2.31):

$$y-2=7(x-1), \qquad y-2=7x-7 \text{ или } 7x-y-5=0.$$

Составим уравнение стороны *AD*, пользуясь уравнением (2.31) $k_{BC}=k_{AD}=7$:

$$y+3=7(x-1), \qquad y+3=7x-7 \text{ или } 7x-y-10=0.$$

Пример 30. Дан треугольник с вершинами $A(0;-4)$, $B(3;0)$ и $C(0;6)$. Составить уравнение и найти длину высоты *CH*.

Решение. Найдем уравнение стороны *AB*, используя уравнение (2.30):

$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y+4}{0+4}, \qquad \frac{x}{3}=\frac{y+4}{4},$$

$$4x=3y+12,\ \ 3y=4x-12 \text{ или } y=\frac{4}{3}x-4.$$

Угловой коэффициент прямой *AB* $k_{AB}=\frac{4}{3}$.

Высота $CH\perp AB$, тогда по условию (2.36) $k_{CH}=-\frac{1}{k_{AB}}$ или $k_{CH}=-\frac{3}{4}$.

Составим уравнение высоты *CH*, пользуясь уравнением (2.31): $y-6=-\frac{3}{4}(x-0)$, $y-6=-\frac{3}{4}x$, $4y-24=-3x$ или $3x+4y-24=0$.

Длину высоты *CH* найдем по формуле (2.40), как расстояние от точки $C(0;6)$ до прямой *AB* $4x-3y-12=0$:

$$CH = \frac{|4\cdot 0-3\cdot 6-12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|0-18-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{30}{5} = 6.$$

Таким образом, уравнение высоты CH $3x+4y-24=0$, а длина высоты CH равна 6.

Пример 31. При каком значении a прямые $ax+6y-7=0$ и $2x+(a-1)y+3=0$ а) параллельны; б) перпендикулярны?

Решение. а) нормальный вектор прямой $ax+6y-7=0$ $\overline{n_1}(a;6)$, прямой $2x+(a-1)y+3=0$ – $\overline{n_2}(2;a-1)$. Из условия параллельности двух прямых (2.38) $\frac{a}{2}=\frac{6}{a-1}$, $a(a-1)=12$, $a^2-a-12=0$,

$a_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4(-12)}}{2} = \frac{1\pm 7}{2} = -3;4$

Таким образом, при $a=-3$ и $a=4$ данные прямые параллельны.

б) согласно условию перпендикулярности двух прямых (2.39), получаем:

$$\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0,\ 2a+6(a-1)=0,\ 2a+6a-6=0,$$

$$8a=6,\ a=\frac{3}{4}.$$

Значит, при $a=\frac{3}{4}$ данные прямые перпендикулярны.

2.9.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Можно ли уравнение прямой $20x+21y=0$ записать в отрезках?

2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку К (-3;1) параллельно вектору $\overline{a}$ = (4;-1). Найдите угловой коэффициент этой прямой и точки ее пересечения с осями координат. Лежат ли на ней точки А(3;1) и В(5;-1)?

3. Дана прямая x-3y+6=0. Найдите: а) ее угловой коэффициент; б) ее нормальный вектор; в) точки пересечения с осями координат; г) площадь треугольника, заключенного между этой прямой и осями координат; д) точку пересечения этой прямой с прямой $5x-2y-9=0$.

4. Среди прямых: а) $4x$ – 2 y + 3=, б) x + $2y$ – 7 = 0, в) $y = 2x + 5$, г) $5x + 10y + 1 = 0$, д) $y = -\frac{1}{2}x$, е) $-6x + 3y + 5 = 0$ укажите параллельные и перпендикулярные.

5. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок в = 7.

6. Дана прямая $4x-3y-7=0$. Какие из точек $A\left(\frac{5}{2};1\right)$, $B(3;2)$, $C(1;-1)$, $D(0;-2)$ лежат на этой прямой?

7. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(5;1)$ и образующих с прямой $2x+y-4=0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

8. Даны вершины треугольника ABC: $A(0;2)$, $B(7;3)$, и $C(1;6)$. Определить $\angle BAC=\alpha$.

9. Определить расстояние от точки $M(2;-1)$ до прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=8$, $b=6$.

10. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+6y+5=0$, $3x-2y+1=0$ и через точку $M\left(-\frac{4}{5};1\right)$.

11. Даны уравнения высот $x+y=4$ и $y=2x$ и вершина $A(0;2)$ треугольника. Составить уравнения сторон этого треугольника.

12. Даны вершины треугольника $A(3;2)$, $B(5;2)$ и $C(-1;4)$. Найти точку пересечения высот треугольника.

13. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(8;6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12.

14. Показать, что треугольник со сторонами $x+\sqrt{3}y+1=0$, $\sqrt{3}x+y+1=0$ и $x-y-10=0$ равнобедренный. Найти угол при вершине треугольника.

15. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x-y-5=0$ и $3x+2y+3=0$ а) параллельно оси Ox; б) параллельные оси Oy; в) параллельно прямой $5x-2y+3=0$; г) перпендикулярно прямой $7x+3y-1=0$.

16. В треугольнике с вершинами A(0;-4), B(3;0), C(0;6) составьте уравнения стороны AB, высоты CH, медианы BM, биссектрисы AK, найдите длину высоты CH и расстояние от вершины C до биссектрисы AK.